ՀՏԴ 378.148.53 Ֆիզիկա

ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ՕՐԵՆՔԻ և ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ԿԱՊԸ

Ա.Ի.Սողոմոնյան, Գ.Ռ.Ջամալյան, Ա.Ա.Զաքարյան, Ռ.Ե.Սողոմոնյան

Բանալի բառեր՝ *իներցիալ համակարգ, կոնսերվատիվ ուժ, իմպուլս, էներգիա, ժամանակային ածանցյալ, բարդ ֆունկցիայի ածանցյալ, վեկտորական հանրահաշիվ, կինեմատիկ կապ, արագություն, արագացում:*

Ключевые слова: *инерционная система, консервативная сила, импульс, энергия, временная производная, производная сложной функции, векторная алгебра, кинематическая связь, скорость, ускорение.*

Keywords: *inertial system, conservative force, impulse, energy, time derivative, derivative of a complex function, vector algebra, kinematic connective, velocity, acceleration.*

О ЛОГИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ВТОРЫМ ЗАКОНОМ НЬЮТОНА И ЗАКОНОМ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

А.И.Согомонян, А.А.Закарян, Г.Р.Джамалян, Р.Е.Согомонян

В статье дается, что на примере одночастичной задачи показано, что для консервативной силы второй закон динамики может быть получен как следствие закона сохранения энергии. Вывод второго закона Ньютона сделан на основе формул векторной алгебры и известных правил вычисления производной. Полученный результат может считаться дополнительной логической связью в рамках классической механики и имеет важное учебно-методическое значение, так как в традиционных курсах он не затрагивается. Освещенный вопрос может также привести к пересмотру программы раздела "Закон сохранения механической энергии".

ON THE LOGICAL CONNECTION BETWEEN NEWTON'S SECOND LAW AND LAW OF CONSERVATION OF ENERGY

A.I. Soghomonyan, A.A. Zaqaryan, G.R. Jamalyan, R.E.Soghomonyan

By the example of the movement of one particle it was proved that in the case of conservative force we can get the second law of dynamics as a result of the law of conservation of energy. The deduction of Newton's second law is done on the basis of the formulas of vector algebra and derivative rules. The result that has been acquired may be considered as additional logical link in the framework of the theory of mechanics. Surely, the acquired result is of great educational and methodological importance, as the traditional course of physics doesn't touch upon the above-mentioned question. It can also lead to the reconsideration of the plan in the section of "Laws of conservation of energy".

Ինչպես հայտնի է, հաշվարկի իներցիալ համակարգերում գործող Նյուտոնի երկրորդ օրենքի մաթեմատիկական տեսքը այն հավասարումն է, որը թույլ է տալիս որոշել տրված ուժի համար նյութական մասնիկի շարժման ընթացքը

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}\,; \qquad (1)$$

որտեղ $\vec{F}$-ը մասնիկի վրա ազդող արդյունարար (համազոր) ուժն է, իսկ $\vec{P}$-ն՝ մասնիկի շարժման իմպուլը [1-5]: Համաձայն (1) բանաձևի, եթե dt տարրական ժամանակահատվածում մարմնի վրա ազդում է $\vec{F}$ ուժ, ապա այդ ժամանակահատվածում նրա իմպուլսը կրում է $d\vec{P}$ փոփոխություն: Վերոնշյալ հավասարումը համապատասխանում է մեկ մասնիկի դեպքին: Այդ իսկ պատճառով մասնիկների համախմբության դեպքում Նյուտոնի երկրորդ օրենքն իրենից կներկայացնի հավասարումների համակարգ:

Լինելով բազմաթիվ փորձնական տվյալների ընհանրացման արդյունքում ձևավորված դրույթ, Նյուտոնի երկրորդ օրենքը դասական մեխանիկայի տեսությունում հանդիսանում է աքսիոմ կամ հիմնադրույթ: Կամայական տեսության հիմնադրույթ նրա շրջանակներում, սկզբունքորեն արտածելի չէ:

Նյուտոնի երկրորդ օրենքը ճիշտ է կամայական բնույթի ուժի դեպքում, իսկ նրա հետևանք հանդիսացող էներգիայի պահպանման օրենքը՝ կոնսերվատիվ ուժի դեպքում, որոնց աշխատանքը կախված չէ հետագծի ձևից:

Տեսության հետազոտողի և ուսումնառության համար չափազանց կարևոր է իմանալ նրանում գործող դրույթների միջև տրամաբանական կապը: Այսպես, տեսությունը կարելի է համարել ընհանուր առմամբ զարգացված, եթե լուսաբանված են նրա հետևանք դրույթների հնարավոր տրամաբանական շարվածք կապերը հիմնադրույթների հետ: Ամբողջական և բազմակողմանի գիտելիքները պահանջում են նաև տրամաբանական կապերի բացահայտում տեսության երկրորդային կամ ածանցյալ դրութների միջև, առավել ևս, երբ հիմնադրույթների հետ միասին նրանք կարող են հենք հանդիսանալ նոր պնդումների ստացման համար: Կարևոր է նկատել, որ տեսության դրութների միջև տրամաբանական կապերը պարտադիր չէ, որ լինեն միայն ուղղված դեպի վեր՝ աքսիոմներից դեպի թեորեմներ կամ հորիզոնական ուղղությամբ՝ թեորեմներից դեպի թեորեմներ: Որոշ մասնավոր դեպքերում հնարավոր են նաև հակադարձ տրամաբանական կապեր, երբ տեսության աքսիոմը ստացվում է թեորեմի հետևանք:

Հիմք ընդունելով վերոնշյալը, ստորև կդիտարկենք մեխանիկայի տեսության թեորեմի՝ էներգիայի պահպանման օրենքի և նրա հիմնադրույթի՝ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի միջև գործող հակադարձ տրամաբանական կապը, որը ճիշտ է միայն այն մասնավոր դեպքում, երբ մասնիկի վրա ազդում է կոնսերվատիվ ուժ:

Դիտարկենք մասնիկի կինեմատիկ պարամետրերից կախված մեխանիկական էներգիայի մեծությունը.

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x, y, z)\,; \tag{2}$$

որտեղ v-ն մասնիկի շարժման արագության մոդուլն է, $U(x, y, z)$-ը՝ մասնիկի դիրքից կախված պոտենցիալ էներգիա անվանումը կրող որոշակի ֆունկցիա է:

Ներկայացնենք մարմնի շարժման արագությունն ըստ ուղղանկյուն կոորդինատային առանցքների բաղադրիչների գումարի տեսքով.

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}, \tag{3}$$

որտեղ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-ն միավոր և չափողականություն չունեցող փոխուղղահայաց վեկտորներ են՝ ուղղված, համապատասխանաբար, X, Y, Z առանցքների դրական ուղղություններով:

Դիտարկենք $\vec{v}(t)$ վեկտորի քառակուսին կամ ինքն իր հետ սկալյար արտադրյալը.

$$\vec{v}^2(t) = \vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t) = (v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k})(v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k})\,; \tag{4}$$

Օգտվելով վեկտորների համար սկալյար արտադրյալի սահմանումից

($\vec{c}\cdot\vec{b} = c\cdot b\cdot\cos\alpha$, որտեղ c և b մեծությունները $\vec{c}$ և $\vec{b}$ վեկտորի մոդուլներն են, α-ն այդ վեկտորների կազմած անկյունն է) բազիսային վեկտորների համար կարող ենք գրել.

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0\,; \tag{5}$$

Այս հավասարումների հիման վրա (4)-ի համար կարող ենք գրել.

$$\vec{v}^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t) = v^2(t)\,; \tag{6}$$

Այսպիսով, համաձայն (6)-ի, վեկտորի քառակուսին հավասար է նրա մոդուլի քառակուսուն:

(2) բանաձևի մեջ մասնիկի կինետիկ էներգիան նշանակենք T-ով: Կստանանք.

$$E = T + U(x(t), y(t), z(t))\,; \tag{7}$$

Ակնհայտ է, որ

$$T(v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \frac{m}{2}\left[v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)\right]; \tag{8}$$

Համաձայն (8)-ի, կինետիկ էներգիան ֆունկցիա է արագության բաղադրիչներից:

Մեխանիկական էներգիայի (7) բանաձևից անմիջապես բխում է, որ լրիվ էներգիայի ըստ ժամանակի ածանցյալը հավասար է կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների ածանցյալների գումարին.

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dT}{dt}+\frac{dU}{dt}; \tag{9}$$

Օգտվելով (8)-ից, dT/dt -ի համար կստանանք՝

$$\frac{dT}{dt}=\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)\right]=m\left[v_x(t)\frac{dv_x(t)}{dt}+v_y(t)\frac{dv_y(t)}{dt}+v_y(t)\frac{dv_y(t)}{dt}\right]; \tag{10}$$

Ելնելով արագության և արագացման վեկտորների միջև գործող $\vec{a}=d\vec{v}/dt$ կինեմատիկ կապից, ըստ բաղադրիչների վերլուծության, արագացման վեկտորի համար կունենանք՝

$$\vec{a}=\frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dv_y(t)}{dt}\vec{k}; \tag{11}$$

Պարզ դիտարկումը ցույց է տալիս, որ (10)-ի աջ մասում փակագծում ներկայացված անդամը դա, ըստ էության, արագության և արագացման վեկտորների սկալյար արտադրյալն է: Իրոք, օգտվելով (3)-ից և (11)-ից հեշտ է տեսնել, որ

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=v_x(t)\frac{dv_x(t)}{dt}+v_y(t)\frac{dv_y(t)}{dt}+v_y(t)\frac{dv_y(t)}{dt}; \tag{12}$$

Այս հավասարումը թույլ է տալիս կինետիկ էներգիայի ժամանակային ածանցյալի համար (տես (10) բանաձևը) գրել հետևյալը.

$$\frac{dT}{dt}=m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt};$$

որտեղ $\vec{a}=d\vec{v}/dt$: Քանի որ $m\,d\vec{v}/dt=d\vec{P}/dt$, ապա վերջինս կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$\frac{dT}{dt}=\vec{v}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt}; \tag{13}$$

Այժմ դիտարկենք պոտենցիալ էներգիայի ժամանակային ածանցյալը: Քանի որ $U(x(t),y(t),z(t))$ կախվածությունը ժամանակից կրում է անբացահայտ բնույթ, այսինքն `այդ կախվածությունը իրականանում է $x(t),y(t),z(t)$ ֆունկցիաների միջոցով, ապա կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի հաշվման բանաձևը, կարող ենք գրել.

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad \text{կամ}$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}v_x+\frac{\partial U}{\partial y}v_y+\frac{\partial U}{\partial z}v_z; \tag{14}$$

որտեղ հաշվի են առնվել $v_x=dx/dt, v_y=dy/dt, v_z=dz/dt$ կինեմատիկ կապերը:

Ներմուծենք հետևյալ վեկտորը.

$$\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}; \tag{15}$$

Հեշտ է նկատել, որ այս բանաձևը արտահայտում է $\vec{F}$ ուժի և պոտենցիալ էներգիայի միջև գործող հայտնի կապը՝ $\vec{F}=-\mathrm{grad}U$: Օգտվելով (3) և (15) բանաձևերից ակնհայտ, որ (14)-ի աջ մասը $\vec{F}$ և $\vec{v}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է՝ վերցված մինուս նշանով.

$$\frac{\partial U}{\partial x}v_x+\frac{\partial U}{\partial y}v_y+\frac{\partial U}{\partial z}v_z=-\vec{F}\cdot\vec{v};$$

Ստացված բանաձևի հիման վրա (14)-ի համար կարող ենք գրել.

$$\frac{dU}{dt}=-\vec{F}\cdot\vec{v}; \tag{16}$$

Այսպիսով, բացառապես օգտվելով վեկտորական հանրահաշվի հայտնի բանաձևերից, ինչպես նաև ածանցման կանոններից և կատարելով որոշակի նշանակումներ, մենք ստացանք կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների ածանցյալների համար համապատասխան բանաձևերը: Օգտվելով (13)-ից և (16)-ից լրիվ մեխանիկական էներգիայի ածանցյալի համար (տես բանաձև (9)) կարող ենք գրել.

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \left(\frac{d\vec{P}}{dt} - \vec{F} \right); \qquad (17)$$

Այժմ պահանջենք, որպեսզի էներգիայի ածանցյալը հավասար լինի զրոյի՝ $dE/dt = 0$, այսինքն՝ էներգիան լինի պահպանվող մեծություն: Այս դեպքում (17)-ի աջ մասի փակագծի արտահայտությունը նույնաբար հավասար կլինի զրոյի: Հետևաբար.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \;; \qquad (18)$$

Այս բանաձևը հենց Նյուտոնի երկրորդ օրենքի մաթեմատիկական տեսքն է (տես (1) բանաձևը):

Այսպիսով, մենք հիմնավորեցինք, որ Նյուտոնի երկրորդ օրենքը կարելի է ստանալ լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքից: Արտածման հիմքում ընկած է (15) բանաձևը, որն արտահայտում է պոտենցիալ էներգիայի և մասնիկի վրա ազդող ուժի միջև եղած կապը: Հայտնի է, որ այդ բանաձևը ճիշտ է միայն պոտենցիալային ուժի դեպքում: Հետևաբար, Նյուտոնի երկրորդ օրենքը հանդիսանում է լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքի հետևանք՝ միայն կոնսերվատիվ ուժի դեպքում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Д.В. Сивухин - Общий курс физики. Том I – Механика. Москва: Наука, 1979г.
2. Մ.Գ. Աբրահամյան - Մեխանիկայի ֆիզիկական հիմունքները. Երևան, 1997թ.
3. С.Э.Хайкин - Физические основы механики. Москва: Наука, 1971 г.
4. Ի.Վ.Սավելև - Ընդհանուր ֆիզիկայի դասընթաց, h1, Երևան, 1977թ.
5. Г.Мясников, Т.Осанова – Пособие по физике. Высшая школа. 1988г.

Տեղեկություններ հեղինակների մասին

Ա.Ի.Սողոմոնյան**, Գ.Ռ.Ջամալյան, Ա.Ա.Զաքարյան*, Ռ.Ե.Սողամոնյան*****

* Արցախի պետական համալսարան

** Հայաստանի ազգային ագրարային համալսարանի Ստեփանակերտի մասնաճյուղ

*** Արցախի տեղեկատվական տեխնոլոգիաների կենտրոն

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.դ. - Ալեքսանյանը: