

ՏՏԴ 371.31:513

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

ԱՆԱԼՈԳԻԱՆ ՈՐՈՇԵՍ ՌԵՖԼԵՔՍԻՎ ԿՐԿՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՐԱԿԱՆԱՅՄԱՆ ՄԻՋՈՑ

Լիլիթ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Բանալի բառեր. անալոգիա, ռեֆլեքսիվ կրկնություն, հարթաչափություն, տարածաչափություն, պատկերների հատկություններ, երկրաչափական հասկացություններ, եռանկյուն, տետրանդր:

Ключевые слова: аналогия, рефлексивное повторение, планиметрия, стереометрия, свойства фигур, геометрические понятия, треугольник, тетраэдр.

Key words: analogy, reflexive repetition, planimetry, stereometry, properties of figures, geometric concepts, triangle, tetrahedron.

АНАЛОГИЯ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ РЕФЛЕКСИВНОГО ПОВТОРЕНИЯ

Л. Аракелян

Работа посвящена рефлексивному повторению курса планиметрии при изучении стереометрии. Средством осуществления рефлексивного повторения была выбрана аналогия. На примерах теорем и задач о треугольнике и его пространственном аналоге тетраэдре была представлена модель проведения такого повторения. Было показано, что решение планиметрической задачи можно распространить для решения, соответствующей стереометрической задачи применяя аналогию.

ANALOGY AS A MEANS OF REALIZATION OF REFLEXIVE REPETITION

L.Arakelyan

The work is coserned with the reflexive repetition of planimetry course in the study of stereometry. As a means of realization of the reflexive repetition an analogy has been chosen. In terms of theories and tasks about triangle and its spatial analogy-tetrahedron, a model of carrying out such repetition has been introduced. It has been presented that the solution of a planimetry task can be extended for the solution of the corresponding tetrahedron task by applying an analogy.

Աշխատանքը նվիրված է տարածաչափության ուսուցման ժամանակ հարթաչափության դասընթացի ռեֆլեքսիվ կրկնությանը: Որպես ռեֆլեքսիվ կրկնության իրականացման միջոց է ընտրվել անալոգիան: Եռանկյան և նրա տարածական անալոգ հանդիսացող տետրանդրի վերաբերյալ համապատասխան թեորեմների ու խնդիրների օրինակներով ներկայացվել է այդպիսի կրկնության իրականացման մոդելը: Ի ցույց է դրվել, որ հարթաչափական խնդրի լուծումը կարելի է տարածել նաև համապատասխան տարածաչափական խնդիրը լուծելիս՝ կիրառելով անալոգիա:

Անալոգիայի կիրառումը թույլ է տալիս կատարել ընդհանրացումներ, վարկած առաջադրել, տեղափոխել ձեռք բերած գիտելիքները, կարողությունները և հմտությունները նոր՝ ավելի բարձր մակարդակ, նախկինում ուսուցված նյութը վերախմաստավորել ավելի ընդհանուր տեսանկյունից: Այս համատեքստում տարածաչափության ուսուցման ժամանակ հարթաչափության դասընթացի ռեֆլեքսիվ կրկնության տարբերակ կհանդիսանա տարածական մարմինների և հարթաչափական պատկերների համեմատումը:

Տարածաչափական պատկերների շատ հատկություններ նման են հարթ պատկերների հատկություններին: Օրինակ՝ եռանկյան կողմերի և տետրանդրի նիստերի թիվը, եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի և տետրանդրին ներգծյալ սֆերայի գոյությունը, արտագծյալ շրջանագծի և արտագծյալ սֆերայի գոյությունը: Մի շարք երկրաչափական հասկացություններ հարթաչափությունից ունեն տարածական անալոգներ: Օրինակ՝ զուգահեռագիծը և զուգահեռանիստը, բազմանկյունն ու բազմանիստը, շրջանագիծն ու գնդային մակերևույթը: Տետրանդրն էլ (եռանկյուն բուրգը) կարելի է համարել եռանկյան տարածական անալոգը: Այսպես, եռանկյունը մինիմում կողմերով բազմանկյունն է, իսկ տետրանդրը մինիմում նիստերով բազմանիստը: Հարթաչափության որոշ թեորեմների

ձևակերպումներում հարթաչափական հասկացությունները փոխարինելով համապատասխան տարածաչափական հասկացություններով՝ ստացվում են տարածաչափությունում կիրառելի թեորեմներ, իսկ ինչպես հայտնի է, անալոգիայով ստացված թեորեմները և բանաձևերը հեշտ են մտապահվում: Դիտարկենք օրինակներ:

Թեորեմ 1: *Յանկացած եռանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը:*

Թեորեմ 1⁰: *Յանկացած եռանկյուն բուրգի համար գոյություն ունի միակ ներգծյալ սֆերա:*

Թեորեմ 2: *Յանկացած եռանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ընդ որում միայն մեկը:*

Թեորեմ 2⁰: *Եռանկյուն բուրգն ունի միակ արտագծյալ սֆերա:*

Թեորեմ 1-ը և թեորեմ 2-ը ուսուցվում են 8-րդ դասարանում, իսկ թեորեմ 10-ը և թեորեմ 20-ը՝ 11-րդ դասարանում:

Թեորեմ 3: *Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին:*

Թեորեմ 3-ն ուսուցվում է 8-րդ դասարանում:

Թեորեմ 3⁰: *Եթե տետրաէդրի զազաթներից մեկի բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են, ապա այդ զազաթի հանդիպակադ նիստի մակերեսի քառակուսին հավասար է մնացած նիստերի մակերեսների քառակուսիների գումարին:*

Ապացուցում: Դիցուք՝ $OABC$ տետրաէդրի $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$: OAB, OBC, OCA և ABC եռանկյունների մակերեսները նշանակենք համապատասխանաբար $S_{OAB}, S_{OBC}, S_{OCA}$, և S : AB, BC , և CA կողերով երկնիստ անկյունները նշանակենք համապատասխանաբար α, β և γ : O կետի պրոյեկցիան ABC նիստի վրա նշանակենք D (նկ.1):

Քանի որ $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$, ապա D կետը գտնվում է ABC եռանկյան ներսում: OAB, OBC և OCA եռանկյունները ABC եռանկյան պրոյեկցիաներն են, ուստի

$$S_{OAB} = S \cos \alpha, \quad S_{OBC} = S \cos \beta, \quad S_{OCA} = S \cos \gamma:$$

ABD, BCD և CAD եռանկյունները OAB, OBC և OCA եռանկյունների պրոյեկցիաներն են ABC նիստի վրա, և այդ եռանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է ABC եռանկյան S մակերեսին:

$$(S \cos \alpha) \cos \alpha + (S \cos \beta) \cos \beta + (S \cos \gamma) \cos \gamma = S(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = S:$$

$$\text{Հետևաբար՝ } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1:$$

$$\text{Ուստի՝ } S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2 = S^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = S^2:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4: *Եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված զազաթից:*

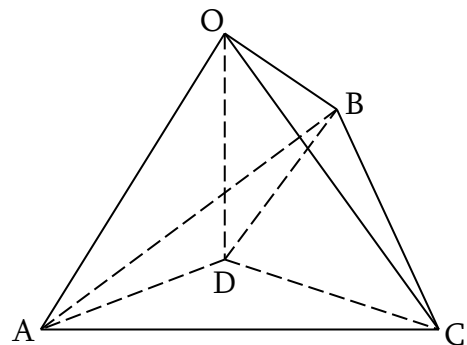
Թեորեմ 4-ն ուսուցվում է 9-րդ դասարանում:

Նախքան թեորեմ 4⁰-ին անցնելը սահմանենք տետրաէդրի միջնագիծ հասկացությունը:

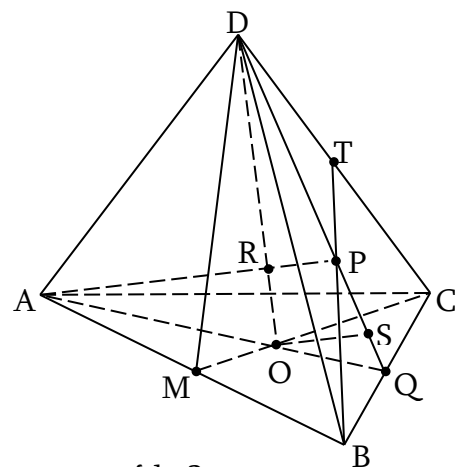
Սահմանում: *Տետրաէդրի զազաթը հանդիպակադ նիստի միջնագծերի հատման կետին միացնող հատվածը կոչվում է տետրաէդրի միջնագիծ:*

Թեորեմ 4⁰: *Տետրաէդրի միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում 3:1 հարաբերությամբ՝ հաշված զազաթից:*

Ապացուցում: Դիցուք տրված է $DABC$ տետրաէդրը, O -ն ABC եռանկյան ծանրության



նկ. 1



նկ. 2

կենտրոնն է, P -ն՝ BCD եռանկյան ծանրության կենտրոնը, R -ը՝ տետրանդրի DO և AP միջնագծերի հատման կետը (նկ.2):

Դիտարկենք ΔAQD : O և P կետերը տրոհում են ABC և BCD եռանկյան միջնագծերը 2:1 հարաբերությամբ: Յույց տանք, որ R կետը տրոհում է տետրանդրի DO և AP միջնագծերը 3:1 հարաբերությամբ:

AQD եռանկյան մեջ O կետից տանենք AP -ին զուգահեռ OS հատվածը: Այն կտրոհի PQ հատվածը 2:1 հարաբերությամբ: Եթե SQ -ն ընդունենք որպես միավոր հատված, ապա DP -ն հավասար կլինի 6-ի:

$$DR : RO = DP : PS = 6 : 2 = 3 : 1:$$

Հանգույնորեն ապացուցվում է, որ տետրանդրի B և C գագաթներից տարված միջնագծերը ևս տրոհում են DO միջնագիծը 3 : 1 հարաբերությամբ և հետևաբար անցնում են O կետով: Թեորեմն ապացուցված է:

Երբեմն եռանկյան վերաբերյալ խնդրի լուծումը հնարավոր է կիրառել տետրանդրի վերաբերյալ համապատասխան խնդիրը լուծելիս:

Խնդիր 1: ABC եռանկյան ներսում գտնվող M կետից տարված են BC , CA և AB կողմերին ուղղահայացներ, որոնց երկարությունները հավասար են համապատասխանաբար d_a , d_b և d_c : Ապացուցել, որ

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1$$

որտեղ h_a , h_b և h_c -ն ABC եռանկյան բարձրություններն են:

Լուծում: M կետը միացնենք ABC եռանկյան գագաթներին: $ABCM$, CAM , ABM և ABC եռանկյունների մակերեսները նշանակենք համապատասխանաբար S_1, S_2, S_3 և S (նկ.3):

Այդ դեպքում

$$S_1 = \frac{1}{2} a \cdot d_a, \quad S_2 = \frac{1}{2} b \cdot d_b, \quad S_3 = \frac{1}{2} c \cdot d_c \quad \text{և} \quad S = \frac{1}{2} a \cdot h_a:$$

Որտեղից կստանանք

$$\frac{S_1}{S} = \frac{d_a}{h_a}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{d_b}{h_b}, \quad \frac{S_3}{S} = \frac{d_c}{h_c}$$

Հաշվի առնելով, որ $S_1 + S_2 + S_3 = S$ և անդամ առ անդամ գումարելով այդ հավասարության բաղադրիչները կստանանք

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1 \quad (1)$$

Հետևանք 1: Եթե M կետը ABC եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնն է, ապա

$$d_a = d_b = d_c = r$$

և (1) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}:$$

Հետևանք 2: Եթե $h_a = h_b = h_c = h$, ապա $ah = bh = ch = 2S$ առնչություններից կստանանք, որ $a = b = c$: (1) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

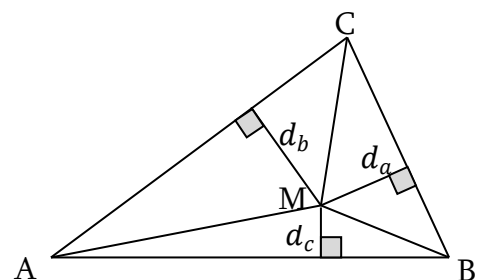
$$d_a + d_b + d_c = h:$$

Այսպիսով, հավասարակողմ եռանկյան ներսում գտնվող ցանկացած կետի հեռավորությունների գումարը եռանկյան կողմերից հաստատուն մեծություն է, որը հավասար է եռանկյան բարձրությանը:

Հետևանք 3: Դիցուք՝ $h_a < h_b < h_c$: Այդ դեպքում

$$\frac{d_a + d_b + d_c}{h_a} > 1 \quad \text{և} \quad \frac{d_a + d_b + d_c}{h_c} < 1:$$

Հետևաբար, ոչ հավասարակողմ եռանկյան ներսում գտնվող ցանկացած կետի հեռավորությունների գումարը եռանկյան կողմերից պարփակված է փոքրագույն և մեծագույն բարձրությունների միջև.



նկ. 3

$$h_a < d_a + d_b + d_c < h_c:$$

Խնդիր 2: $DABC$ տետրանդրի ներսում գտնվող M կետից տարված են BCD , CAD , ABD և ABC նիստերի հարթություններին ուղղահայացներ, որոնց երկարությունները հավասար են համապատասխանաբար d_1 , d_2 , d_3 և d_4 : Ապացուցել, որ

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1,$$

որտեղ h_1 , h_2 , h_3 և h_4 -ը տետրանդրի բարձրություններն են:

Լուծում: M կետը միացնենք $DABC$ տետրանդրի գագաթներին: $MDBC$, $MDAC$, $MDAB$, $MABC$ և $DABC$ տետրանդրների ծավալները նշանակենք համապատասխանաբար V_1 , V_2 , V_3 , V_4 և V (նկ.4):

Այդ դեպքում

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot d_1 \quad \square \quad V = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot h_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V} = \frac{d_1}{h_1}:$$

Հանգումորեն կստանանք.

$$\frac{V_2}{V} = \frac{d_2}{h_2}, \quad \frac{V_3}{V} = \frac{d_3}{h_3}, \quad \frac{V_4}{V} = \frac{d_4}{h_4}:$$

Հաշվի առնելով, որ $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$ և անդամ առ անդամ գումարելով այդ հավասարության բաղադրիչները կստանանք՝

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1 \quad (2)$$

Հետևանք 1: Եթե M կետը $DABC$ տետրանդրին ներգծյալ գնդային մակերևույթի կենտրոնն է, ապա

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = r$$

և (2) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}:$$

Հետևանք 2: Եթե $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, ապա $S_1 h = S_2 h = S_3 h = S_4 h = 3V$ առնչություններից կստանանք, որ $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$:

(2) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h$$

Հետևանք 3: Դիցուք՝ $h_1 < h_2 < h_3 < h_4$: Այդ դեպքում

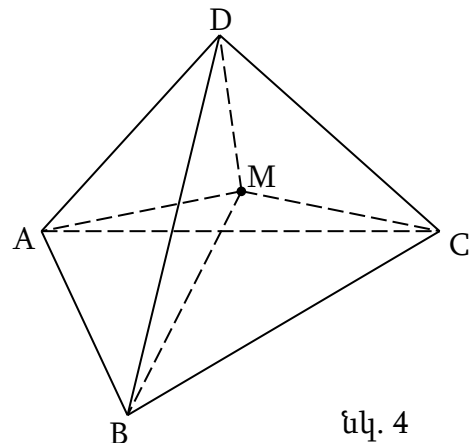
$$\frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{h_1} > 1 \quad \square \quad \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{h_4} < 1 \quad \Rightarrow \quad h_1 < d_1 + d_2 + d_3 + d_4 < h_4$$

Այսպիսով, տարածաչափական խնդրի լուծման որոնումը զգալիորեն հեշտացավ, երբ սկզբում դիտարկեցինք նմանատիպ հարթաչափական խնդիր: Սակայն պետք է հաշվի առնել, որ տետրանդրը ավելի բարդ պատկեր է, քան եռանկյունը և նրա հատկությունները ավելի բազմազան են: Հնարավոր է, որ անալոգիա չլինի: Դիտարկենք օրինակ:

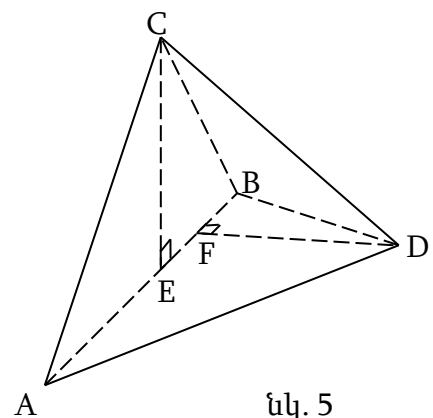
Թեորեմ 5: *Եռանկյան բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում:*

Թեորեմ 5-ն ուսուցվում է 8-րդ դասարանում:

Ըստ անալոգիայի, կարելի է ենթադրել, որ կամայական տետրանդրի բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) ևս հատվում են մի կետում:



նկ. 4



նկ. 5

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ ճիշտ չէ հետևյալ պնդումը. կամայական տետրանդրի բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում:

Լուծում: Տրված պնդումը պարունակում է ընդհանրության քվանտոր: Պնդումը հերքելու համար բավական է բերել հակաօրինակ:

Դիցուք՝ $ABCD$ -ն տետրանդր է, այնպես որ AB կողով երկնիստ անկյունը ուղիղ է (նկ.5): Այդ դեպքում տետրանդրի CE և DF բարձրությունները ABC և ABD եռանկյունների բարձրություններ են: Եթե $AC = BC$ և $AD = BD$, ապա E և F կետերը համընկնում են AB հատվածի միջնակետի հետ, այսինքն տետրանդրի CE և DF բարձրությունները հատվում են: Ընդ որում, տետրանդրի մյուս երկու բարձրությունները նրանց հատման կետով չեն անցնում: Իսկ եթե $AC = BC$, բայց $AD \neq BD$, ապա CE և DF բարձրությունները խաչվում են: Այսպիսով, հնարավոր է, որ տետրանդրի նույնիսկ երկու բարձրություններ ընդհանուր կետ չունենան:

Բայց և այնպես, գոյություն ունեն տետրանդրներ, որոնց բոլոր չորս բարձրություններն էլ հատվում են մի կետում: Այդպիսինն է, օրինակ, $ABCD$ տետրանդրը, որի D գագաթի բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են: DA, DB և DC կողերը նրա բարձրություններ են, որոնք հատվում են DD_1 չորրորդ բարձրության հետ D կետում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Кушнир И.А., Треугольник и тетраэдр в задачах. К.: Факт, 2004. -336 с.
2. Дорофеев Г. В.. О составлении циклов взаимосвязанных задач /Г. В. Дорофеев // Математика в школе. - 1983. № 6.
3. Наземнова Н.В. Аналогия в обучении учащихся приемам распознавания геометрических образов / Наземнова Н.В. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки.- 2010. № 4.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին

Լիլիթ Առաքելյան-ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս:

E-mail: lilit.rafael@yandex.com, Tel. +374 97 247492

Նորվածը տպագրության է նրաշխարհում խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյանը: