ՀՏԴ 513.813
Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ
ԱրՊՀ, ֆ.մ.գ.թ., մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ
e-mail: Gurgen250612@mail.ru

ԳԵՈԴԵԶԻԿ ԳԾԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ V^n ՌԻՄԱՆՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ուսումնասիրված են V^n ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա գեոդեզիկ գծերի հատկությունները մակերևույթի վրա վեկտորի զուգահեռ տեղափոխման տեսանկյունից: Ապացուցված է, որ որպեսզի L կորը մակերևույթի վրա լինի գեոդեզիկ գիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ L կորի յուրաքանչյուր կետում կամ գեոդեզիկ կորությունը հավասար լինի զրոյի, կամ գլխավոր նորմալը լինի կոլինյար մակերևույթի նորմալին, և ռեգուլյար մակերևույթի յուրաքանչյուր կետով, և ցանկացած ուղղությամբ կարելի է տանել միայն ու միայն մեկ գեոդեզիկ գիծ: Ապացուցված է, որ եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի գեոդեզիկ օրթոգոնալ ցանց, ապա այդ մակերևույթի գաուսյան կորությունը հավասար է զրոյի: Ուսումնասիրված են գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումները ինչպես երկչափ մակերևույթի, այնպես էլ n -չափանի մակերևույթի համար:

Բանալի բառեր: *ռիմանյան տարածություն, թենզոր, գեոդեզիկ գիծ, օրթոգոնալ ցանց, կանոնական պարամետր, Քրիստոֆելի գործակիցներ, դերիվացիոն բանաձևեր, գաուսյան կորություն, գլխավոր նորմալ, մակերևույթի նորմալ:*

Г. Налбандян

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ V^n

Изучены свойства геодезических линий в римановом пространстве V^n с точки зрения параллельного переноса вектора на поверхностьи. Доказано, что для того чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы или кривизна геодезической линии была равна нулю, или главная нормаль была параллельна нормали поверхности, и что в любой точке регулярной поверхности проходит только одна и лишь одна геодезическая линия по данному направлению. Доказано, что если на поверхности существует геодезическая ортогональная сеть, тогда кривизна гаусса поверхности равна нулю. Изучены дифференциальные уравнения геодезических линий *как для двумерных пространств, так и для n -мерных пространств.*

Ключевая слова: *риманово пространство, тензор, геодезическая линия, ортогональная сеть, канонический параметр, коэффициенты Кристоффеля, деривационные формулы, кривизна гаусса, главная нормаль, нормаль поверхности.*

G. Nalbandyan

SOME PROPERTIES OF GEODESIC LINES IN A RIEMANNIAN SPACE V^n

Using a parallel transfer of a vector on the surface the properties of geodesic lines in a Riemannian space V^n are studied. It is proved that in order to be a geodesic line it is necessary and sufficient that the curve on the surface should be either equal to zero or main normal should be equal to a surface normal and there is only one geodesic line that passes in this direction at any point in the regular surface. It is proved that if an orthogonal net exists on the surface, then the Gaussian curvature will be equal to zero. The differential equation of geodesic lines both two-dimensional and for n-dimensional spaces is using

Key words: *Riemannian space, tensor, a geodesic line, orthogonal net, canonical parameter, Christoffel coefficients, derivational formulas, the Gaussian curvature, main normal, a surface normal.*

Դիտարկենք V^n ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա՝ գեոդեզիկ գծերը և փորձենք պարզաբանել նրանց հատկությունները մակերևույթի վրա վեկտորի զուգահեռ տեղափոխման տեսանկյունից: Ինչպես հայտնի է, դիֆերենցելի W_n բազմաձևությունը անվանում են V^n ռիմանյան տարածություն, եթե նրա վրա տրված է $g_{ik}(M)=g_{ik}(x^1,x^2,...,x^n)$ թենզոր՝ երկու անգամ կովարիանտ, սիմետրիկ և չվերասերվող:

Դիցուք տրված է $u^i=u^i(t)$, $a\le t\le b$ կորը V^n ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա, և տրված է $v^i=v^i(t)$ վեկտորը: Կասենք, որ $v^i=v^i(t)$ վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում $u^i=u^i(t)$ կորի երկայնքով կամ ուղղությամբ, եթե վեկտորի կոորդինատները բավարարում են ՝

$$\frac{dv^k}{dt}+\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{dt}v^j=0 \tag{1}$$

$i,j,k=\overline{1,n}$ պայմաններին:

Ինչպես հայտնի է, մակերևույթի վրա կորը կոչվում է գեոդեզիկ գիծ, եթե այդ կորի շոշափող վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում կորի երկայնքով: Եթե կորը տրված է $u^i=u^i(t)$ տեսքով, ապա նրա շոշափող վեկտորը կլինի՝ $\dfrac{du^i(t)}{ds}$ $([2])$:

Հետևաբար, եթե վերցնենք $v^i=\dfrac{du^i}{ds}$, ապա (1) կունենա հետևյալ տեսքը ՝

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0, \qquad (2)$$

որտեղ $i, j, k=1,2,3,\ldots,n$: (2) –ը անվանում են գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Ինչպես հայտնի է այն ունի միակ լուծում, որը բավարարում է Կոշու նախնական պայմաններին՝ $s=s_0; u^i=a^i$; $\frac{du^i}{ds}=b^i$, որտեղ գոնե մեկ b^i տարբեր է զրոյից $([2])$:

Դիցուք V^n ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա $x^i=x^i(t),\ a\le t\le b$ գեոդեզիկ գծով $v^i=v^i(t)$ վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում, դա նշանակում է, որ $\frac{dx^i}{dt}=\lambda v^i$, որտեղ $\lambda=\lambda(t)$ կախված է միայն կետի դիրքից կորի վրա:

Ցանկության դեպքում կարելի է անցնել այնպիսի τ պարամետրի, որ գեոդեզիկ գծի երկայնքով գործակիցը ընդունի $\lambda=1$ արժեք: Իրոք, եթե վերցնենք $\tau=\int\lambda(t)dt$ այդ դեպքում $d\tau=\lambda(t)dt$, ուրեմն

$$\frac{dx^i}{d\tau}=\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\lambda v^i\frac{1}{\lambda}=v^i,$$

կամ

$$\frac{dx^i}{d\tau}=v^i : \qquad (3)$$

Եթե գեոդեզիկ գծի երկայնքով վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում և ունի (3) տեսքը, ապա τ պարամետրն անվանում են կանոնական պարամետր: Ինչպես նշվեց միշտ հնարավոր է անցնել կանոնական պարամետրի: Պետք է նշել, որ կանոնական պարամետրն ընտրվում է հաստատունի ճշտությամբ $([5])$:

Դիցուք $x^i=x^i(\tau), \alpha\le\tau\le\beta$ գեոդեզիկ գծի պարամետրական հավասարումն է: Այժմ պահանջենք, որ $\frac{dx^i}{d\tau}$ վեկտորը զուգահեռ տեղափոխվի նշված կորի երկայնքով: Օգտվելով վեկտորի զուգահեռ տեղափոխման (1) բանաձևից և (3) տեսքից, կունենանք՝

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=0, \qquad (4)$$

որտեղ $i, j, k=\overline{1,n}$: Ստացվեց երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որը (2) տեսքից տարբերվում է միայն, որ τ -ն կանոնական պարամետր է: Ինչպես նշել ենք, այս համակարգն ունի միշտ լուծում, այսինքն $x^i(\tau)$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաները կորոշվեն միարժեքորեն:

Ուրեմն, մակերևույթի վրա միշտ գոյություն ունեն գեոդեզիկ գծեր: Այսինքն, երկրաչափական տեսանկյունից դա նշանակում է, որ մակերևույթի տվյալ $A(a^i)$

սովորական կետով և նախորոք նշված b^i շոշափող վեկտորի ուղղությամբ կարելի է տանել միայն ու միայն մեկ գեոդեզիկ գիծ $\left([1],[2],[6]\right)$:

Թեորեմ 1: Մակերևույթի կամայական գեոդեզիկ գծի համար, որն որոշվում է (4) համակարգով, գոյություն ունեն սիմետրիկ կապակցության գործակիցներ, որոնք ևս նկարագրում են այդ նույն գեոդեզիկ գիծը:

Ապացույց: Դիցուք մակերևույթի վրա նշված գեոդեզիկ գիծը որոշվում է (4) համակարգով, այսինքն՝ հայտնի են Γ_{ij}^k կապակցության գործակիցները: Կազմենք նոր սիմետրիկ կապակցության գործակիցները հետևյալ կերպ՝

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k\right):$$

Իրոք, այն սիմետրիկ է ըստ ներքևի ինդեքսների և հանդիսանում է կապակցության գործակիցների կիսագումար, հետևաբար կլինեն կապակցության գործակիցներ: Այժմ գրենք դիֆերենցիալ հավասարումները Γ_{ij}^k և Γ_{ji}^k կապակցության գործակիցների համար, այսինքն

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ji}^k \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}:$$

Այս երկու դիֆերենցիալ հավասարումները իրար գումարելով , կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ և բաժանելով երկուսի վրա, կստանանք

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k\right)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = -\tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}:$$

Իսկ դա փաստորեն նշանակում է, որ նոր $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ կապակցության գործակիցներով որոշվող դիֆերենցիալ հավասարումները կհանդիսանան տրված նույն գեոդեզիկ գծի դիֆերենցիալ հավասարումները: Այսպիսով, Γ_{ij}^k կապակցության և նոր $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ սիմետրիկ կապակցության գործակիցներով որոշվում են միևնույն գեոդեզիկ գիծը մակերևույթի վրա:

Թեորեմ 2: Մակերևույթի վրա ոչ իզոտրոպ գեոդեզիկ գծի s (կամ σ) աղեղի երկարությունը հանդիսանում է կանոնական պարամետր, իսկ մնացած τ կանոնական պարամետրերը կտարբերվեն միայն նրանից հաստատուն արտադրիչով:

Ապացույց: Դիցուք մակերևույթի վրա $x^i = x^i\left(s\right), \alpha \le s \le \beta$ ոչ իզոտրոպ գեոդեզիկ գծի պարամետրական հավասարումն է: Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, $\dfrac{dx^i}{ds}$ կլինի միավոր շոշափող վեկտորը գեոդեզիկ գծի որևէ կետում տարված, և զուգահեռ է տեղափոխվում այդ գծի երկայնքով:

Համաձայն գեոդեզիկ գծի սահմանման՝ այն կմնա շոշափող և պահպանում է միավոր երկարությունը համաձայն ռիմանյան կապակցության հատկության: Այսինքն մնում է $\dfrac{dx^i}{ds}$ տեսքի, իսկ դա նշանակում է, որ s աղեղի երկարությունը հանդիսանում է կանոնական պարամետր: ՈՒրեմն, տեղի ունի (2) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը:

Եթե կորի աղեղի երկարությունը կեղծ է, այսինքն՝ $s = \sigma i$, ապա որպես պարամետր կարելի է դիտարկել σ-ն: Այդ դեպքում $\frac{dx^i}{d\sigma}$-ն նմանատիպ $\frac{dx^i}{ds}$-ի ևս կլինի այդ գծի երկայնքով զուգահեռ տեղափոխվող շոշափող վեկտոր՝ ոչ թե միավոր երկարությամբ, այլ կեղծ միավոր երկարությամբ: ՈՒրեմն σ պարամետրը կլինի կանոնական և տեղի կունենա (2) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը, միայն փոխելով s-ը σ-ով:

Նշենք, որ սեփական ռիմանյան տարածությունում բոլոր գեոդեզիկ գծերը իրական են՝ ոչ իզոտրոպ են և ունեն իրական աղեղի երկարություն, այսինքն միշտ կարելի է վերցնել աղեղի երկարությունը որպես կանոնական պարամետր այդ գծի երկայնքով:

Ինչպես հայտնի է, $\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^2 \vec{r}_2 + b_{ij}\vec{m}$, $(i, j = 1,2)$ բանաձևերը անվանում են I -խմբի Գաուսի դերիվացիոն բանաձևեր: Այս բանաձևերում Γ_{ij}^k գործակիցները կոչվում են կապակցության գործակիցներ, կամ Քրիստոֆելի գործակիցներ, որոնք հաշվում են հետևյալ կերպ ([1])

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right): \qquad (5)$$

Ինչպես գիտենք, եթե A մատրիցան ունի հետևյալ տեսքը $A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, ապա նրա հակադարձ մատրիցան կլինի՝ $A^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{21} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}$, որտեղ

$$g^{ks} = (-1)^{k+s} \frac{g_{ks}}{\det A}, \qquad (6)$$

իսկ $\det A = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, ([1]):

Ինչպես հայտնի է, գեոդեզիկ կորություն է կոչվում կորության վեկտորի պրոյեկցիան շոշափող հարթության վրա, իսկ S մակերևույթի գեոդեզիկ գիծ է կոչվում այն կորը, որի յուրաքանչյուր կետում գեոդեզիկ կորությունը հավասար է զրոյի ([4])

Նշենք գեոդեզիկ գծերի երկու կարևոր հատկություններ, որոնք անհրաժեշտ են հետագայում՝

1. Որպեսզի L կորը մակերևույթի վրա լինի գեոդեզիկ գիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ L կորի յուրաքանչյուր կետում կամ գեոդեզիկ կորությունը հավասար լինի զրոյի, կամ գլխավոր նորմալը լինի կոլինյար մակերևույթի նորմալին:

2. Ռեգուլյար մակերևույթի յուրաքանչյուր կետով և ցանկացած ուղղությամբ կարելի է տանել միայն ու միայն մեկ գեոդեզիկ գիծ:

Ինչպես նշեցինք գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումներն են ([1])

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{ij}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^j}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{ij}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^j}{ds} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

որտեղ i,j=1,2:

Մակերևույթը, որը հանդիսանում է ուղիղ գծերի երկրաչափական տեղ, կոչվում է գծավոր մակերևույթ՝ ծնիչ գծերով: Եթե գծավոր մակերևույթի միևնույն ծնիչ գծի բոլոր կետերում մակերևույթի շոշափող հարթությունները համընկնում են, ապա մակերևույթն անվանում են փռվող մակերևույթ:

Թեորեմ 3: Եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի գեոդեզիկ օրթոգոնալ ցանց, ապա այդ մակերևույթի գաուսյան կորությունը հավասար է զրոյի:

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $\bar{r} = \bar{r}\left(U^1, U^2\right)$ մակերևույթի վրա գոյություն ունի գեոդեզիկ օրթոգոնալ ցանց, այսինքն ցանցի երկու գծերն էլ գեոդեզիկ են և իրար օրթոգոնալ: Նպատակահարմար է այդ ցանցը ընդունենք որպես կորագծային կոորդինատային ցանց:

Քանի որ այդ դեպքում կորագծային կոորդինատային ցանցի U^1 գծերը գեոդեզիկ են, և հետևաբար պետք է բավարարեն (7) դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Ինչպես գիտենք ցանցի I ընտանիքի գծերի հավասարումն է՝

$$\begin{cases} U^1 = t, \\ U^2 = U^{0^2} = const: \end{cases} \tag{8}$$

(8) –ից $U^2 = const$ արժեքը տեղադրենք (7) - ի երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\frac{d^2U^2}{ds^2} + \Gamma^2_{11}\frac{dU^1}{ds}\frac{dU^1}{ds} + 2\Gamma^2_{12}\frac{dU^1}{ds}\frac{dU^2}{ds} + \Gamma^2_{22}\frac{dU^2}{ds}\frac{dU^2}{ds} = 0,$$

բայց ակնհայտ է, որ $\dfrac{d^2U^2}{ds^2} = \dfrac{dU^2}{ds} = 0,$ հետևաբար՝ $\Gamma^2_{11}\left(\dfrac{dU^1}{ds}\right)^2 = 0$: Հաշվի առնելով, որ $\dfrac{dU^1}{ds} \neq 0,$ ապա կստանանք՝

$$\Gamma^2_{11} = 0, \tag{9}$$

(9) –ը տեղադրենք (5) –ի մեջ կստանանք, որ

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{2s}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1s}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^s}\right) = 0:$$

Եթե այն գրենք բացված տեսքով, ապա կունենանք՝

$$\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right) = 0: \tag{10}$$

Հաշվի առնելով, որ ցանցը օրթոգոնալ է, այսինքն՝

$$g_{12}=0, \tag{11}$$

և մյուս կողմից նկատի առնելով (6) բանաձևը, կստանանք՝

$$g^{21}=0: \tag{12}$$

Եթե (11) և (12) արժեքները տեղադրենք (10)–ի մեջ, ապա կստանանք՝

$$\frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)=0:$$

Բայց $g^{22}\neq 0$, հետևաբար՝

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=0: \tag{13}$$

Կատարելով նմանատիպ դատողություններ II ընտանիքի գծերի համար՝ այսինքն

$$\begin{cases} U^1=U^{0^1}=const, \\ U^2=t, \end{cases}$$

գծերի համար, կստանանք՝

$$\Gamma^1_{22}=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=0: \tag{15}$$

Ինչպես հայտնի է, մակերևույթի գաուսյան կորության բանաձևն է

$$\mathrm{K}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}: \tag{16}$$

Այժմ օգտվենք Գաուսի թեորեմից ([1])

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}g_{11}+2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}g_{12}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}g_{22}-$$
$$-\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}g_{11}-\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{22}g_{12}-\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}g_{21}-\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}g_{22}: \tag{17}$$

Հաշվի առնելով $(9),(11)-(15)$ պայմանները, (17) -ից կստանանք՝

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}g_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}g_{22}: \tag{18}$$

Այժմ օգտվենք (5) բանաձևից, կստանանք

$$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}g^{1s}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{2s}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^s}\right)=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right): \tag{19}$$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{1}{2}g^{2s}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{2s}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^s}\right)=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right): \tag{20}$$

Հաշվի առնելով $(9),(11)-(15)$ պայմանները (19)-ից և (20) -ից կստանանք՝

$$\Gamma^1_{12}=0,\quad \Gamma^2_{12}=0: \tag{21}$$

Հաշվի առնելով (21) պայմանը՝ (18) –ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=0:$$

ՈՒրեմն (16) -ից կստանանք

$$K=0:$$

Բերենք օրինակ, որը հիմնավորում է թեորեմ 3-ի կիրառությունը:

Օրինակ: Վերցնենք $x^2+y^2=R^2$ փռվող գլանային մակերևույթի վրա պտուտակային գծերը, որոնք իրարից տարբերվում են միայն պտտման ուղղությամբ: Ինչպես հայտնի է, դրանց վեկտորական պարամետրական հավասարումներն են՝

$$\vec{r}_1(t)=(R\cos\omega t)\vec{i}+(R\sin\omega t)\vec{j}+(at)\vec{k},$$

$$\vec{r}_2(t)=(-R\cos(\omega t))\vec{i}+(-R\sin(\omega t))\vec{j}+(at)\vec{k}$$

Գծագրից պարզ երևում է, որ կորի $\overline{n}$ գլխավոր նորմալը կոլինյար է մակերևույթի $\overline{m}$ նորմալին, և համաձայն (1) հատկության, այդ գծերը կլինեն գեոդեզիկ գծեր $([6])$:

Այժմ տանք այլ մաթեմատիկական ապացույց: Հաշվենք այդ կորերի շոշափողները՝

$$\vec{r}_1'(t)=(-\omega R\sin\omega t)\vec{i}+(\omega R\cos\omega t)\vec{j}+a\vec{k},$$

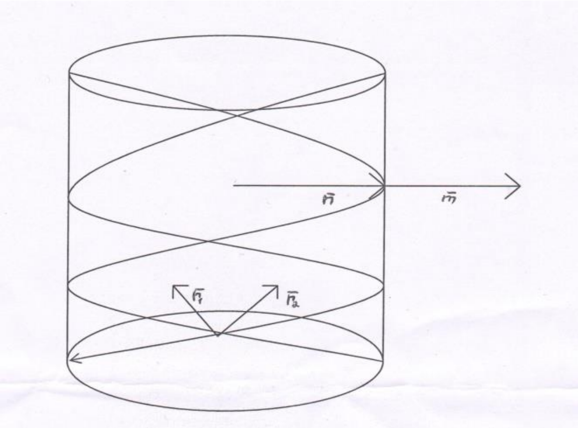
$$\vec{r}_2'(t)=(\omega R\sin(\omega t))\vec{i}+(-\omega R\cos(\omega t))\vec{j}+a\vec{k}$$

և պահանջենք, որ լինեն իրար օրթոգոնալ, այսինքն

$$\left(\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2'(t)\right)=-\omega^2R^2+a^2=0:$$

Այս հավասարումից կստանանք՝

$$\omega=\pm\frac{a}{R}: \tag{22}$$



Հետևաբար, բավական է պտտման անկյունը վերցնել (22) տեսքի, որպեսզի նշված կորերը լինեն օրթոգոնալ գեոդեզիկ գծեր նշված մակերևույթի վրա:

Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 3-ի այս մակերևույթի զառւսյան կորությունը կլինի զրոյի հավասար:

Գրականություն

1. Նալբանդյան Գ.Ա. Մակերևույթի վրա վեկտորի զուգահեռ տեղափոխության մասին / Հավելված ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր ,N 1-2, 2003, էջ 5-12:
2. Նալբանդյան Գ.Ա. Ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա գեոդեզիկ գծեր, ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր ,N 1, 2009, էջ 11-13:
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности,Москва, Наука, 1976 г.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия,Москва 1974 г.
5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии, Москва, 1959г.
6. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ, Наука, Москва. 1967 г.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ. Սահակյանը: