

В. В. Акопян, А. В. Гаспарян, А. В. Саакян

О решении одного гиперсингулярного интегрального уравнения, встречающегося в механике трещин

(Представлено чл.-кор. НАН РА С. М. Мхитаряном 8/III 2023)

Ключевые слова: упругая плоскость, трещина, плотность дислокаций, стационарная теплопроводность, гиперсингулярное интегральное уравнение, квадратурная формула.

Введение. В последние десятилетия значительное развитие получили теория гиперсингулярных интегральных уравнений (ГСИУ) и методы вычисления гиперсингулярных интегралов. Это обусловлено тем, что многие классы граничных задач математической теории упругости, механики трещин, гидромеханики, теории теплопроводности, теории потенциала, других задач математической физики и прикладной математики адекватно описываются ГСИУ. В этом направлении укажем на монографии [1-3] и статьи [4-7]. В теоретическом и вычислительном аспектах наиболее исследовано ГСИУ с классическим гиперсингулярным ядром Коши $(s-x)^{-2}$ [8, 9].

В настоящей статье рассматриваются граничные задачи механики трещин и теории стационарной теплопроводности, сводящиеся к ГСИУ с гиперсингулярным ядром Коши. Определяющее ГСИУ преобразуется также в интегральное уравнение (ИУ) Фредгольма первого рода с симметричным логарифмическим ядром. Эти уравнения затем при помощи квадратурных формул типа Гаусса, в свою очередь, сведены к конечным системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Проведены численная реализация СЛАУ и сравнительный анализ полученных результатов.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть упругая плоскость с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , отнесенная к прямоугольной системе координат $Oxyz$, на горизонтальной оси Ox содержит трещину (математическую щель) $l = \{y = 0; -a \leq x \leq a\}$

конечной длины $2a$. Пусть далее, рассматривая случай нормального разрыва, будем считать, что берега трещины симметрично нагружены нормальными силами интенсивности $p(x)$, т.е.

$$\sigma_y|_{y=\pm 0} = -p(x) \quad (-a < x < a),$$

где σ_y – нормальное напряжение. Для обеспечения раскрытия трещины функция $p(x)$ должна быть положительной.

Требуется определить плотность дислокаций на берегах трещины, раскрытие трещины, нормальные разрушающие напряжения вне трещины на линии ее расположения, т.е. на $l' = \{y = 0; (-\infty, -a) \cup (a, \infty)\}$, и коэффициенты интенсивности этих напряжений (КИН).

Перейдем к выводу определяющих уравнений описанной задачи. С этой целью предварительно для нижней упругой полуплоскости $y \leq 0$ построим решение следующей вспомогательной смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0 & x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty) \\ \tau_{yx}|_{y=0} = 0 & (-\infty < x < \infty) \\ \sigma_y|_{y=0} = -p(x) & (-a < x < a) \end{cases}, \quad (1.1)$$

где τ_{yx} – касательные напряжения, а $v(x, 0)$ – вертикальные перемещения граничных точек нижней упругой полуплоскости. Граничная задача (1.1) соответствует указанному выше симметричному нагружению берегов трещины и непосредственно следует оттуда.

Решение граничной задачи (1.1) представляется формулой [10]

$$\begin{aligned} v(x) = v(x, 0) &= \frac{\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|x-s|} T(s) ds + C \quad (-\infty < x < \infty) \\ \sigma_y|_{y=0} = T(x) &= \begin{cases} -p(x) & (-a < x < a) \\ \sigma(x) & x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \end{cases}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\sigma(x)$ – нормальные разрушающие напряжения вне трещины. После дифференцирования обеих частей (1.2) по x , чтобы избавиться от постоянной C , будем иметь

$$v'(x) = \frac{\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s)}{s-x} ds \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.3)$$

где интеграл при $s = x$ понимается в смысле главного значения по Коши, а

$$\theta = \begin{cases} 2(1-v^2)/E & \text{— при плоской деформации} \\ 2/E & \text{— при обобщенном плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Далее, по формуле обратного преобразования Гильберта, из (1.3) находим

$$T(x) = -\frac{1}{\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'(s)}{s-x} ds = -\frac{1}{\theta\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1.4)$$

Теперь, рассматривая ключевое уравнение (1.4) на трещине, т.е. на интервале $(-a, a)$, придем к следующему сингулярному интегральному уравнению (СИУ) относительно $v'(x)$:

$$\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds = p(x) \quad (-a < x < a) \quad (1.5)$$

при граничных условиях

$$v(x)|_{x=\pm a} = 0. \quad (1.6)$$

Откуда определяется половина плотности дислокаций берегов трещины.

Рассматривая же ключевое уравнение (1.4) вне трещины на линии ее расположения, будем иметь

$$\sigma_y|_{y=0} = \sigma(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds \quad (|x| > a). \quad (1.7)$$

Таким образом, после того как построено решение (1.5) - (1.6), разрушающие нормальные напряжения вне трещины будут определяться формулой (1.7).

В (1.5) произведем интегрирование по частям и воспользуемся граничным условием (1.6). В результате придем к следующему ГСИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v(s)}{(s-x)^2} ds &= \theta p(x) \quad (-a < x < a) \\ v(\pm a) &= 0; \end{aligned} \quad (1.8)$$

откуда определяется полураскрытие трещины $v(x)$ с обратным знаком. Здесь интеграл понимается в смысле Адамара [1].

В ГСИУ (1.8) перейдем на стандартный интервал $(-1, 1)$, введя безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{s}{a}, \quad \varphi(\xi) = \frac{v(a\xi)}{a}, \quad f(\xi) = \theta p(a\xi), \quad (-1 \leq \xi, \eta \leq 1).$$

Тогда (1.8) преобразуется в следующее ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - \xi)^2} d\eta = f(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (1.9)$$

$$\varphi(\pm 1) = 0.$$

Здесь $\varphi(\xi)$ – половина безразмерного нормального раскрытия трещины с обратным знаком.

Перейдем к случаю поперечного сдвига, предполагая, что берега трещины l нагружены также симметрично только касательными силами интенсивности $\tau(x)$, т.е.

$$\sigma_y|_{y=0} = 0; \quad \tau_{yx}|_{y=\pm 0} = -\tau(x) \quad (-a < x < a).$$

Поступив совершенно аналогично сделанному выше, придем к следующему ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\eta)}{(\eta - \xi)^2} d\eta = g(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

$$\psi(\pm 1) = 0; \quad \psi(\xi) = \frac{u(a\xi)}{a}; \quad g(\xi) = \theta\tau(a\xi). \quad (1.10)$$

Здесь $\psi(\xi)$ – половина безразмерного сдвига берегов трещины относительно друг друга в горизонтальном направлении с обратным знаком.

Обратимся к третьему случаю нагружения берегов трещины l , когда упругая плоскость, точнее упругое пространство, находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy . В этом случае берега трещины симметрично нагружены только касательными силами интенсивности $q(x)$, т.е.

$$\tau_{yz}|_{y=\pm 0} = -q(x) \quad (-a < x < a).$$

В этом случае вполне аналогичным образом, как выше, придем к следующему ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(\eta)}{(\eta - \xi)^2} d\eta = h(\xi) \quad (-1 < \xi < 1); \quad \chi(\pm 1) = 0;$$

$$\chi(\xi) = \frac{w(a\xi)}{a}; \quad h(\xi) = \frac{q(a\xi)}{G}, \quad (1.11)$$

где $\chi(\xi)$ – половина безразмерного раскрытия трещины (взаимного сдвига берегов) в направлении оси Oz с обратным знаком, $w(x)$ – перемещения точек берегов трещины в том же направлении, а G – модуль сдвига материала упругого полупространства.

Наконец перейдем к аналогичной с приведенными выше задачами постановке задачи теории стационарной теплопроводности. Пусть бесконечное пространство, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, с коэффициентом теплопроводности k содержит сквозную трещину конечной ширины $L = \{y=0; -a \leq x \leq a; -\infty < z < \infty\}$. Пусть, далее, на верхней и нижней поверхностях трещины L расположены распределенные равномерно по оси Oz и непрерывно по оси Ox источники тепла мощности $Q(x)$. $Q(x)$ представляет собой количество тепла, протекающего за единицу времени через единицу поверхности трещины в сечении x . Тогда картина распределения температуры T во всех сечениях, ортогональных оси Oz , будет одинаковой, т.е. $T = T(x, y)$, и будем иметь дело со следующей двумерной гармонической граничной задачей:

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \Pi/L) \\ k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\pm 0} = -Q(x) & (-a < x < a) \\ \text{grad } T \rightarrow 0 & x^2 + y^2 \rightarrow \infty \\ \Pi = \{-\infty < x, y < \infty; z = 0\}; \end{cases} \quad (1.12)$$

где $Q(x)$ – заранее заданная функция.

Граничная задача (1.12) математически совпадает с граничной задачей в случае антиплоской деформации упругого пространства в направлении оси Oz . Поэтому сразу можем записать

$$T(x, 0) = -\frac{1}{k} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} Q(s) ds + C \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $T(x, 0)$ – распределение температуры на границе нижней полуплоскости $y < 0$.

Далее, поступив совершенно аналогично сделанному выше, придем к следующему ГСИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(\eta) d\eta}{(\eta - \xi)^2} &= H(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \\ \omega(\pm 1) &= 0 \\ \omega(\xi) &= T(a\xi, 0); \quad H(\xi) = Q(a\xi) a/k. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь $\omega(\xi)$ – половина скачка температуры на трещине с обратным знаком.

Таким образом, все четыре рассмотренные задачи описываются единым ГСИУ (1.9), т.е. ГСИУ (1.9), (1.10), (1.11) и (1.13) математически совпадают. Другие ГСИУ с ядрами, отличными от ядра $(s-x)^{-2}$, встречающиеся в разнообразных задачах механики трещин и математической физики, приведены в [11].

После решения определяющих ГСИУ (1.9) - (1.11) можно, как было сказано выше, определить разрушающие напряжения вне трещины. При этом, ограничиваясь только случаем нормального разрыва, СИУ (1.5) обратим в классе неограниченных на концах интервала $(-a, a)$ функций

$$v'(x) = -\frac{\theta}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} p(s)}{s - x} ds \quad (-a < x < a). \quad (1.14)$$

Отметим, что решение разбираемого однородного СИУ $C/\sqrt{a^2 - x^2}$ не входит в (1.14), так как в силу граничного условия (1.6, постоянная C обращается в ноль.

Подставив (1.14) в (1.7) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\sigma_y|_{y=0} = \sigma(x) = -\frac{\text{sign } x}{\pi\sqrt{x^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} p(s)}{(s - x)} ds \quad (|x| > a). \quad (1.15)$$

При этом было использовано выражение известного интеграла из [13] (с. 175. ф-ла (21)).

Исходя из (1.15) вычислим КИН:

$$K_a = \lim_{x \rightarrow a+0} \left[\sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y|_{y=0} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} p(s) ds. \quad (1.16)$$

В безразмерных величинах, указанных выше, формулы (1.15) и (1.16) будут иметь вид:

$$\sigma_0(\xi) = \theta \sigma(ax) = -\frac{\text{sign } \xi}{\pi\sqrt{\xi^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \eta^2} f(\eta) d\eta}{\eta - \xi} \quad (|\xi| > 1), \quad (1.17)$$

$$K_a^0 = \frac{\sqrt{\pi}\theta}{\sqrt{a}} K_a = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} f(\eta) d\eta; \quad f(\xi) = \theta p(ax). \quad (1.18)$$

2. Замкнутое решение ГСИУ (1.9). Для решения этого ГСИУ в интеграле снова произведем интегрирование по частям и вернемся к СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\eta)}{\eta - \xi} \eta = f(\xi) \quad (-1 < \xi < 1).$$

Это СИУ обратим в классе неограниченных на концах интервала $(-1,1)$ функций:

$$\varphi'(\xi) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} f(\eta) d\eta}{\eta-\xi} + \frac{C}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (-1 < \xi < 1).$$

Обе части этого равенства проинтегрируем по ξ и воспользуемся выражением интеграла [14], (с. 111)

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\eta-\xi)} = \frac{1}{2\sqrt{1-\eta^2}} \ln \frac{1-\xi\eta + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}$$

Приняв во внимание граничные условия $\varphi(\pm 1) = 0$, находим

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-\xi\eta + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}} f(\eta) d\eta \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (2.1)$$

Таким образом получено замкнутое решение ГСИУ (1.9). Однако следует отметить, что получение замкнутого решения стало возможным, так как ГСИУ (1.9) не содержит слагаемого с регулярным ядром. В случае наличия регулярного ядра для решения ГСИУ придется использовать приближенные методы. Здесь, на примере решения ГСИУ (1.9), покажем применимость метода механических квадратур, основанного на использовании квадратурных формул типа Гаусса для этой цели.

Воспользуемся квадратурной формулой для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби [15], которая в рассматриваемом частном случае $\alpha = \beta = 0.5$ имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_*(x) \sqrt{1-x^2}}{(x-z)^2} dx = -\pi \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_*(\eta_j)(1-\eta_j^2)}{U_{n-1}(\eta_j)(z-\eta_j)} \left[U_n(z) - \frac{T_{n+1}(z) - T_{n+1}(\eta_j)}{(n+1)(z-\eta_j)} \right] \quad (-1 < z < 1). \quad (2.2)$$

где $\eta_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}$ ($j=1, 2, \dots, n$) – корни многочлена Чебышева второго рода $U_n(x)$.

Разыскивая решение уравнения (1.9) в виде

$$\varphi(\xi) = \varphi_*(\xi) \sqrt{1-\xi^2},$$

дополнительные условия в (1.9) будут выполнены тождественно, а интеграл можно будет заменить суммой (2.2) с неизвестными коэффициентами $\varphi_*(\eta_j)$ ($j=1,2,\dots,n$). Выбрав в качестве точек коллокации для полученного уравнения корни многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$, получим следующую СЛАУ для определения указанных неизвестных коэффициентов:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\varphi_*(\eta_j)(1-\eta_j^2)}{U_{n-1}(\eta_j)(\eta_j-\zeta_k)} \left[U_n(\zeta_k) - \frac{T_{n+1}(\zeta_k) - T_{n+1}(\eta_j)}{(n+1)(\zeta_k - \eta_j)} \right] = f(\zeta_k) \quad (k=\overline{1;n}) \quad (2.3)$$

$$\zeta_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k=\overline{1;n}).$$

Следует отметить, что применительно к рассматриваемому здесь случаю с корневой особенностью в работе [6] получена квадратурная формула, верная только в корнях многочлена Чебышева первого рода $T_{n+1}(x)$. Основываясь на эту квадратурную формулу и используя в качестве точек коллокации n корней многочлена $T_{n+1}(x)$, приходим к следующей СЛАУ:

$$\sum_{m=1}^n \varphi_*(\eta_m) \left[\frac{1-\eta_m^2}{n+1} \frac{1}{(\eta_m-\xi_k)^2} + \frac{1-\eta_m^2}{(\eta_m-\xi_k)} \frac{(-1)^{m+k}}{\sqrt{1-\xi_k^2}} \right] = f(\xi_k) \quad (k=\overline{1;n}) \quad (2.4)$$

$$\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)} \quad (k=\overline{1;n+1}); \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{n+1} \quad (m=\overline{1;n}).$$

Если для СЛАУ (2.3) взять те же точки коллокации, что и в СЛАУ (2.4), то эти системы совпадут. После определения коэффициентов $\varphi_*(\eta_i)$ ($i=\overline{1;n}$) решение уравнения (1.9) определяется по формуле

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \varphi_*(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \varphi_*(\eta_j)(1-\eta_j^2) \sum_{m=0}^{n-1} U_m(x) U_m(\eta_j). \quad (2.5)$$

С другой стороны, уравнение (2.1) можно рассматривать как ИУ Фредгольма первого рода с симметричным логарифмическим ядром, если рассматривать задачу, когда на нижнем берегу трещины задана функция перемещений $\varphi(\xi)$ и требуется определить действующие там напряжения $f(\xi)$. Для решения этого уравнения методом механических квадратур необходимо иметь соответствующую квадратурную формулу. Построим такую формулу.

Рассмотрим интеграл

$$J(\xi) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1-\xi\eta + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}} \psi(\eta) d\eta \quad (-1 < \xi < 1), \quad (2.6)$$

где функция $\psi(\eta)$ – достаточно гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$.

Функцию $\psi(\eta)$ заменим интерполяционным многочленом Лагранжа по корням многочлена Чебышева второго рода $U_n(x)$:

$$\psi(x) \approx \psi_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\psi(\eta_i)(1-\eta_i^2)U_n(x)}{(x-\eta_i)U_{n-1}(\eta_i)}, \quad \left(\eta_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = \overline{1, n} \right),$$

который можно представить и в следующем, более удобном для дальнейших преобразований, виде:

$$\psi_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \psi(\eta_j)(1-\eta_j^2) \sum_{m=0}^{n-1} U_m(x)U_m(\eta_j). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$J(\xi) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \psi(\eta_j)(1-\eta_j^2) \sum_{m=0}^{n-1} U_m(\eta_j) \int_{-1}^1 \ln \frac{1-\xi\eta + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}} U_m(\eta) d\eta.$$

Воспользовавшись, далее, интегральным соотношением ([14], с. 112)

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1-\xi\eta + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}} U_m(\eta) d\eta = \frac{2\pi}{m+1} \sqrt{1-\xi^2} U_m(\xi),$$

для интеграла $J(\xi)$ получим квадратурную формулу

$$J(\xi) = 2\pi \sqrt{1-\xi^2} \sum_{j=1}^n a_j(\xi) \psi(\eta_j), \quad (2.8)$$

где

$$a_j(\xi) = \frac{2}{n+1} (1-\eta_j^2) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{U_m(\eta_j)U_m(\xi)}{m+1}.$$

Таким образом, получена квадратурная формула для интеграла с симметричным логарифмическим ядром.

Рассматривая (2.1) как уравнение относительно функции $f(\xi)$ и используя формулу (2.8) при точках коллокации в корнях многочлена Чебы-

шева первого рода $T_n(x)$, ИУ (2.1) свеем к следующей СЛАУ:

$$\sqrt{1-x_k^2} \sum_{j=1}^n a_j(x_k) f(\eta_j) = -\varphi(x_k) \quad (k = \overline{1; n}), \quad (2.9)$$

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = \overline{1; n}).$$

По найденным значениям $f(\eta_j) (j = \overline{1; n})$ функцию $f(\xi)$ можно восстановить по формуле (2.7).

3. Численный анализ. Проведем сравнительный численный анализ решений уравнения (1.9), построенных при помощи СЛАУ (2.3) и СЛАУ (2.4), с аналитическим решением (2.1), интеграл в котором вычисляется при помощи стандартных пакетов программ. В данном случае вычисления проводились в среде Wolfram Mathematica.

Для решения ГСИУ (1.9) примем $f(x) = \cos(x + 0.2)$. Численный анализ показал, что решения СЛАУ (2.3) и СЛАУ (2.4) совпадают при всех значениях порядка аппроксимации n . В табл. 1. приведены максимальные значения разницы между приближенным решением (2.5) и замкнутым решением (2.1).

Таблица 1

Максимальная разница между решениями (2.1) и (2.5)

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
$\max\{(2.1)-(2.5)\}$	0.21	0.008	-0.0045	3.9×10^{-5}	1.7×10^{-7}	1.75×10^{-7}

Как видно из таблицы, схождение этих решений происходит достаточно быстро, но, как показали расчеты, меньшей разницы между этими решениями достичь не удастся.

Теперь перейдем к решению (2.1) как ИУ Фредгольма первого рода с симметричным логарифмическим ядром при помощи СЛАУ (2.9) с целью апробации предложенной квадратурной формулы (2.8). Чтобы удостовериться в верности решения уравнения (2.1), в левой части этого уравнения возьмем решение (2.5), тогда решение СЛАУ (2.9) должно совпасть с выбранной выше функцией $f(x)$.

На рис.1 показаны кривые разности $\Delta(x)$ между функцией $f(x)$ и решением, полученным на основе СЛАУ (2.9), рассчитанной при различных порядках аппроксимации n .

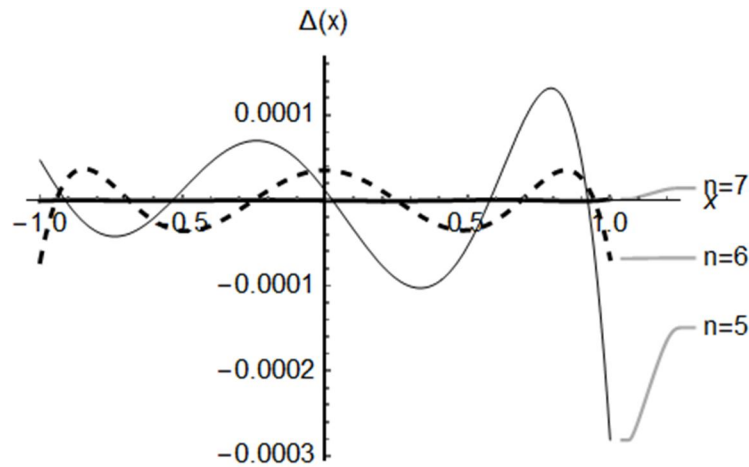


Рис. 1. Разница между точным и приближенным решениями.

Из рис.1 также замечаем быструю сходимость квадратурной формулы – при $n = 7$ разница имеет порядок 10^{-6} .

Заключение. Поставлены задачи для упругой однородной плоскости с трещиной конечной длины при разных условиях на берегах трещины: заданы нормальные или тангенциальные усилия (плоские задачи), заданы тангенциальные усилия (антиплоская задача), заданы тепловые потоки (задача термоупругости). Все четыре задачи сводятся к решению единого гиперсингулярного интегрального уравнения, которое позволяет получить замкнутое решение в интегральной форме, выражающее зависимость скачка перемещений или температуры на берегах трещины от заданных там силовых или тепловых факторов. При обратной постановке задачи – найти те усилия, от которых будут иметь место заданные скачки, полученное замкнутое решение можно рассматривать как ИУ Фредгольма первого рода с симметричным логарифмическим ядром. Представлены квадратурные формулы для вычисления гиперсингулярного интеграла, а также выведена квадратурная формула для вычисления интеграла с симметричным логарифмическим ядром, которые позволяют решить ГСИУ и уравнение с логарифмическим ядром при помощи метода механических квадратур. Сравнительный численный анализ показал эффективность применения квадратурных формул к решению интегральных уравнений указанных типов.

Институт механики НАН РА
e-mail: avetik.sahakyan@sci.am

В. В. Акопян, А. В. Гаспарян, А. В. Саакян

**О решении одного гиперсингулярного интегрального уравнения,
встречающегося в механике трещин**

Рассматриваются граничные задачи механики трещин и теории стационарной теплопроводности, сводящиеся к интегральному уравнению с гиперсингулярным ядром Коши. Определяющее гиперсингулярное интегральное уравнение допускает замкнутое решение в интегральной форме, которое при обратной постановке задачи может быть интерпретировано как интегральное уравнение Фредгольма первого рода с симметричным логарифмическим ядром. Эти уравнения решены также численно-аналитическим методом механических квадратур, основанным на квадратурных формулах типа Гаусса для гиперсингулярного интеграла и представленной в работе квадратурной формуле для интеграла с симметричным логарифмическим ядром. Проведен сравнительный численный анализ решений, полученных при помощи различных квадратурных формул, с замкнутым решением.

Վ. Վ. Հակոբյան, Ա. Վ. Գասպարյան, Ա. Վ. Սահակյան

**Ճաքերի մեխանիկայում հանդիպող մի հիպերսինգուլյար ինտեգրալ
հավասարման լուծման մասին**

Դիտարկվում են ճաքերի մեխանիկայի և ստացիոնար ջերմահաղորդականության տեսության եզրային խնդիրներ, որոնք հանգում են Կոշու հիպերսինգուլյար կորիզով ինտեգրալ հավասարման: Որոշիչ հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարումը թույլատրում է ինտեգրալի տեսքով փակ լուծում, որը խնդրի հակադարձ դրվածքի դեպքում կարելի է մեկնաբանել որպես սիմետրիկ լոգարիթմական կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարում: Այդ հավասարումները լուծված են նաև մեխանիկական քառակուսացման թվային-անալիտիկ եղանակով, որը հիմնված է հիպերսինգուլյար ինտեգրալի համար Գաուսի տիպի քառակուսացման բանաձևերի, ինչպես նաև լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով ինտեգրալի համար աշխատանքում ներկայացված քառակուսացման բանաձևի վրա: Կատարվել է տարբեր քառակուսացման բանաձևերի միջոցով ստացված լուծումների և փակ լուծման համեմատական թվային վերլուծություն:

V. V. Hakobyan, A. V. Gasparyan, A. V. Sahakyan

**On the Solution of One Hyper-Singular Integral Equation
Encountered in Fracture Mechanics**

The paper considers boundary value problems in fracture mechanics and in the theory of steady-state thermal conductivity. The problems reduce to an integral equation with a hyper-singular Cauchy kernel. The governing hyper-singular integral equation permits closed-form solution of an integral form, which, under the inverse problem formulation, can be interpreted as a Fredholm integral equation of the first kind with a symmetrical logarithmic kernel. These equations are also solved by the numerical-

analytical method of mechanical quadratures based on Gauss type quadrature formulae for hyper-singular integral and on the introduced in the paper quadrature formula for the integral with a symmetrical logarithmic kernel. By numerical analysis, the solutions obtained by various quadrature formulae are compared with the closed-form solution.

Литература

1. *Hadamard J.* Lectures of Cauchy's Problem in Linear Partial Equations. Yale University Press, New Haven. 1923.
2. *Lifanov I., Poltavskii L. Vainikko M.* Hypersingular Integral Equations and Their Applications. London, N.Y. CRC Press. 2004, 416 p.
3. *Ang W. T.* Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis. Woodhead Publishing. Cambridge. 2013. 212 p.
4. *Kutt H. R.* – Numerische Mathematik. 1975. V. 24(3). P.205-210.
5. *Kaya A. C., Erdogan F.* – Quarterly of Applied Mathematics. 1987. V. 45(1). P. 105-122.
6. *Korsunsky A.* – Quarterly of Applied Mathematics. 1998. V. 45(1). P. 461-472.
7. *Chan Y.-S., Fannjiang A. C., Paulino G. H.* – International Journal of Engineering Sciences. 2003. V. 41. P. 683-720.
8. *Schleif M.* – Mathematische Nachrichten. 1969. V. 42(1-3). P. 145-155.
9. *Martin P. A.* – Journal of Integral Equations and Application. 1992. V. 4(2). P. 197-204.
10. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.-Л. Гостехиздат, 1949, 270 с.
11. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetsyan E. G.* – The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2020. V. 73 (1). P. 51-75.
12. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения, М. ИЛ. 1960. 299 с.
13. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М. Наука. 1970. 325 с.
14. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, М. Наука. 1983. 488 с.
15. *Саакян А. В.* – Изв. НАН РА. Механика. 2020. Т. 73. № 2. С. 44-57. DOI: 10.33018/73.2.4.