UDC 512

Mathematics

Liana ABRAHAMYAN
PhD, associate professor of the department of Physics and Mathematics, Ar SU
E-mail: liana_abrahamyan@mail.ru

Susanna NERSESYAN
special physical-mathematical school named after A. Shahinyan under YSU of the Stepanakert branch.
E-mail: susannagurgenovna@gmail.com

Anna KHACHATRYAN
ArSU, mathematics major, 3 years
E-mail: annaachatryan@mail.ru:

THE APPLICATION OF INTEGER AND FRACTIONAL PARTS OF REAL NUMBERS IN SOME TASKS

Լ.Ռ.Աբրահամյան, Ս. Գ.Ներսեսյան, Ա.Գ. Խաչատրյան

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԻ ԱՄԲՈՂՋ ԵՎ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ՄԱՍԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Թվի ամբողջ և կոտորակային մասերը սովորաբար շատ քիչ են դիտարկվում հանրային դպրոցի դասընթացներում: Մինչդեռ դրանք հանդիպում են մաթեմատիկայի շտեմարաններում և օլիմպիադայի խնդիրներում, ընդ որում դրանք կարող են հաջողությամբ օգտագործվել արտադասարանական գործունեության մեջ: Արտադասարանական գործունեությունը օգտակար է ինչպես աշակերտների, այնպես էլ ուսուցիչների համար: Արտադասարանական աշխատանքները հաջողությամբ իրականացնելու համար ուսուցիչները պետք է մշտապես ընդլայնեն իրենց գիտելիքները՝ և այդ թվում մաթեմատիկայից ու նրա դասավանդման մեթոդիկայից: Մաթեմատիկայի արտադասարանական աշխատանքն իրականացվում է տարբեր ձևերով - դա կարող է լինել արտադասարանական գործունեություն, օլիմպիադա, պատի թերթ և այլն: Սա իր հերթին բարձրացնում է նաև

ուսուցման որակը: Հոդվածի վերջում, օգտագործելով հոդվածում ներկայացրած Լեժանդրի թեորեմը, շատ ավելի մատչելի է լուծվում թվերի տեսությունից հայտնի բնական թվի բնական բաժանարարների քանակը հաշվելու խնդիրը: Հոդվածի գործնական նշանակությունը կայանում է նրանում, որ ներկայացրած նյութը կարող է առաջարկվել ոչ միայն ուսուցիչներին - դպրոցում դասավանդման պրակտիկայում օգտագործելու համար, այլ նաև մանկավարժական ԲՈՒՀ-երի ուսանողներին:
Բերված խնդիրները լուծվել են ԵՊՀ–ին առընթեր Ա. Շահինյանի անվան ֆիզիկամաթեմատիկական հատուկ դպրոցի Ստեփանակերտի մասնաճյուղի արտադպրո-ցական պարապմունքներում:
Բանալի բառեր՝ *ոչ ստանդարտ խնդիր, լուծում, իրական թվի կոտորակային մաս, իրական թվի ամբողջ մաս :*

Л. Абрамян, С. Нерсесян, А. Хачатрян
ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕЛОЙ И ДРОБНОЙ ЧАСТЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ
Целые и дробные части числа обычно не рассматриваются в курсах государственных школ. Между тем они встречаются в задачниках по математике, олимпиадных задачах и могут успешно использоваться во внеурочной деятельности. Внеклассные мероприятия полезны как ученикам, так и учителям. Для успешного осуществления внеклассной деятельности учителям необходимо постоянно расширять свои знания по математике. Внеклассная работа по математике проводится по-разному. Это может быть внеклассное мероприятие, олимпиада, стенгазета. Это, в свою очередь, повышает качество обучения. В конце статьи с помощью теоремы Лежандра по-новому решается известная из теории чисел задача. Практическая значимость статьи в том, что разработанный материал может быть рекомендован учителям для использования в практике преподавания в школе. Задачи, упомянутые в статье, решались на внеклассных занятиях специальной физико-математической школы имени А.Шагиняна при ЕГУ Степанакертского филиала.
Ключевые слова: *Нестандартная задача, решение, дробная часть действительного числа, целая часть действительного числа.*

L.Abrahamyan, S.Nersesyan, A.Khachatryan
THE APPLICATION OF INTEGER AND FRACTIONAL

PARTS OF REAL NUMBERS IN SOME TASKS

Integer and fractional number are not usually considered in public school courses. Meanwhile, they are found in mathematics databases and Olympiad problems and can be successfully used in extracurricular activities. Extracurricular activities are beneficial to students and teachers alike. In order to successfully implement extracurricular activities, teachers must constantly expand their knowledge of mathematics. Extracurricular work in mathematics is carried out in different ways. It can be an extracurricular activity, an Olympiad, a wall paper. This, in turn, improves the quality of teaching. At the end of the article, using the Legendre theorem, a problem known from number theory is solved in a new way. The practical significance of the article in the fact that the developed material can be recommended for use by teachers in the practice of teaching at school.

The mentioned problems were solved in the extracurricular classes of the special physical-mathematical school named after A. Shahinyan under Yerevan State University (Stepanakert branch).

Key words: *Non-standard problem, solution, fractional part of a real number, integer part of a real number.*

1.Introduction

Integer and fractional number are not usually considered in public school courses. Meanwhile, they are found in mathematics databases and Olympiad problems and can be successfully used in extracurricular activities. Extracurricular activities are beneficial to students and teachers alike. In order to successfully implement extracurricular activities, teachers must constantly expand their knowledge of mathematics. This, in turn, improves the quality of teaching.

Extracurricular work in mathematics is carried out in different ways. It can be an extracurricular activity, an Olympiad, a wall paper. The article considers several new problems regarding the integer and fractional parts of the number, which can contribute to the development of creative thinking and serve as a model for solving further problems [1-6].

2. Integer and fractional parts of a real number.

The integer part of a real number [1] is called the largest number k that does not exceed x, that is $k \le x < k+1$.

The integer part of a real number is determined univalently and is usually denoted by $[x]$. Thus, the integer part of a real number x is the number $[x]$ that satisfies the following condition: $[x] \le x < [x]+1$.

The fractional part [1] of the number x is the difference $x - [x]$ which means $\{x\}$: Therefore, $x - [x] = \{x\}$ and $x = [x] + \{x\}$.

For example: $[6,3] = 6, \{6,3\} = 0.3$, $[-6,3] = -7, \{-6,3\} = 0.7$

3. Tasks with integer and fractional parts of a real number :

Task 1. Solve the equation: $\sin x+\cos x=[x]$

Solution. We present the given equation as follows:

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=[x]$$

The range of values on the left side of the equation is the range $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, so the possible values of $[x]$ are $\pm 1, 0$.

$1)\ [x]=-1 \Rightarrow x\in[-1,0)$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

there is no solution in $[-1,0)$

$2)\ [x]=0 \Rightarrow x\in[0,1) \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k \Rightarrow$ does not have a solution in the specified range,

$3)\ [x]=1 \Rightarrow x\in[1,2) \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi k \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi m \end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[1,2), m=0.$$

Answer: $x=\frac{\pi}{2}$

Task 2: Calculate the number of roots of the follow equation:

$$\left[x+\frac{3}{5}\right]+[x]=\frac{7x-3}{3}$$

Solution. Note that solving the equation leads to the following two case studies

Case 1. $x\le k<x+\frac{3}{5},\ k\in Z$: In this case we obtain: $\left[x+\frac{3}{5}\right]=k,\ [x]=k$:

Thus, the given equation will take the following form:

$$k+k=\frac{7x-2}{3} \Rightarrow x=\frac{6k+2}{7},$$

where k satisfies the following condition:

$$k \le \frac{6k+2}{7} < k+0{,}6,\ k \in Z.$$

Further,

$$7k \le 6k+2 < 7k+4{,}2 \quad \text{and} \quad k \in Z.$$

There is a five-integer number that satisfies the obtained system:

$$\begin{cases} k \le 2 \\ k > -2{,}2 \\ k \in Z \end{cases}$$

Case 2: $x+\frac{3}{5} \le k < x+1,\ k \in Z$: In this case we obtain: $\left[x+\frac{3}{5}\right]=k+1$, $[x]=k.$

Thus, the given equation will take the following form:

$$2k+1=\frac{7x-2}{3} \Rightarrow \quad x=\frac{6k+5}{7},$$

where k satisfies the following condition:

$$k+0{,}6 \le \frac{6k+2}{7} < k+1,\ k \in Z\ :$$

There is a two-integer number that satisfies to obtained system:

$$\begin{cases} k \le 0{,}8 \\ k > -2 \\ k \in Z. \end{cases}$$

Thus, the given equation has seven roots.

Answer: 7

Task 3: **Solve the equation** : $\sqrt[[x]]{\{x\}}=2\{x\}$.

Solution: Note, that

$$\sqrt[[x]]{\{x\}}=2\{x\} \qquad (1)$$

the set of allowed values of the equation is the set of natural numbers:

$$[x]=n,\quad n \in N, n \ne 1:$$

Denoting $\{x\}=\alpha$, the equation (1) can be written as follows:

$$\alpha=(2\alpha)^n \qquad (2)$$

a. If $\alpha=0$, we obtain true equality $0=0$ for any natural number.

b. If $\alpha=\frac{1}{2}$, we obtain wrong $\frac{1}{2}=1$ equality.

c. If $0<\alpha<\frac{1}{2}$, we obtain : $0<2\alpha<1$.

Logarithm to base 2 the identity (2) provides for:

$$\log_2 \alpha = n\log_2(2\alpha),$$
$$(1-n)\log_2 \alpha = n,$$
$$\log_2 \alpha = n/(1-n) \Rightarrow \alpha = 2^{\frac{n}{1-n}}, n \neq 1.$$

Thus $x = n + 2^{\frac{n}{1+n}}$ putting in (2) we get:

$$2^{\frac{n}{1-n}} = \left(2 \cdot 2^{\frac{n}{1-n}}\right)^n,$$

or follow true equality : $2^{\frac{n}{1-n}} = 2^{\frac{n}{1-n}}$.

In the case of $n = 1$ the equation (1) has no solution.

d. In the case of $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, we obtain` $1 < 2\alpha < 2$;

further, inequality $\alpha = (2\alpha)^n < 1$ holds when $n < 0$, which does not satisfy the set of allowed values of the equation.

Answer: $x = n + 2^{\frac{n}{1+n}}, \quad x = n, n \in N, n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

Task 4: Calculate the natural divisors of number $6!$.

Solution. We will apply the follow theorem:

Theorem (Legendre). [1] . Assume that $n \geq 2$ and $p \leq n$. The exponent α with which the prime number p participates in the $n!$ canonical form is determined by the follow equality:

$$\alpha = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Were p^k is the largest power of p that does not exceed n $\left(p^k \leq n \leq p^{k+1}\right)$.

Further, represent the number $6!$ in the follow canonical form:

$$6! = 2^{\left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2^2} \right\rfloor} \cdot 3^{\left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor} \cdot 5^{\left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor} = 2^{3+1} \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Then use the well-known function to count the natural divisors of a natural number:

$$\tau(6!) = (1+4)(1+2)(1+1) = 30.$$

Answer : 30.

References

1. Movsisyan Yu. M., Higher Algebra and Number Theory, Yerevan State University, Yerevan, 2023.
2. Arakelyan K. A., collection of mathematics problems,

Yerevan, 2021.
3. Galkin E.V., Non-standard tasks in mathematics. Algebra: Proc. allowance for students in grades 7-11. Chelyabinsk: "View", 2004.
4. Gorskaya E. A., Organization of an elective course in mathematics on the basis of non-standard tasks, // Siberian Pedagogical Journal, 2007.
5. Mironov A.N., To the question of the content of extracurricular activities in mathematics at school, Azimuth of scientific research: pedagogy and psychology,2019.
6. Abrahamyan L.R., Arzumanyan S.A., Non-standard equations regarding integer or fractional parts of real numbers, mathematical education 10, proceedings of the international conference, Yerevan, October 6-7, 2022.

Նյութը ներկայացվել է 8.05.2023,
գրախոսման է ուղարկվել 25.05.2023,
տպագրության ընդունվել 22.06.2023։
Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը։