

ՀՏԴ 512.1: 371

Մաթեմատիկայի դասականության մեթոդիկա

ԵՐԵՍՈՒՆՎԵՑ ԱՍՏԻՃԱՆԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐ ԱՆԿՑԱՆ ԵՌԱՆԿՑՈՒՆԱԶԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ալեքսանդր ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Կարինե ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

Բանալի բառեր. երեսունվեց աստիճան, եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, եռանկյունաչափական մեթոդ, երկրաչափական մեթոդ, ֆիզիկական իմաստ:

Ключевые слова: тридцатьшесть градусов, тригонометрические функции, тригонометрический метод, геометрический метод, физический смысл.

Keywords: thirtysix degrees, trigonometrical functions, trigonometrical method, geometrical method, physical meaning.

А. Хачатрян, К.Марутян

О РАСЧЕТЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛА РАВНОГО ТРИДЦАТИ ШЕСТИ ГРАДУСАМ

Работа посвящена определению тригонометрических функций угла 36 градуса. Дело в том, что тригонометрические функции от этого угла получаются с помощью других приемов. Используя разные тригонометрические и геометрические подходы, приведены некоторые методы определения тригонометрических функций угла 36 градуса. В одном случае приведен физический смысл задачи. Имея значения тригонометрических функций угла 36 градуса, не трудно вычислить значения тригонометрических функций 18 и 72 градусов.

A.Khachatryan, K. Marutyan

ON DETERMINATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF THIRTY SIX DEGREES ANGLE

The article is devoted to the determination of trigonometrical functions of 36 degrees. The point is that trigonometrical functions from this angle come with the help of different methods. Using trigonometrical and geometrical different methods. Several methods of determination of trigonometrical functions of 36 degrees are given and in one case the physical meaning of a task is given. When we have values of trigonometrical functions of 36 degrees angle we can also find values of trigonometrical functions of 18 and 72 degrees angles.

Աշխատանքը նվիրված է երեսունվեց աստիճանի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հաշվմանը: Այս անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքների հաշվման համար անհրաժեշտ են այլ հնարքներ: Օգտագործելով եռանկյունաչափական և երկրաչափական տարբեր մոտեցումներ, բերված են երեսունվեց աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հաշվման մի քանի մեթոդներ: Մի մոտեցման դեպքում բերված է խնդրի ֆիզիկական իմաստը: Ունենալով երեսունվեց աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները դժվար չէ գտնել 18 և 72 աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Եռանկյունաչափական մոտեցում

1. Օգտվելով նրանից, որ 2α և 3α (72° և 108°) (այստեղ և այնուհետև ընդունվում է, որ $\alpha = \frac{\pi}{5}$)

անկյունները եռանկյունաչափական շրջանի մեջ համաչափ (սիմետրիկ) են ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, բերման բանաձևերից կունենանք [1]

$$\sin 2\alpha = \sin 3\alpha \quad (1)$$

Լուծենք (1) հավասարումը, օգտվելով կրկնակի և եռակի անկյունների համար եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերից՝

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha; \quad \sin 3\alpha = 3\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

Կունենանք

$$2\sin \alpha \cos \alpha = 3\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

Քանի որ մեզ հետաքրքրում է 36° անկյունը, ապա $\sin \alpha \neq 0$: Ստացված հավասարման երկու կողմը բաժանենք $\sin \alpha$ -ի վրա, կստանանք

$$2\cos \alpha = 3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

կամ

զրոյի: Ուղղահայաց առանցքի վրա վեկտորների պրոյեկցիաների գումարի զրո լինելու պայմանից ստանում ենք

$$1 + \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = 0$$

Կամ

$$2\cos 2\alpha - (\cos \alpha - 1) = 1$$

Վերջինս էլ, ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո, բերվում է մեզ ծանոթ

$$4\cos^2 \alpha - 3\cos \alpha - 1 = 0$$

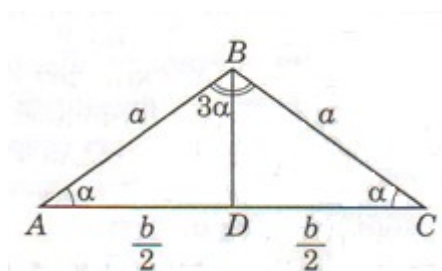
հավասարմանը, որը լուծելիս, իհարկե, պետք է հաշվի առնել, որ $\cos \alpha > 0$):

Ֆիզիկական իմաստը: Եթե շրջանագծի կենտրոնում տեղադրենք հինգ հավասար մեծության ուժեր, ուղղված դեպի կանոնավոր հնգանկյան գագաթները (նկ.2), ապա կստանանք հավասարակշռված ուժային համակարգ, քանի որ նրա համագործող հավասար է զրոյի;

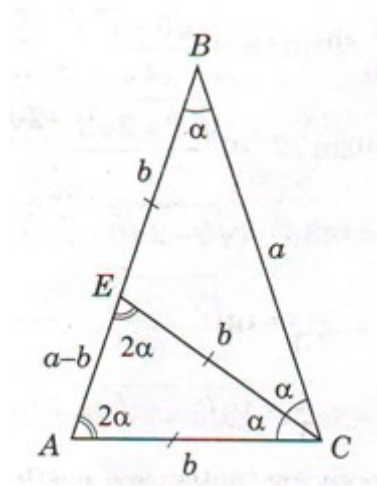
5. Դիտարկենք հավասարապարուն եռանկյուն, որի հիմքի անկյունները հավասար են $\alpha = 36^\circ$ (նկ.3): Այդ դեպքում գագաթի B անկյունը հավասար է $180^\circ - 72^\circ = 08^\circ = 3\alpha$: Միևուսների

Թեորեմից կստանանք $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 3\alpha}$:

Եռանկյունի ABD -ից $\cos \alpha = \frac{b/2}{a}$, հետևաբար $b = 2a \cos \alpha$ և $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin 3\alpha}$:



٧٤.٣



٧٤.4

Այստեղից ստանում ենք մեզ արդեն ծանոթ (1) հավասարումը՝ $\sin 2\alpha = \sin 3\alpha$, որն իր հերթին բերվում է (2) հավասարմանը, իսկ վերջինիս լուծումն է՝

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} :$$

6. Դիտարկենք մեկ այլ հավասարասրտուն եռանկյուն, որի հիմքի անկյունները հավասար են $2\alpha = 120^\circ$ (նկ.4):

Այդ դեպքում գագաթի B անկյունը հավասար է $180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ = \alpha$: Տանենք C անկյան կիսորդը և նրա հատման կետը AB կողմի հետ նշանակենք E : Դժվար չէ տեսնել, որ ABC և ECA եռանկյունները նման են: Եռանկյունների նմանությունից՝ $\frac{a - b}{b} = \frac{b}{a}$, որտեղից էլ ստանում ենք՝

$$a^2 - ab - b^2 =)$$

հավասարումը: Լուծենք այն a -ի նկատմամբ որպես քառակուսի հավասարում, կստանանք

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}b.$$

Քանի որ եռանկյան կողմերը բացասական լինել չեն կարող, վերցնում ենք միայն պլյուս նշանը՝ $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$: Այժմ օգտվելով $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$ առնչությունից, որը հեշտությամբ ստացվում է BEC հավասարաբարուն եռանկյունուց (E գագաթից պետք է տանել բարձրություն), ստանում ենք մեզ արդեն քաջաձանոթ $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ արժեքը:

Եռանկյունաչափական վերջաբան

7. Ունենալով $\cos\alpha$ -ի արժեքը և օգտվելով եռանկյունաչափության բանաձևերից դժվար չէ գտնել այդ անկյան մյուս ֆունկցիաների արժեքները: Այսպես

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10 - \sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{5}}}{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{5}}}{\sqrt{6 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} = \sqrt{5 - \sqrt{5}}:$$

Օգտվելով $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ և $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$ բանաձևերից, ստանում ենք

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10 + \sqrt{5}}}{4},$$

Օգտվելով բերման բանաձևերից կարելի հաշվել $\cos\frac{2\pi}{5}$ -ի և $\sin\frac{2\pi}{5}$ -ի արժեքները.

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{10}; \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{10}:$$

Այսպիսով՝

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \quad \sin\frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{5}}}{4}; \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}; \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + \sqrt{5}}}{4}; \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \operatorname{tg} 72^\circ = \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + \sqrt{5}}}{4}; \quad \sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}; \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} = \operatorname{tg} 18^\circ = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{5}}$$

Գրականություն

1. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզ: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտական հոսքի համար).- Եր.: “Տիգրան Մեծ”, 2009.-208 էջ:

2. Մովսիսյան Յու. Մ. Բարձրագույն հանրահաշիվ և թվերի տեսություն: Եր.: “Զանգակ-97”, 2008.- 732 էջ:
3. Կուրոշ Ա.Գ. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց.-Եր.: “Լույս”, 1965.- 495 էջ:

Տեղեկություններ հեղինակների մասին.

Խաչատրյան Ալեքսանդր Մովսեսի - ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի վարիչ:

Հեռ. (+37497) 201949

E - mail alexkhach@yandex.ru

Մարության Կարինե Լորիկի - ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ:

Հեռ. (+37497) 248985

Հոդվածը տպագրության է ներառվում խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: