

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.3-441

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО СЛОЯ

Р.М.АВАКЯН, А.А.СААРЯН, С.С.ДЖИБИЛЯН

Поступила 25 мая 2023

В настоящей работе в рамках общей теории относительности исследуется движение светового сигнала и пробной частицы в поле бесконечного плоского слоя. Рассмотрены оба случая внешнего решения для гравитационного поля в вакууме, соответствующие метрикам Риндлера и Тауба. Определяются время движения и путь, пройденный частицей до ее остановки. Показано, что в геометрии Тауба, в отличие от светового сигнала, материальная частица не достигает сингулярности. Определено минимальное расстояние от сингулярности в зависимости от энергии частицы. Для сравнения приводятся результаты в рамках специальной теории относительности.

Ключевые слова: *плоско-симметричное гравитационное поле: метрика Тауба: метрика Риндлера*

1. *Введение.* Плоско-симметричные решения уравнений Эйнштейна играют важную роль в различных задачах гравитационной физики. В качестве примера отметим доменные стенки, разделяющие различные фазы физической системы. Они являются топологическими дефектами, которые могут образоваться в результате фазовых переходов в ранних стадиях расширения Вселенной (см., например, [1,2] и приведенные там ссылки). Другим примером являются браны в различных фоновых геометриях. В теории струн такие объекты являются фундаментальными составляющими наряду со струнами. В настоящее время широко обсуждаются также феноменологические модели с бранами в различных фоновых геометриях. В частности, ведутся активные исследования в рамках бран-моделей типа Рандалла-Сундрума с дополнительными пространственными измерениями в пространстве-времени анти-де Ситтера [3].

Наряду с решением Шварцшильда, плоско-симметричные вакуумные решения уравнений гравитационного поля в общей теории относительности являются одними из первых точных решений. Впервые такие решения рассматривались в работе [4]. В дальнейшем аналогичные решения в различных координатных системах исследовались во многих работах (см., например, [5-7] и приведенные в [5] ссылки). Важной составляющей рассмотренных задач являются решения гравитационного поля внутри плоскопараллельной пластины, которые сшиваются с внешним решением. В литературе рассмат-

ривались различные внутренние решения, которые включают нестатические решения, решения с космологической постоянной, а также решения с ненулевым электромагнитным полем (см. работы [5,8-23] и приведенные там ссылки). Они имеют интересные особенности, которые, несмотря на многочисленные работы, обсуждаются до сих пор.

Многие особенности поля гравитирующих масс проявляются в движении свободной частицы в соответствующей геометрии. В настоящей работе рассмотрено движение в плоскосимметричном гравитационном поле пластины. Статья построена следующим образом. В следующем разделе приведена постановка задачи и рассмотрено движение частицы в рамках специальной теории относительности (СТО). В разделе 3 рассматривается движение в однородном статическом гравитационном поле, описываемом метрикой Риндлера. Исследованию движения в гравитационном поле Тауба посвящен раздел 4. В разделе 5 подытожены основные результаты работы.

2. Решение в рамках СТО. Геометрия рассматриваемой задачи изображена на рис.1. Координатная плоскость $z=0$ совмещена с правой боковой поверхностью слоя. Поверхностная плотность массы равна σ , а распределение вещества в слое не зависит от координат x и y . Вначале рассмотрим задачу движения частицы в рамках СТО в неподвижной относительно слоя инерциальной системе отсчета. Из точки O в момент $t=0$ в направлении оси z вылетает частица со скоростью v_0 . Необходимо определить время t_n до полной остановки и пройденное за это время расстояние z_n . Для корректного сравнения во всех задачах предполагаются одинаковые значения поверхностной плотности σ и начальной скорости $v_0 = c\beta_0$ (c - скорость света в вакууме).

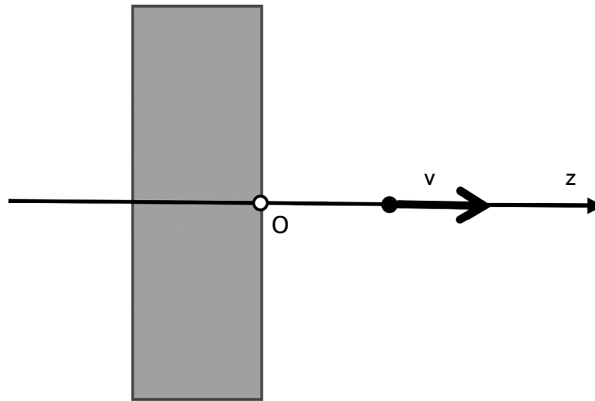


Рис.1. Геометрия задачи.

Если в качестве нулевого уровня принять плоскость $z=0$, то для потенциала поля будем иметь:

$$\phi = 2\pi k \sigma z = wz, \quad w = 2\pi k \sigma, \quad (1)$$

где k - гравитационная постоянная, величина w имеет размерность ускорения. О его смысле будет сказано позднее. В нерелятивистской механике частица совершает равнозамедленное движение и w есть модуль ускорения. За время $t'_n = v_0/w$ частица проходит путь $z'_n = v_0^2/2w$. В релятивистском случае движение в инерциальной системе не является равнозамедленным. Сила, действующая на частицу, направлена противоположно скорости и по модулю равна mw , где m - масса покоя частицы.

Релятивистский закон движения в инвариантной форме таков:

$$\frac{dP^i}{ds} = F^i, \quad i = 0, 3, \quad (2)$$

где $ds = cdt/\gamma$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, а $P^i = mcu^i$ импульс частицы. В обычных обозначениях уравнение с $i = 3$ в безразмерных величинах имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{P}{mc} = \frac{d}{dt} (\beta\gamma) = -\frac{w}{c} = -\frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{2\pi k \sigma}. \quad (3)$$

Здесь постоянная T имеет размерность времени. С учетом начальных условий ($t=0$, $\beta = \beta_0$) решение уравнения (3) будет $\beta\gamma = \beta_0\gamma_0 - t/T$, где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-\beta_0^2}$. Из условия $\beta=0$ найдем время движения до остановки: $t_n = T\beta_0\gamma_0 > t'_n$. Зависимость безразмерной скорости $\beta(t)$ определяется формулой

$$\beta = \frac{1}{c} \frac{dz}{dt} = \frac{\beta_0\gamma_0 - t/T}{\sqrt{1 + (\beta_0\gamma_0 - t/T)^2}}. \quad (4)$$

Отсюда с учетом $z=0$ при $t=0$, получим закон движения

$$\frac{z}{cT} = \gamma_0 - \sqrt{1 + \left(\beta_0\gamma_0 - \frac{t}{T}\right)^2}. \quad (5)$$

Подставив в (5) $t=t_n$, найдем максимальное значение z_n :

$$\frac{z_n}{cT} = \gamma_0 - 1 > \frac{\beta_0^2}{2} = \frac{z'_n}{cT}. \quad (6)$$

Отметим, что это выражение для z_n можно получить из (2) при $i = 0$ (закон сохранения энергии).

Остается выяснить смысл величины w . Отличные от нуля компоненты четырехмерной скорости имеют вид $u^0 = \gamma$, $u^3 = \beta\gamma$. Компоненты четырехмерного ускорения легко вычисляются и равны $w^0 = \beta\gamma^4\dot{\beta}/c^3$ и $w^3 = \gamma^4\dot{\beta}/c^2$, где точка означает производную по времени. Из инвариантности $w_i w^i$

получим $\gamma^6 \dot{\beta}^2 / c^2 = w^2$. Отсюда следует, что в каждый момент времени в инерциальной системе отсчета, относительно которой частица покоится, ускорение равно w . Такое движение частицы называется релятивистски равноускоренным.

3. *Движение в статическом однородном гравитационном поле в рамках ОТО.* Далее мы рассмотрим движение на фоне плоско-симметричного вакуумного решения уравнений Эйнштейна. Известно, что существуют два класса таких решений. Для решений из первого класса пространство-время является плоским в рассматриваемой области. В работе [24] было показано, что общий вид плоско-симметричного статического интервала с таким свойством имеет вид

$$ds^2 = f(z)c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - \left(\sqrt{f'(z)}/\alpha\right)^2 dz^2, \quad (7)$$

где α - постоянная, $f(z)$ - произвольная действительная функция, ограниченная только условием нерелятивистского предела $f(z) \approx 1 + 2\alpha z$. Автор статьи [24] называет такое поле статическим однородным гравитационным полем. В литературе в основном рассматривается частный случай $f(z) \approx (1 + 2\alpha z)^2$ с метрическим тензором, задаваемым линейным элементом

$$ds^2 = (1 + \alpha z)^2 c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (8)$$

и называемым также метрикой Риндлера. Линейный элемент (8) описывает часть пространства-времени Минковского в неинерциальной системе отсчета, совершающей релятивистское равноускоренное движение. Это является проявлением принципа эквивалентности. Метрика (8) является одной из популярных геометрий в квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени для исследования зависимости понятия вакуума квантового поля от системы отсчета. Вакуумное состояние, реализуемое модами квантового поля в метрике (8), отличается от вакуума инерциального наблюдателя в пространстве-времени Минковского и называется вакуумом Фуллинга-Риндлера. Локальные свойства этого вакуума при наличии равноускоренной плоской границы исследованы в работах [25-29].

Обозначим через (t_M, x_M, y_M, z_M) координаты пространства-времени Минковского в инерциальной системе отсчета K . Они связаны с риндлеровскими координатами соотношениями

$$ct_M = (z + 1/\alpha) \operatorname{sinh} \tau, \quad x_M = x, \quad y_M = y, \quad z_M = (z + 1/\alpha) \operatorname{cosh} \tau, \quad \tau = \alpha ct. \quad (9)$$

Заметим, что координаты (t, x, y, z) покрывают часть пространства-времени Минковского $z_M > |ct_M|$. В переменных Минковского для границы $z = 0$ имеем $z_M^2 - c^2 t_M^2 = 1/\alpha^2$. При фиксированных значениях x_M и y_M соответствующая мировая линия представляет гиперболу с асимптотами $x_M = \pm ct_M$.

Это соответствует равноускоренному движению в инерциальной системе отсчета с собственным ускорением $w = c^2/\alpha$.

Рассмотрим движение частицы на фоне геометрии (8). Пусть в момент $t=0$ из точки O движется частица вдоль оси z с начальной скоростью v_0 в инерциальной системе K . В этой системе для мировой линии частицы имеем $x_M = y_M = 0$, $z_M = 1/\alpha + \beta_0 ct_M$. Подставляя сюда ct_M и x_M из (9) для закона движения частицы в системе отсчета (8) получим

$$\alpha z(t) = \frac{1}{\cosh t - \beta_0 \sinh t} - 1. \quad (10)$$

Максимальное значение координаты z получается из условия $dz/dt = 0$. Для соответствующих значений времени $t = t_m$ и координаты $z = z_m$ имеем

$$\tanh(\alpha ct_m) = \beta_0, \quad z_m = \frac{\gamma_0 - 1}{\alpha}. \quad (11)$$

Закон движения теперь запишется в виде

$$\alpha z(t) = \frac{\cosh(\alpha ct_m)}{\cosh[\alpha c(t - t_m)]} - 1. \quad (12)$$

Отсюда следует, что функция $z(t)$ симметрична относительно $t = t_m$. Время движения частицы равно $2t_m$. В координатах пространства-времени Минковского максимальному удалению частицы от границы $z = 0$ соответствуют значения

$$ct_M^{(m)} = \frac{\gamma_0^2}{\alpha} \beta_0, \quad z_M^{(m)} = \frac{\gamma_0^2}{\alpha}. \quad (13)$$

Проекция скорости частицы, измеренная наблюдателем с фиксированными координатами (x, y, z) равна

$$v_{(p)} = \frac{dz}{dt_{(p)}} = \frac{1}{1 + \alpha z} \frac{dz}{dt} = c \tanh[\alpha c(t_m - t)]. \quad (14)$$

Модуль этой скорости всегда меньше скорости света.

Из формул (11) следует, что величины t_m и z_m являются монотонно возрастающими функциями начальной скорости частицы и стремятся к бесконечности в пределе $v_0 \rightarrow c$. В этом пределе для временной зависимости координаты z получим

$$z(t) = \frac{e^{\alpha ct} - 1}{\alpha}. \quad (15)$$

В этом случае определенная согласно (14) скорость равна скорости света. На рис.2 приведены графики функции (10) для различных значений параметра β_0 (числа возле кривых).

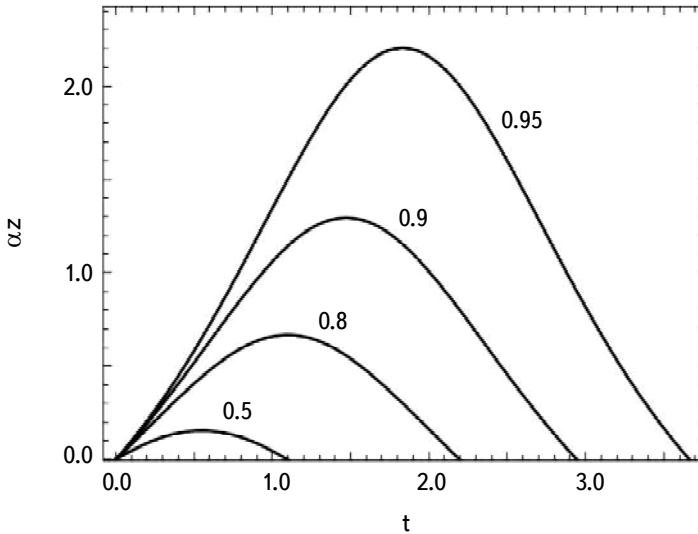


Рис.2. Зависимость координаты частицы от времени в метрике (8) для различных значений параметра β_0 (числа возле кривых).

4. *Движение в гравитационном поле Тауба.* В этом разделе рассмотрено движение на фоне второго класса плоско-симметричных решений уравнений Эйнштейна с искривленной геометрией. Свойства этих решений подробно обсуждались в литературе (см., например, приведенные во *Введении* ссылки). Переопределением координат линейный элемент (см. [4,6,7]) приводится к виду

$$ds^2 = \frac{c^2 dt^2}{\sqrt[3]{(1-z/z_s)^2}} - \sqrt[3]{(1-z/z_s)^4} (dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad (16)$$

где z_s - постоянная. Определяемая этим линейным элементом метрика обычно называется метрикой Тауба. Соответствующий тензор Римана R_{iklm} отличен от нуля и геометрия искривлена. Для инварианта тензора кривизны имеем $R_{iklm}R^{iklm} = 64(z_s - z)^{-4}/27$ и метрика сингулярна в точке $z = z_s$. Природа этой сингулярности широко обсуждалась в литературе (см., например, [5,20,21]).

Рассмотрим сначала распространение света вдоль направления z на фоне геометрии (16). Воспользуемся уравнением эйконала ψ в виде $g^{ik} \partial_i \psi \partial_k \psi = 0$, где $\partial_i = \partial / \partial x^i$. В рассматриваемом частном случае движения производные по x и y равны нулю и уравнение примет вид

$$\frac{1}{c^2} \sqrt[3]{(1-z/z_s)^2} (\partial_t \psi)^2 - (\partial_z \psi)^2 = 0. \quad (17)$$

Это уравнение не содержит время явным образом и производная ψ по времени равна со знаком минус сохраняющейся частоте ω_0 . Это позволяет сделать разделение переменных $\psi = -\omega_0 t + \psi_0(z)$. В итоге получим $\psi'_0(z) = (\omega_0/c) \sqrt[6]{(1-z/z_s)^2}$. После интегрирования имеем

$$\psi = -\omega_0 t - s(z) \frac{3\omega_0 z_s}{4c} \sqrt[3]{(1-z/z_s)^4} + \text{const}, \quad (18)$$

где $s(z) = \text{sgn}(1-z/z_s)$. Зависимость $z = z(t)$ получаем из уравнения $\partial\psi/\partial\omega_0 = \text{const}$:

$$\frac{z}{z_s} = 1 - s(z) \left[4s(z)c \frac{t_0 - t}{3z_s} \right]^{3/4}, \quad s(z)c \frac{t_0 - t}{3z_s} > 0. \quad (19)$$

Заметим, что точка сингулярности соответствует конечному моменту времени $t = t_0$. Проекция скорости, измеренная наблюдателем с фиксированными координатами (x, y, z) , определяется формулой

$$v_{(p)} = \sqrt[6]{(1-z/z_s)^2} \frac{dz}{dt}, \quad (20)$$

и по модулю всегда равна c . Общая формула (19) включает различные частные случаи, включая положительные и отрицательные значения параметра z_s .

Рассмотрим, например, случай, когда границе плоскопараллельного материального слоя соответствует $z = L$, где $L < z_s$ и $z_s > 0$. Полагая, что световой сигнал выходит из точки $z = L$ в момент времени $t = 0$ из (19), находим момент времени, когда сигнал достигнет сингулярности

$$t_0 = \frac{3z_s}{4c} \left(1 - \frac{L}{z_s} \right)^{4/3}. \quad (21)$$

Перейдем теперь к задаче движения материальной частицы с массой покоя m . Воспользуемся уравнением Гамильтона-Якоби

$$\frac{1}{c} \sqrt[3]{(1-z/z_s)^2} (\partial_t S)^2 - (\partial_z S)^2 = m^2 c^2, \quad (22)$$

где S - действие. Здесь учтено, что компоненты импульса P_x и P_y равны нулю. Уравнение (22) не содержит время явным образом. Это позволяет сделать разделение переменных. Частная производная действия по времени - это сохраняющаяся энергия E и поэтому $S = -Et + S_0(z)$. Уравнение для функции $S_0(z)$ следует из (22). После интегрирования действие запишется в виде

$$S = -Et + \int dz \sqrt{\frac{E^2}{c^2} \left(1 - \frac{z}{z_s} \right)^{2/3} - m^2 c^2}. \quad (23)$$

Продифференцировав S по энергии и приравняв результат постоянной, получим зависимость $z = z(t)$. В параметрическом виде эта зависимость дается соотношениями

$$\frac{z}{z_s} = 1 - \frac{s(z)}{\gamma^3} y^3, \quad (24)$$

$$t - t_0 = -\frac{9s(z)z_s}{8c\gamma^4} \left[y \left(1 + \frac{2}{3} y^2 \right) \sqrt{y^2 - 1} + \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) \right],$$

где параметром является величина $y \geq 1$ и $\gamma = E/mc^2$. Для скорости частицы, определяемой согласно (20), получим

$$v_{(p)} = c \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}. \quad (25)$$

Из формулы (24) следует, что материальная частица никогда не падает на сингулярность. Минимальное расстояние соответствует моменту времени $t = t_0$, когда $y = 1$. Расстояние от сингулярности равно $|z - z_s|_{min} = z_s/\gamma^3$ и оно уменьшается с ростом энергии частицы.

Рассмотрим предельные случаи общей формулы (24). При заданном γ и для $c|t - t_0|/z_s \ll 1$ имеем

$$\frac{z}{z_s} \approx 1 - \frac{s(z)}{\gamma^3} - s(z) \frac{\gamma^5}{6} \left(c \frac{t - t_0}{z_s} \right)^2, \quad v_{(p)} \approx -\gamma^4 \frac{c^2 (t - t_0)}{3s(z)z_s}. \quad (26)$$

При $s(z) = -1$ и $c|t - t_0|/z_s \gg 1$ асимптотическое поведение имеет вид

$$\frac{z}{z_s} \approx \left(\frac{4c}{3} \frac{t - t_0}{z_s} \right)^{3/4}, \quad v_{(p)} \approx c \left[1 - \frac{1}{4\gamma^2} \left(c \frac{t - t_0}{3z_s} \right)^{-1/2} \right]. \quad (27)$$

Для больших значений γ и y , при фиксированном значении отношения y/γ , в первом приближении получим

$$\frac{z}{z_s} \approx 1 - s(z) \left[4s(z)c \frac{t_0 - t}{3z_s} \right]^{3/4}. \quad (28)$$

Этот результат совпадает с точной формулой (19) для движения светового сигнала. Этого, конечно, следовало ожидать для ультрарелятивистских частиц.

На рис.3 и 4 приведены зависимости координаты частицы от времени для различных значений параметра γ (энергия частцы в единицах энергии покоя). Числа около кривых соответствуют значениям этого параметра. Пунктирные линии соответствуют распространению светового сигнала. Рис.3 и 4 представляют случаи $z < z_s$ и $z > z_s$, соответственно.

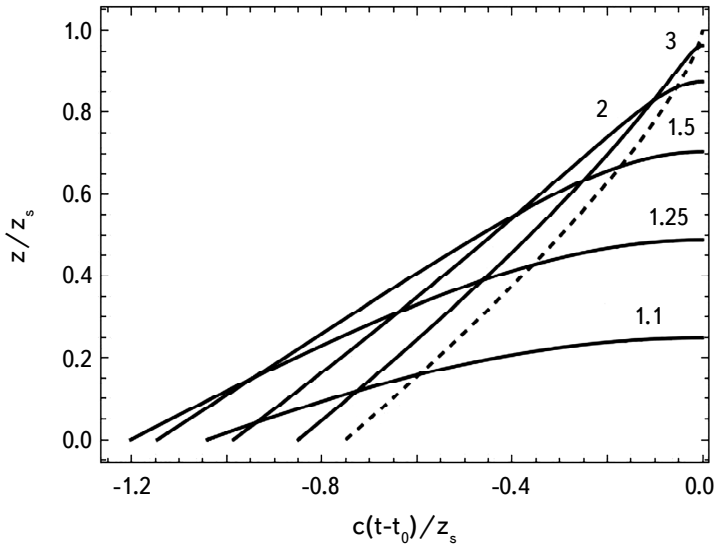


Рис.3. Зависимость координаты частицы от времени в геометрии (16) с $z < z_s$ для различных значений параметра γ (числа около кривых).

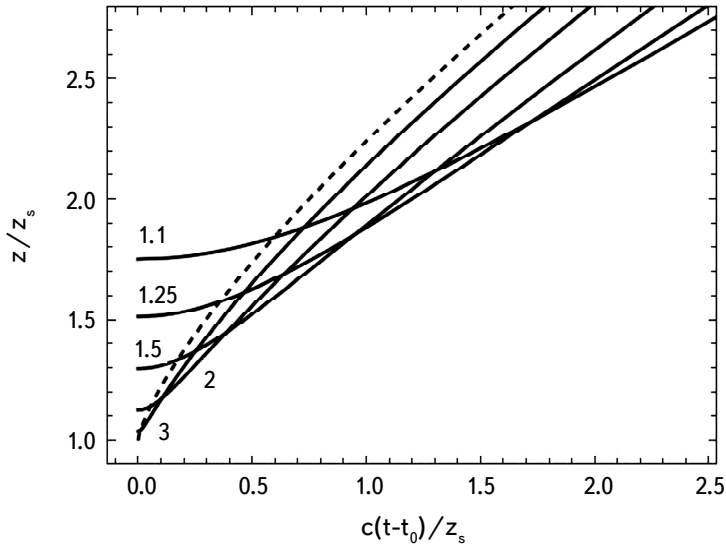


Рис.4. То же самое, что и на рис.3 при $z > z_s$.

5. *Заключение.* В работе исследовано движение светового сигнала и материальной частицы в поле бесконечного плоского слоя. Для сравнения сначала рассмотрено движение в рамках СТО, где сила, действующая на частицу, описывается потенциалом (1). Временные зависимости скорости и

координаты частицы даются формулами (5) и (6), где величина T определяется поверхностной плотностью слоя и связана с собственным ускорением соотношением $T = c/w$.

В геометрии плоского бесконечного слоя возможны два класса вакуумных решений уравнений Эйнштейна. Первый из них соответствует однородному статическому гравитационному полю, описываемому метрикой (8), частной реализацией которого является метрика Риндлера (9). Последний соответствует части пространства-времени Минковского, описываемой в равноускоренной неинерциальной системе отсчета. В этой геометрии временные зависимости координаты и скорости частицы, измеренные наблюдателем с фиксированными координатами (x, y, z) , даются соотношениями (12) и (14), где $t = t_m$ соответствует времени максимального удаления частицы от границы слоя. В отличие от материальной частицы, координата z для светового сигнала является монотонно возрастающей функцией времени и описывается формулой (15). Второму классу вакуумного гравитационного поля плоского слоя в ОТО соответствует решение Тауба, которое переопределением координат приводится к виду (16), где параметр z_s определяется поверхностной плотностью слоя. Распространение светового сигнала в этой геометрии описывается формулой (19) и за конечное время сигнал достигает точки сингулярности. Для материальной частицы с сохраняющейся энергией $E = \gamma mc^2$ закон движения дается параметрической формулой (24). Частица никогда не достигает сингулярности и минимальное расстояние равно z_s/γ^3 .

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории теоретической физики Института физики ЕГУ, финансируемой комитетом по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения. Работа Р.М.Авакяна и А.А.Сааряна выполнена в рамках программы 21AG-1C047 комитета по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения.

Институт физики, Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: rolavag@ysu.am saharian@ysu.am jibilyan2014@gmail.com

MOTION OF A PARTICLE IN THE FIELD OF
AN INFINITE FLAT SLAB

R.M.AVAGYAN, A.A.SAHARIAN, S.S.JIBILYAN

In this paper we investigate the motion of a light signal and a test particle in the field of an infinite flat slab within the framework of the general relativity. Both cases of the external solution for the gravitational field in the vacuum, corresponding to the Rindler and Taub metrics, are considered. The time of motion and the path traveled by the particle before it stops are determined. It is shown that in the Taub geometry, in contrast to the light signal, a material particle does not reach a singularity. The minimum distance from the singularity is determined depending on the energy of the particle. For comparison, results are given within the framework of the special relativity.

Keywords: *plane symmetric gravitational field: Taub metric: Rindler metric*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Vilenkin, E.P.S.Shellard*, Cosmic strings and other topological defects, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1994.
2. *M.Cvetiu, S.Griffies, H.H.Soleng*, Phys. Rev. D, **48**, 2613, 1993.
3. *R.Maartens, K.Koyama*, Living Rev. Relativity, **13**, 5, 2010.
4. *T.Levi-Civita*, Atti Accad. Naz. Rend., **27**, 240, 1918.
5. *P.A.Amundsen, Ø.Grøn*, Phys. Rev. D, **27**, 1731, 1983.
6. *E.Kasner*, Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 155, 1925.
7. *A.H.Taub*, Ann. Math., **53**, 472, 1951.
8. *A.H.Taub*, Phys. Rev., **103**, 454, 1956.
9. *R.Tabensky, A.H.Taub*, Commun. Math. Phys., **29**, 61, 1973.
10. *J.S.Shikin*, Gen. Relativ. Gravit., **433**, 411, 1979.
11. *R.M.Avakyan, J.Horský*, Astrophysics, **11**, 454, 1975.
12. *J.Horský, E.V.Chubaryan, V.V.Papoyan*, Bull. Astron. Inst. Czech. **27**, 115, 1976.
13. *J.Horský, E.V.Chubaryan*, Bull. Astron. Inst. Czech., **27**, 133, 1976.
14. *G.G.Arutyunyan, Ya.Gorskii, E.V.Chubaryan*, Astrophysics, **12**, 77, 1976.
15. *J.Novotný, J.Kuopera, J.Horský*, Gen. Rel. Grav., **19**, 1195, 1987.
16. *A.D.Dolgov, I.B.Khriplovich*, Gen. Rel. Grav., **21**, 13, 1989.
17. *M.L.Bedran, M.O.Calvão, F.M.Paiva et al.*, Phys. Rev. D, **55**, 3431, 1997.
18. *R.M.Avakyan, E.V.Chubaryan, A.H.Yeranyan*, arXiv:gr-qc/0102030.

19. *H.Zhang, H.Noha, Z.-H.Zhu*, Phys. Lett. B, **663**, 291, 2008.
20. *P.Jones, G.Muñoz, M.Ragsdale et al.*, Am. J. Phys., **76**, 73, 2008.
21. *S.A.Fulling, J.D.Bouas, H.B.Carter*, Phys. Scr., **90**, 088006, 2015.
22. *A.J.Silenko, Yu.A.Tsalkou*, Int. J. Mod. Phys. A, **34**, 1950228, 2019.
23. *A.Yu.Kamenshchik, T.Vardanyan*, Phys. Lett. B, **792**, 430, 2019.
24. *F.Rohrlich*, Ann. Phys., **22**, 169, 1963.
25. *P.Candelas, D.Deutsch*, Proc. R. Soc. London, **A354**, 79, 1977.
26. *A.A.Saharian*, Class. Quantum Grav., **19**, 5039, 2002.
27. *R.M.Avagyan, A.A.Saharian, A.H.Yeranyan*, Phys. Rev. D, **66**, 085023, 2002.
28. *A.A.Saharian, R.S.Davtyan, A.H. Yeranyan*, Phys. Rev. D, **69**, 085002, 2004.
29. *A.A.Saharian, R.M.Avagyan, R.S.Davtyan*, Int. J. Mod. Phys. A, **21**, 2353, 2006.