УДК: 517.9 Математика

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Георгий САКЯН

Ключевые слова: *линейная однородная система дифференциальных уравнений первого порядка, неосцилляция системы.*

Բանալի բառեր՝ *առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համասեռ համակարգ, համակարգի ոչ օսցիլյացիան:*

Keywords. *Linear homogenous system of differential equations of first order, non-oscillation theorem.*

Գ. Սահակյան

ՈՐՈՇ ՈՉՕՍՑԻԼՅԱՑԻԱՅԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Աշխատանքում դիտարկվում է $[0,+\infty)$ *-ում լոկալ հանրագումարելի գործակիցներով*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համասեռ համակարգ: Որոշ ենթադրությունների դեպքում ապացուցվում են թեորեմներ համակարգի ոչօսցիլյացիայի վերաբերյալ:

G.Sahakyan

ABOUT SOME NONOSCILATION THEOREMS FOR SECOND ORDER LINEAR HOMOGENOUS SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

The linear homogenous system of differential equations of first order

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

with local summable on $[0,+\infty)$ *coefficients is considered in this work. Under certain assumtions the theorems are proved for nonoscillation of system.*

В работе рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

с локально суммируемыми на $[0,+\infty)$ *коэффициентами. При определенных предположениях доказаны теоремы неосцилляции системы.*

1. Введение

Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{1}$$

где функции $p, r : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ локально суммируемы (интегрируемы в смысле Лебега на любом конечном интервале), $p(t) > 0$ для всех $t \ge t_0$.

Определение. Нетривиальное решение $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) назовем неосциллирующим, если существует $T > t_0$ такое, что $y_1(t)$ или $y_2(t)$ отличны от нуля на $[T, +\infty)$. Система (1) называется неосциллирующей, если все ее нетривиальные решения неосциллирующие.

Известно, что осцилляционные свойства системы (1) тесно связаны с следующим уравнением Риккати

$$\theta'(t) + p(t)\theta^2(t) - r(t) = 0.$$

В частности, имеет место следующее утверждение (см., [1]).

Теорема 1. *Система* (1) *не осциллирует тогда и только тогда, когда существует функция* $\theta \in C^1[t_0,+\infty)$ *такая, что*

$$\theta'(t) + p(t)\theta^2(t) - r(t) < 0 \quad \text{для} \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Нахождение критериев осцилляции и неосцилляции системы (1) до сих пор актуально и является предметом исследований многих математиков (см., например, [1]- [4]). Целью настоящей работы является доказательство некоторых неосцилляционых теорем для рассматриваемых систем с применением теоремы 1.

2. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *две непрерывно-дифференцируемые функции на* $[t_0,+\infty)$ *такие, что*

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) \geq p(t), \quad \psi'(t) \geq -r(t). \tag{2}$$

Если

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi(t)\psi(t) = M > 0, \tag{3}$$

то тогда система неосциллирующая.

Доказательство. Предположим, что условие (3) верно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T \geq t_0$ так, что

$$\left|\varphi(t)\psi(t) - M\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \geq T. \tag{4}$$

Примем

$$\theta(t) = -\psi(t) + \frac{M}{\varphi(t)}.$$

Тогда, с учетом условия (2), найдем

$$\theta'(t) = -\psi'(t) - \frac{M\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \leq r(t) - \frac{Mp(t)}{\varphi^2(t)}.$$

Соответственно будем иметь

$$\theta'(t) + p(t)\theta^2(t) - r(t) \leq -\frac{Mp(t)}{\varphi^2(t)} + p(t)\left(-\psi(t) + \frac{M}{\varphi(t)}\right)^2 = \frac{p(t)}{\varphi^2(t)}\left[-M + \left(-\psi(t)\varphi(t) + M\right)^2\right].$$

Далее, учитывая неравенство (4) и произвольность ε, получим

$$\theta'(t) + p(t)\theta^2(t) - r(t) < \frac{p(t)}{\varphi^2(t)}\left(-m + \frac{1}{4}\right) < 0.$$

Согласно теореме 1 отсюда будет следовать неосцилляция системы (1), что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть* $\psi(t)$ *- непрерывно-дифференцируемая функции на* $[t_0,+\infty)$ *такая, что*

$$\psi'(t) \geq -r(t).$$

Если

$$\limsup_{t\to\infty} \psi(t)\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau = M > 0,$$

то тогда система неосциллирующая.

Доказательство следует из теоремы 2, если принять $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau$.

Следствие 2. *Пусть* $\varphi(t)$ *непрерывно-дифференцируемая функция на* $[t_0,+\infty)$ *такая, что*

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) \geq p(t).$$

Если

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi(t)\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau = M > 0,$$

то тогда система неосциллирующая.

Доказательство следует из теоремы 2, если принять $\psi(t) = -\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau$.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *две непрерывно-дифференцируемые функции на* $[t_0,+\infty)$ *такие, что выполняется одно из условий* (5a)-(5c)

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) \geq p(t), \quad \psi'(t) \leq -r(t). \tag{5a}$$

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) \leq -p(t), \quad \psi'(t) \geq -r(t). \tag{5b}$$

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) \leq -p(t), \quad \psi'(t) \leq -r(t). \tag{5c}$$

Если имеет место условие (3), *то тогда система* (1) *неосциллируюшая.*

Доказательство. Доказательство проводится так же, как и в теореме 2, с той лишь разницей, что функция $\theta(t)$ определяется в соответствии с тем, какое из условий (5a), (5b) и (5c) выполняется, а именно:

$$\theta(t) = \psi(t) + \frac{M}{\varphi(t)}$$ при выполнении условия (5a),

$$\theta(t) = -\psi(t) - \frac{M}{\varphi(t)}$$ при выполнении условия (5b),

и

$$\theta(t) = \psi(t) - \frac{M}{\varphi(t)}$$ при выполнении условия (5c).

Проиллюстрируем утверждение теоремы 2 на следующем примере. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = \cos t \cdot y_2, \\ y_2' = \dfrac{1}{t+1} y_1. \end{cases} \tag{6}$$

В данном случае $p(t) = \cos t, r(t) = \frac{1}{t+1}$. Выберем в качестве функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ следующие функции:

$$\varphi(t) = t, \quad \psi(t) = \frac{1}{t+1}.$$

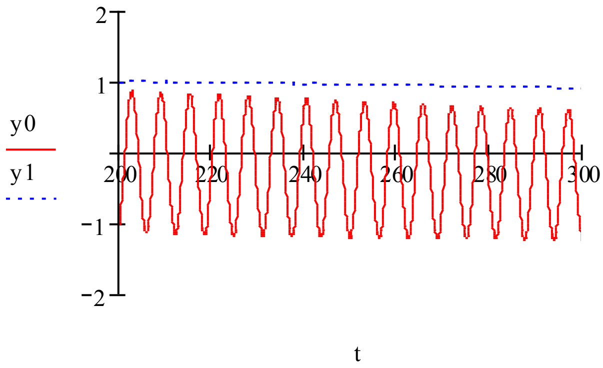
Очевидно, что имеют место условия теоремы 2, например, для $t_0 =$:

$$\varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) = 1 \geq \cos t = p(t), \quad \psi'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \geq -\frac{1}{t+1} = -r(t),$$

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi(t)\psi(t) = 1 \neq 0.$$

Следовательно, система (6) неосциллирующая.

Ниже приводится графическая интерпретация одного решения системы (6) в среде Mathcad на отрезке [200, 300] (на приведенном рисунке $y0$ соответствует компоненте y_1, а $y1$ соответствует компоненте y_2). Заметим, что картина в целом сохраняется и на любом другом отрезке - первая компонента осциллирует, а вторая - нет. И, следовательно, рассматриваемая система неосциллирующая.



ЛИТЕРАТУРА

1. **Mirzov J. D. ,** Oscillatory nature of the solution of a differential system, Differ. Uravneniya 16 (1980), no. 11, 1980-1984.
2. **Lomtatidze A. and Partsvania N**., Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first linear ordinary diffrential equations. Georgian Math. J. 6(1999), N 3, 85-298.
3. **Skhalyakho Ch. A.,** Oscillatory and non oscillatory nature of the solutions for a system of nonlinear differential equations, Differ. Uravneniya 16 (1980), no. 8, 1523-1526.
4. **Chuaqui M., Duren P., Osgood B. and Stowe1 D.** Oscillation of solutions of linear differential equations. Bull. Aust. Math. Soc. 79 (2009), 161–169.

Сведения об авторе:
Георгий Саакян - к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики, АрГУ

e-mail: ter_saak_george@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.