

Լուծում 2: Քանի որ $x - x^2 = -\left(\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, ապա

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x-0,5}{0,5} + C = \arcsin (2x-1) + C$$

Լուծում 3: Քանի որ $4x - 4x^2 = -\left(x^2 - 4x + 4\right) = -(x-2)^2$, ապա

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2 \int \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin (2x-1) + C$$

Լուծում 4: Քանի որ $d\sqrt{1-x} = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$, ապա

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= -2 \cdot \int \frac{-dx}{2 \cdot \sqrt{1-x} \sqrt{x}} = -2 \int \frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \\ &= -2 \int \frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -2 \arcsin \sqrt{1-x} + C \end{aligned}$$

Բերված չորս լուծումներում պարզագույն ձևափոխությունների օգնությամբ ինտեգրալի հաշվումը բերվեց աղյուսակային ինտեգրալների: Շարունակելով տարբեր մոտեցումները, այժմ կիրառենք փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման մեթոդը:

Լուծում 5: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում

$$x = \sin^2 t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

բանաձևով, կստացվի $dx = 2 \sin t \cos t dt, 1-x = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$,

$\sin t = \sqrt{x}, t = \arcsin \sqrt{x}$, հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sin t \cos t} = 2 \int dt = 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C$$

Լուծում 6: Կատարելով փոփոխականի մեկ այլ փոխարինում $x = \cos^2 t, t \in [0, \pi]$

բանաձևով, կստանանք $dx = -2 \sin t \cos t dt, 1-x = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$,

$\cos t = \sqrt{x}, t = \arccos \sqrt{x}$, հետևաբար

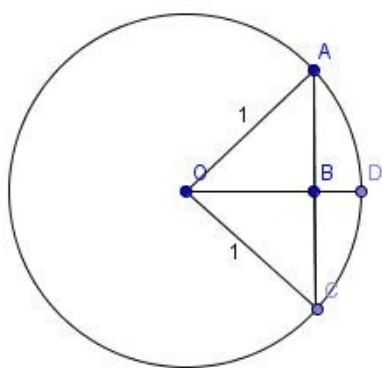
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = -2 \int \frac{\sin t \cos t dt}{\sin t \cos t} = -2 \int dt = -2t + C = -2 \arccos \sqrt{x} + C$$

Նկատենք, որ $0 < x < 1$:

Դիտողություն: Դժվար չէ նկատել, որ տեղի ունի հետևյալ պայմանը

$$\arcsin \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$$

Դիտողության համաձայն ստացվում է նախնականի որոնման հետաքրքիր մեկնաբանություն:



$\arcsin \sqrt{x}$ անկյունը նկարում պատկերված OAB ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունն է.

$$AB = \sqrt{x}, OB = \sqrt{1-x}, OA = :$$

Այդ նույն սուր անկյունը արտահայտվում է նաև հետևյալ տեսքերով.

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \arccos \sqrt{1-x} :$$

Liên hệ 7:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(-x)}} &= \int \frac{2}{1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x(-x)}} = 2 \int \frac{1}{(-x+x)} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x(-x)}} = \\ &= 2 \int \frac{1}{1+\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \cdot \frac{1}{(-x+x)} dx = 2 \int d\left(\arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) = 2\arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C \end{aligned}$$

Loại thứ 8:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(-x)}} &= \int_1^2 \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x(-x)}} = 2 \int_{x+} \frac{1}{(-x)} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x(-x)}} = \\ &= 2 \int \frac{-1}{1+\frac{x}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot \frac{-1}{x^2} dx = 2 \int d \left(\arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) = 2 \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C \end{aligned}$$

Loại thứ 9:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} = 2 \int \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) dx = \\ &= 2 \int d(\arccos \sqrt{1-x}) = 2 \arccos \sqrt{1-x} + C\end{aligned}$$

Լուծում 10: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = gt$$

Քանաճևոյ, Կատանանք

$$\frac{x}{1-x} = g^2 t; t = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}; x = g^2 t - \operatorname{arctg}^2 t, (+ g^2 t) = g^2 t,$$

$$x \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}; x = \sin^2 t; dx = 2 \sin t \cos t dt; \sqrt{x} = \sin t \cos t, \text{ hence } \int \frac{1}{\cos^2 t} \sin t \cos t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\ln |\cos t| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sin t \cos t} = 2 \int dt = 2t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C:$$

Լուծում 11: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում

$$\sqrt{\frac{1 - \epsilon}{x}} = \text{tgt}$$

բանաձևով, կստանանք $t = \text{arctg} \sqrt{\frac{1-\beta}{x}}, \quad \frac{1-\beta}{x} = xg^2t; 1-\beta = xctg^2t,$

$$1 = \left(1 + x g^2 t \right) = \frac{1}{\sin^2 t}; \quad x = \sin^2 t, \quad dx = 2 \sin t \cos t dt, \quad \sqrt{x(1-x)} = \sin t \cos t,$$

հետևաքար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sin t \cos t} = 2 \int dt = 2t + C = 2 \arccos \sqrt{\frac{1-x}{x}} + C:$$

Լուծում12: Նման արդյունք կարելի է ստանալ կիրառելով Էյլերի երրորդ տեղադրումը [1]

Նշանակելով $\sqrt{x(1-x)} = x; t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, կստանանք

$$x \ll -\varepsilon \Rightarrow -x^2; 1 - \varepsilon = -x; 1 = \varepsilon \ll +x^2;$$

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}; \sqrt{x - \frac{1}{2}} = \frac{t}{1 + \frac{1}{2}}; dx = -\frac{2tdt}{(1 + \frac{1}{2})^2},$$

հետևաքար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{1 + \frac{2}{x}}{t} \cdot \frac{-2tdt}{(1 + \frac{2}{x})^2} = -2 \int \frac{dt}{1 + \frac{2}{x}} = 2 \operatorname{arccot} t + C = 2 \operatorname{arccot} g \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{x}}{x}} + C$$

Էյլերի տնդադրումների կիրառումը շատ հաճախ հանգեցնում է մեծածավալ հաշվումների: Հնարավորության դեպքում պետք է խուսափել Էյլերի տնդադրումներից և կիրառել այլ տնդադրումներ:

Լուծում13: Եթե $x = 0,5 -$, ապա $1 - z = 0,5 +$; $t = 0,5 - z$; $dx = - 't$, հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{0,5-t \cdot 0,5+t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{0,25-t^2}} = \arccos 2t + C = \arccos(1-2x) + C.$$

Լուծում14: Եթե $x = 0,5 + at; a \neq 0$, ապա $1 - x = 0,5 - at; at = x - 0,5; dx = dt$

հետևաքար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sqrt{0,5 + \left(\frac{1}{2}t\right)(0,5 - \frac{1}{2}t)}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sqrt{0,25 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2}} = \arcsin 2at + C = \arcsin(x-1) + C$$

Լուծում15: Եթե $x = 0,5 - at$; $a \neq 0$, ապա $1 - z = 0,5 + it$; $at = 0,5 - z$; $dx = -a' \sqrt{4t}$ հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = - \int \frac{d(2t)}{\sqrt{0,25 - 4t^2}} = \arccos 2at + C = \arccos(1 - 2x) + C:$$

Լուծում16: Եթե $\sqrt{x} =$, ապա $x =$ ² ; $dx =$ $2dt$, հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

Լուծում17: Եթե $\sqrt{1-z} = \dots$, ապա $1-z = \dots^2$; $x = \dots^2$; $dx = \dots t dt$, հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{-2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} = -2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arccos t + C = 2 \arccos \sqrt{1-x} + C :$$

Լուծում18: Եթե $x = 0,5 +$, ապա $1 - \epsilon = 0,5 -$; $t = \epsilon - 0,5; dx = dt$, հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{0,5 + 0,5 - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{0,25 - t^2}} = \arcsin 2t + C = \arcsin(2x - 1) + C.$$

Նախնականները որոնելու միջոց է նաև ֆունկցիայի ածանցյալ կամ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ գտնելը: Բավական է թերեղ միայն հետևյալ օրինակները.

$$\left(\arcsin \sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad \left(\arcsin \sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \left(2\arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

