ՀՏԴ 513.0:371 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

VII-VIII ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

Ռուդիկ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Բանալի բառեր. *Կառուցել, ուղիղ, եռանկյուն, նմանություն, միջնագիծ, անկյունագիծ, սեղան, հիմք, բարձրություն, շրջանագիծ, շոշափող, Թալես, թեորեմ, լար, տրամագիծ, կետերի երկրաչափական տեղ, միջնագիծ, շրջանագիծ, էլիպս, կիզակետ, համաչափություն:*

Ключевые слова. *Построить, прямая, треугольник, сходство, медиана, диагональный, плоскость, основание, высота, окружность, касательная, Фалес, теория, хорда, диаметр, расположение геометрических точек, эллипс, фокус, симметрия.*

Key words. *Build, straight, triangle similarity, median, diagonal plane base, height, circumference, tangent, Thales, theory, chord, diameter, location of geometrical points, ellipse, focus, symmetry.*

Р.Аракелян

СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ VII-VIII КЛАССОВ

Опыт преподавания геометрии в школе показывает, что ученики часто сталкиваются с определенными трудностями при решении задач на построение, которые объясняются следующими обстоятельствами: решение задач на построение требует от школьника нестандартный способ мышления, знание теории геометрических преобразований, параллельный перенос, центральный и осевой симметрии, поворот, подобие фигур и т.д. Цель данной статьи состоит в том, чтобы помочь школьникам преодолеть вышеупомянутые трудности при решении задач на построении.

R. Arakelyan

THE DIFFICULT TASKS ON CONSTRUCTION IN THE COURSE OF GEOMETRY OF VII-VIII CLASSES

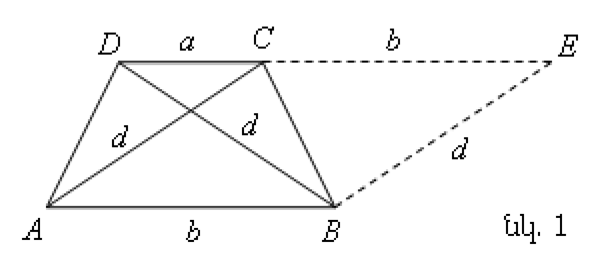
The experience of teaching the geometry at school shows that schoolchildren often encounter certain difficulties in solving the constructive task, which are explained by the following circumstances: the solution requires the construction of surface modification, parallel movement, the central and axis symmetry, a non-standard way of thinking, rotation, similarity of figures and good knowledge of other skills, etc. The purpose of this article is to help schoolchildren to overcome the above mentioned difficulties.

Դպրոցական երկրաչափության դասավանդման փորձը ցույց է տալիս, որ աշակերտները կառուցման խնդիրների լուծման ընթացքում հաճախ են հանդիպում որոշակի դժվարությունների, որը բացատրվում է հետևյալ հանգամանքներով. կառուցման խնդիրների լուծումը պահանջում է հարթության ձևափոխությունների՝ զուգահեռ տեղափոխություն, կենտրոնական և առանցքային համաչափություն, պտույտ, պատկերների նմանություն և այլ գիտելիքների բավարար իմացություն, ոչ ստանդարտ մտածողություն, կառուցման գործիքների կիրառություն: Սույն հոդվածի նպատակն է օգնել աշակերտներին նշված դժվարությունները հաղթահարելու հարցում:

Կառուցման խնդիրները մեծ դեր են խաղում դպրոցականի մաթեմատիկական պատրաստվածության հարցում: Ոչ մի այլ բնույթի խնդիր մաթեմատիկական տրամաբանության և մտածողության զարգացման համար այնքան նյութ չի հաղորդում, որքան կառուցման խնդիրը: Կառուցման խնդիրները սովորաբար թույլ չեն տալիս լուծման ստանդարտ մոտեցում և ձևական ընկալում սովորողների կողմից: Կառուցման խնդիրները նպատակահարմար են դպրոցական երկրաչափության յուրաքանչյուր տեսական նյութի ամրապնդման համար: Լուծելով կառուցման խնդիրներ աշակերտները ձեռք են բերում հմտություններ կառուցման գործիքների օգտագործման հարցում: Սույն հոդվածի նպատակն է օգնել դպրոցականներին կառուցման դժվարին խնդիրների լուծման հարցում:

467. Կառուցեք հավասարասրուն սեղան ըստ հիմքերի և անկյունագծերի:

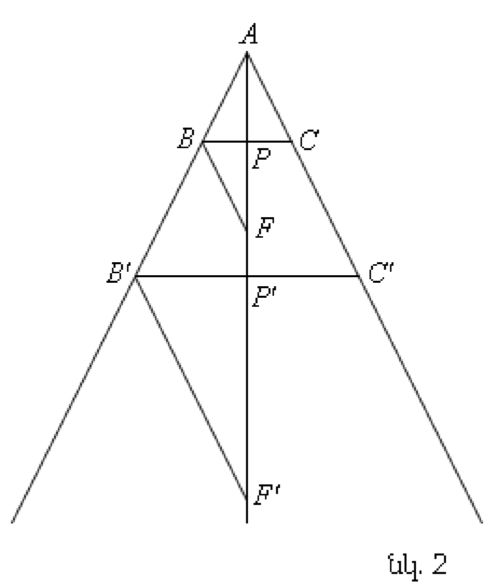
Լուծում: Թող $ABCD$-ն որոնելի սեղանն է, որի հիմքերը և անկյունագծերը տրված են:



նկ. 1

AC անկյունագիծը զուգահեռ տեղափոխենք AB վեկտորով: Կստանանք DBE եռանկյունը, որի երեք կողմերի երկարությունները հայտնի են՝ $DB =\ \ =\ \ =\ \ =\ \ +$ 000000(նկ. 1): Կառուցենք DBE եռանկյունը ըստ երեք կողմերի, այնուհետև գծագիրը լրացնենք մինչև $ABCD$ սեղան: Դժվար չէ ապացուցել, որ ստացված քառանկյունը բավարարում է խնդրի պահանջներին:

487. Կառուցեք հավասարասրուն եռանկյուն՝ ըստ սրունքների կազմած անկյան և հիմքի ու նրան տարված բարձրության գումարի՝ a:



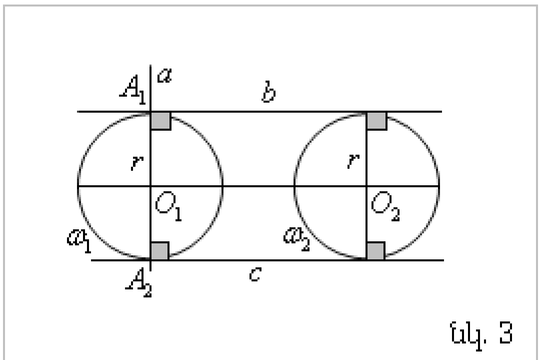
նկ. 2

Լուծում: Կառուցենք հավասարասրուն եռանկյուն $B'\ \ '$ այնպես, որ $\angle\ \ =\ \ :$ A անկյան կիսորդը՝ AP'-ը եռանկյան $B'\ \ '$ կողմը հատում է P' կետում: AP' ճառագայթի P' կետից անջատենք $P'\ \ ' =$ (նկ. 2) : Այնուհետև կառուցենք $B'\ \ '$ հատվածը: Մեր կառուցած $B'\ \ '$ եռանկյունը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին, բացի մի պայմանից՝ այն է, հիմքի և բարձրության գումարը հավասար է AF': Բայց ակընհայտ է, որ կառուցած եռանկյունը նման է (հոմոտետիկ է A կենտրոնի նկատմամբ) որոնելի եռանկյանը, նմանության $k =$ գործակցով: Այս վերլուծությունը մեզ հուշում է կառուցման հետագա քայլերը: AP' ուղղի վրա կառուցենք $AF =$: Կառուցենք F-ից զուգահեռ $F'\ \ '$-ին, կստանանք B կետը, այնուհետև BC-ն զուգահեռ $B'\ \ '$-ին: Ստացված ABC-ն որոնելի եռանկյունն է :

496 . Կառուցեք տրված երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողը:

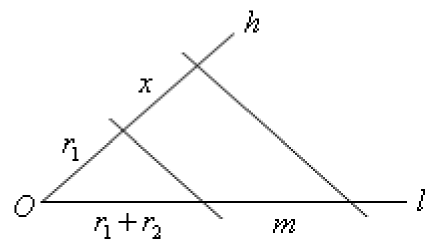
Լուծում: Դիտարկենք շրջանագծերի փոխադարձ դիրքի բոլոր հնարավոր դեպքերը.

ա) շրջանագծերն ունեն հավասար շառավիղ: Այս դեպքում նրանք ունեն երկու շոշափող, որոնք զուգահեռ են նրանց կենտրոնները միացնող ուղղին, որոնք կառուցելու համար կատարում ենք հետևյալ քայլերը. կառուցում ենք $a \perp\ \ \ \ a \cap\ \ =\ \ \ \ ;$ $b \perp\ \ \ \ \perp\ \ \ \ b$ և c ուղիղները շոշափում են ω և ω շրջանագծերին (նկ. 3):

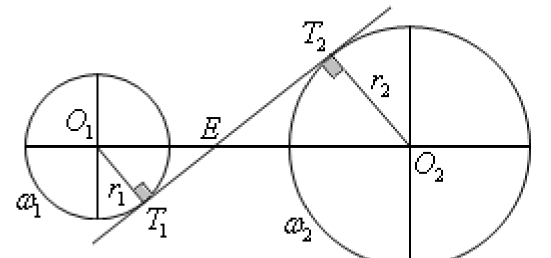


նկ. 3

բ) շրջանագծերն ունեն ոչ հավասար շառավիղներ՝ r_1, r_2: Նշանակենք $O_1O_2 =$ $O_1E =$ Շրջանագծերի ներքին շոշափողը կառուցելու համար պետք որոշել E կետի դիրքը T_1T_2 ուղղի վրա (նկ. 5): O_1T_1E և O_2T_2E ուղղանկյուն եռանկյունները նման են,



նկ. 4



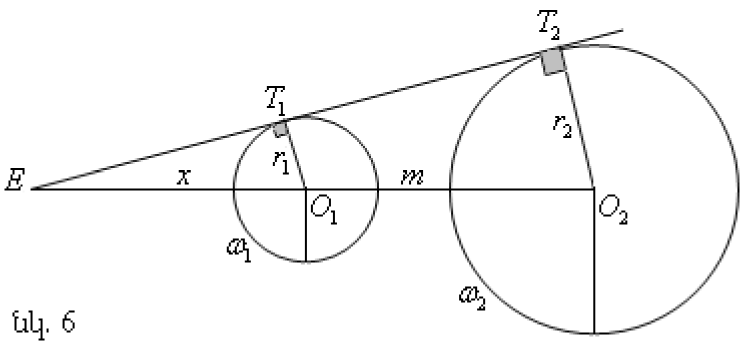
նկ. 5

ուստի $\frac{EO_2}{O_1E} = \frac{}{r_1}$ կամ $m -$ $=$ $\Rightarrow$ $\frac{}{m} = \frac{}{r_1 +}$

Ստացված հարաբերությունից x մեծության գտնելը կոչվում է տրված 3 հատվածների 4-րդ համեմատականի կառուցում, որի կառուցումը հենված է Թալեսի թեորեմին (նկ. 4):

E կետը կառուցելուց հետո շրջանագծերին տրված E կետից շոշափողի կառուցումը շարադրված է 7-րդ դասարանի 179 խնդրում:

Դիտարկենք հաջորդ դեպքը: Երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափող, որի կառուցումը հենված է նորից եռանկյունների նմանությանը:



նկ. 6

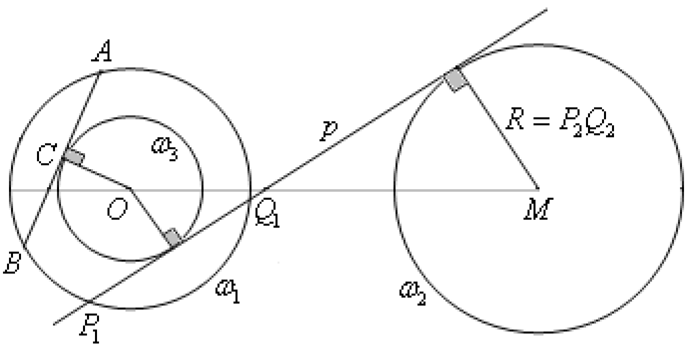
Նշանակենք $O_1O_2 =$ $O_1E =$

O_1T_1E և O_2T_2E ուղղանկյուն եռանկյունները նման են, ուստի $EO_2 : O_1E =$ կամ0000000000

$m +$ $=$ $\Rightarrow$ $\frac{}{m} = \frac{}{r_2 -}$ Այս առնչությունից որոշվում $O_1E =$ հատվածը և կառուցում շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղղի վրա E կետը, այնուհետև կառուցում շրջանագծերին շոշափող համաձայն 179 խնդրի (նկ. 6):

497. Տրված են O կենտրոնով շրջանագիծը, M կետը և P_1Q_1, P_2Q_2 հատվածները: Կառուցեք այնպիսի p ուղիղ, որ շրջանագիծը նրանից անջատի P_1Q_1-ին հավասար լար, և M կետի հեռավորությունը p ուղղից հավասար լինի P_2Q_2-ին:

Լուծում: Թող O կենտրոնով շրջանագիծը ω է: M կետից P_2Q_2 հեռավորությամբ կետերի բազմությունը ω շրջանագիծն է: p ուղիղը ω շրջանագծից կտրում է լար P_1Q_1

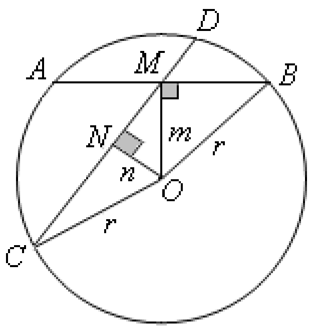


նկ. 7

երկարությամբ: Տրված շրջանագծի հավասար երկարությամբ լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը այդ շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է, որը կառուցվում է հետևյալ կերպ: Կառուցենք կամայական $AB =$ լարը, նրա C կետում միջնուղղահայաց, որը կանցնի O կետով (նկ. 7): ω շրջանագիծը AB երկարությամբ լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղն է: Այսպիսով պետք է կառուցել ω և ω շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողը, իսկ դա խնդիր 496 –ն է:

498. Շրջանագծի ներսում տրված է մի կետ: Կառուցեք այդ կետով անցնող այն լարը, որն այդ կետով անցնող բոլոր լարերից փոքրագույնն է:

Լուծում: Այդ կետը նշանակենք M -ով: Կառուցենք M կետով անցնող երկու լար, մեկը ուղղահայաց շրջանագծի OM տրամագծին՝ AB, մյուսը կամայական՝ CD: Ապացուցենք, որ $AB <$ 00000 Կառուցենք այդ լարերի միջնուղղահայացները՝ m և n: MNO ուղղանկյուն եռանկյան մեջ մի հատվածը էջ է, իսկ մյուսը ներքնաձիգ, ուստի $n <$ (նկ. 8): Այժմ համեմատենք M կետով անցնող լարերի երկարությունները.



նկ. 8

$AB = \quad - \quad = \quad -$

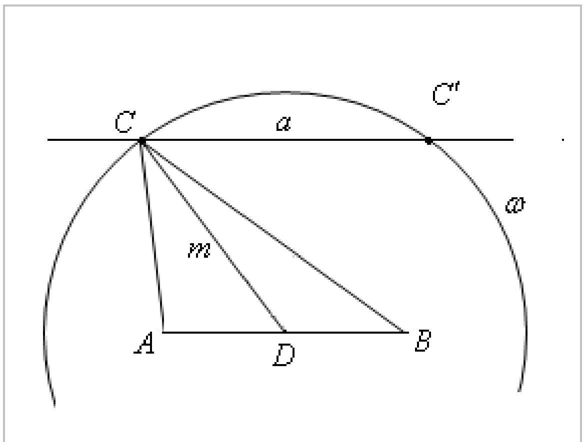
Համեմատելով արմատատակ արտահայտություն-ները համոզվում ենք որ $AB <$

Այսպիսով շրջանի յուրաքանչյուր կետով անցնում է շրջանագծի մեկ ամենակարճ երկարությամբ և մեկ ամենամեծ երկարությամբ լար:

Ամենաերկար լարը այդ կետով անցնող տրամագիծն է, իսկ ամենակարճը՝ այդ կետով անցնող տրամագծին ուղղահայաց լարը: Եթե ամենակարճ լարը նշանակենք m -ով, իսկ շրջանագծի շառավիղը r -ով, ապա կգրենք, որ M կետով անցնող յուրաքանչյուր CD լար բավարարում է $2\sqrt{r^2 - \quad} < \quad <$ անհավասարությանը (նկ. 8):

232. Կառուցեք եռանկյունը՝ նրա տրված մի կողմով և այդ կողմին տարված միջնագծով ու բարձրությունով:

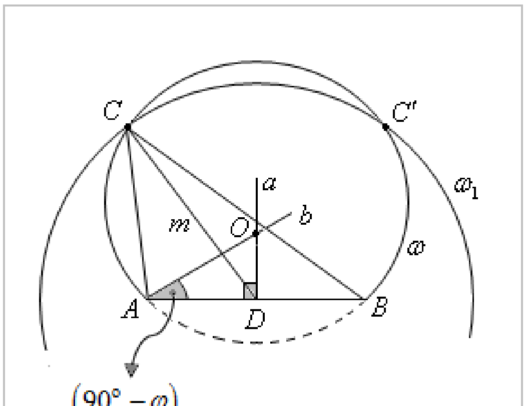
Լուծում: Թող AB-ն տրված հատվածն է: Կառուցենք AB-ին զուգահեռ a ուղիղը, որը նրանից գտնվում է տրված h հեռավորությամբ: Կառուցենք ω շրջանագիծը, որտեղ D-ն AB հատվածի միջնակետն է, իսկ m-ը այդ կողմին տարված միջնագիծը, որը ևս տրված է: Կառուցենք ω շրջանագծի և a ուղղի հատման կետերը՝ C և C': ACB և AC' եռանկյունները բավարարում են խնդրի պահանջներին: Հնարավոր են երեք դեպք, խնդիրը ունի երկու լուծում (նկ. 9), ունի մեկ լուծում, երբ ω շրջանագիծը շոշափում է a ուղղին, և լուծում գոյություն չունի, երբ ω շրջանագիծը և a ուղիղը չեն հատվում :



նկ. 9

233. Կառուցեք եռանկյունը՝ նրա տրված մի կողմով, նրա հանդիպակած անկյունով և այդ կողմին տարված միջնագծով:

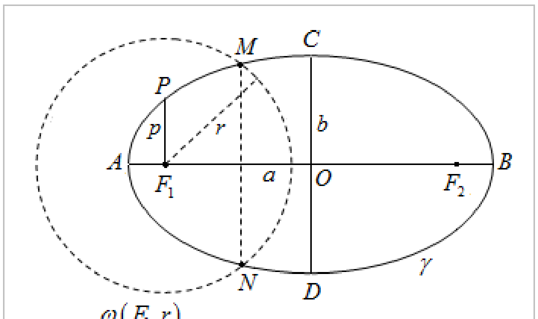
Լուծում: Թող AB-ն եռանկյան տրված կողմն է: Կետերի բազմությունը որից AB հատվածը երևում է φ անկյան տակ շրջանագծային սեգմենտ է, որը կառուցելու համար. կառուցում ենք AB հատվածի միջնուղղահայաց a ուղիղը: Շրջանագծի կենտրոնից՝ O կետից AB հատվածը երևում է 2φ անկյան տակ: Այսինքն $\angle \quad = \quad \Rightarrow \angle \quad = \quad - \quad$: Այսպիսով կառուցենք $\angle \quad = \quad -$ անկյունը, այնուհետև $O = \quad \cap$ Կառուցենք ω շրջանագիծը, այնուհետև ω շրջանագիծը: $\omega \cap \quad =$ ACB և AC' եռանկյունները բավարարում են խնդրի պահանջներին: Հնարավոր են երեք դեպք, խնդիրը ունի երկու լուծում (նկ. 10), ունի մեկ լուծում, երբ ω-ն շոշափում է ω-ին, և լուծում գոյություն չունի, երբ ω-ն և ω-ը չունեն ընդհանուր կետ:



նկ. 10

234. Տրված է էլիպսը և նրա կիզակետերից մեկը: Կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցել մյուս կիզակետը:

Լուծում: F_1-ը էլիպսի կիզակետերից մեկն է: Կառուցենք $\omega(F_1, r)$ շրջանագիծը, թող այն հատում է էլիպսը M և N կետերում: Կառուցենք MN հատվածի միջնուղղահայացը, ակընհայտ է, որ այն կհատի էլիպսը նրա գագաթներում՝ A և B: Կառուցենք AB հատվածի միջնուղղահայացը, որը էլիպսը կհատի փոքր առանցքի C և D գագաթներում (նկ. 11) : Կառուցենք F_1 կետի համաչափը CD առանցքի նկատմամբ՝ կստանանք F_2-ը՝ մյուս կիզակետը:



նկ. 11

235. Տրված է էլիպսը և նրա համաչափությա երկու առանցքները: Կարկինի օգնությամբ կառուցեք նրա կիզակետերը:

Լուծում: Այս խնդիրը լուծելու օգտվենք էլիպսի սահմանումից: Թող նրա կիսաառանցքներն են a, b :Հետևաբար էլիպսի M կետերի բազմության համար՝ $MF_1 +$ _ =

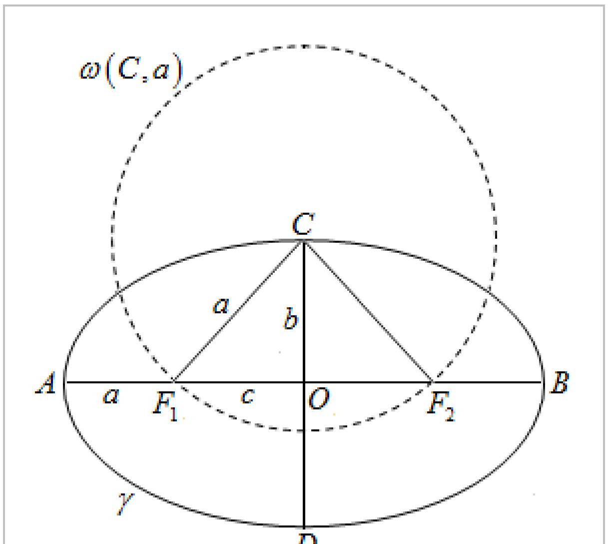
Այդ ժամանակ $CF_1 +$ _ = = $\Rightarrow$ _ = $\Rightarrow$ _ = (նկ. 12):

$OF_1 =$ − $\Rightarrow$ _ = − −

Բայց $AF_1 +$ _ = , կամ

$a -$ − + + − = $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ = $\Rightarrow$ =



նկ. 12

Այսպիսով էլիպսի սահմանումի մեջ նշվող հաստատուն մեծությունը հավասար է էլիպսի մեծ առանցքի երկարությանը, այսինքն $MF_1 +$ _ = $CF_1 =$ _ =

Ստացվածից հետևում է, որ էլիպսի կիզակետերը կառուցելու համար. կառուցում ենք ω շրջանագիծը, այնուհետև կառուցում ω $\cap$ = _ _ հատման կետերը:

Օգտագործված գրականություն

1. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ.Կադոմցև, Է. Գ.Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա, Երկրաչափություն 7, Երևան, <<Աստղիկ>> հրատարակչություն, 2005 թ:
2. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ.Կադոմցև, Է. Գ.Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա, Երկրաչափություն 7, Երևան, <<Աստղիկ-59>> հրատարակչություն, 2000 թ:
3. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом, Геометрия для 9 класса, Учебно-педагогическое издательстжо, М. 1963 г.
4. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, Издательство технико-теоретической литературы, М. 1955 г.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին
Ռուդիկ Առաքելյան ԱրՊՀ, մաթեմատիկայի ամբիոն, մ.գ.թ., դոցենտ
E-mail: rud49@mail.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: