

УДК 004(519:628)Информатика*Серезжа САНДРЯН**к. ф.м.н. доцент кафедры Прикладной математики и информатики**e-mail - sandrun@yandex.ru**Карине МАРУТЯН**доцент кафедры Математики**e-mail – Marutyanyan-Karine-58@mail.ru*

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СВЕТОФОРА $M_\alpha | M_\beta | 1 | n$

В работе рассматривается одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди, когда обслуживающий прибор независимо от поступления входящего потока в детерминированные моменты времени «ломается» и «восстанавливается». Установлены формулы для вычисления переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ в момент времени t .

Ключевые слова: случайная величина, очередь обслуживания, пуассоновский поток, цепь Маркова, обслуживающий прибор, длительность обслуживания.

S.Sandryan, K. Marutyanyan

TRAFFIC MASS SERVICE SYSTEM $M_\alpha | M_\beta | 1 | n$

In work the one-channel system of a queuing with the limited length of turn when the serving device irrespective of inflow of an entering stream in the determined instants "breaks" is studied and immediately "restored".

Formulas for an evaluation of transitive probabilities $P_{ij}(t)$ in an instant t are established.

Keywords: casual variable, turn of service, Poisson stream, the Markov chain, the serving device, duration of service.

Ս.Սանդրյան, Կ. Մարության

ԼՈՒՍԱՅՈՒՅՑԻ ԶԱՆԳՎԱԾԱՅԻՆ ՍԳՆԱՐԿՄԱՆ

$M_\alpha | M_\beta | 1 | n$ օրինակով

Աշխատանքում առաջարկվում է միալար և մեկ սպասարկող սարքով, հերթերի սաահմանափակ տեղերով, զանգվածային սպասարկման տեսության մեկ մոդել՝ անկախ մուտքային հոսքից որոշակի դետերմինացված ժամանակահատվածներում սպասարկման սարքի փչացման և վերականգնման առանձնահատկությամբ:

Աշխատանքում գտնված է անցումային հավանականությունների $P(t)_{ij}$ որոշման առնչություն, իսկ ստացիոնար վիճակի համար՝ վերջավոր չափերով գծային հավասարումների համակարգ՝ դրանց գտնելու նպատակով:

Բանալի բառեր՝ պատահական փոփոխական, սպասարկման հերթ, Պոասսոնի հոսանք, Մարկովի միացում, սպասարկման սարք, ծառայության տևողություն:

Описание системы. В систему массового обслуживания, состоящую из одного обслуживающего прибора, поступает поток вызовов. Моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток с параметром $\lambda > 0$ [1,2], длительность обслуживания вызовов является случайной величиной экспоненциальным распределением с параметром $\mu > 0$ [1]. Вызов, заставший в момент своего поступления прибор свободным от обслуживания, сразу же начинает обслуживаться, в противном случае становится в очередь. Предположим, что максимальное число вызовов, которые могут одновременно находиться в системе, равно $n \geq 1$. Это означает, что если вызов застанет в системе в момент своего поступления очередь длины $(n - 1)$, то он получает отказ к обслуживанию и «теряется», на дальнейший поток вызовов влияния не оказывает.

Описанная модель в теории массового обслуживания обозначается символом $M|M|1|n$ и называется моделью с ограниченной очередью [3]. Новизна в работе в том что, рассматривается случай, когда прибор ненадежный, т.е. в процессе обслуживания в течении времени α прибор выходит из строя и немедленно за время β восстанавливается к работе. Длительность работы прибора α и восстановления β являются детерминированными величинами и не зависят от процесса поступления.

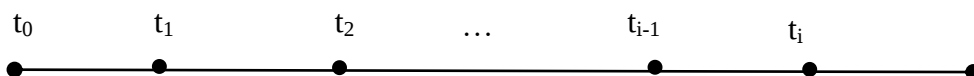
Модель $M|M|1|n$ с ненадежным прибором, с параметрами α и β , согласно общепринятому обозначению теории массового обслуживания будем обозначать символом $M_\alpha|M_\beta|1|n$. Функционирование описанной модели $M_\alpha|M_\beta|1|n$ в реальности можно принять как математическую модель работы светофора для управления потоком транспортных средств через перекресток дорожного движения, если за длительность работы α прибора принимать как время высвечивания зеленого цвета, а время восстановления β как красного цвета. С этой точки зрения предлагаемая модель $M_\alpha|M_\beta|1|n$ можно применить для адекватного описания потока транспортных средств через перекресток. Практическая ценность модели $M_\alpha|M_\beta|1|n$ как модель светофора не исчерпывается, можно привести разные области её применения, в частности теории надежности, радиотехники, теории массового обслуживания и т.д.

Если в некоторый момент времени t в системе $M_\alpha|M_\beta|1|n$, находится k вызовов, $0 \leq k \leq n$, то будем говорить, что система находится в состоянии $S_k(t)$. Обозначим через $P_{ij}(t, t + \Delta)$ вероятность перехода системы за время длительности Δ из состояния $S_i(t)$ в состояние $S_j(t + \Delta)$. В силу основного свойства экспоненциального распределения (свойства стационарности) [1] вероятности $P_{ij}(t, t + \Delta)$ не зависят от момента нахождения времени t , а зависят только от длительности времени Δ , поэтому вероятность перехода из состояния S_i в состояние S_j будем обозначать $P_{ij}(\Delta)$.

Постановка задачи. Основные вероятностно-временные характеристики модели $M_\alpha|M_\beta|1|n$ являются переходные вероятности $P_{ij}(t)$. Цель работы найти эти вероятности. Как метод исследования характеристики $P_{ij}(t)$ в работе принимается метод вложенных цепей Маркова (метод Кендалла) [1]. Суть этого метода следующая: выбрать специальные моменты времени t_k , чтобы вероятностные изменения состояния процесса образовали цепь Маркова. Как

моменты изменения состояния S_i системы выберем последовательность моментов выхода из строя обслуживающего прибора, тогда в силу основного свойства экспоненциального распределения процесс изменения состояния системы образует цепь Маркова, для которых разности смежных моментов перехода $t_i - t_{j-1}$ постоянная и равна длительности времени безотказной работы обслуживающего прибора (α), а множества состояний цепи Маркова конечное и является: $S_0, S_1 \dots S_n$.

Время функционирования системы разделим на интервалы с длиной $\alpha = t_i - t_{j-1}$:



Как единицу времени выберем длительность безотказной работы прибора - α . Тогда моменты времени t_i образуют цепь Маркова с конечными значениями состояния: $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$. Заметим, что функционирование системы $M_\alpha | M_\beta | 1 | n$ в каждом промежутке времени $[t_{i-1}, t_i]$ с вероятностной точки зрения самоподобно с моделью $M | M | 1 | n$ [3], следовательно, в моменты времени перехода t_i система находится в состоянии S_j с вероятностью $P_{ij}(\alpha)$ при условии, что в момент t_{i-1} система находилась в состоянии S_i . Здесь α – длительность времени безотказной работы прибора. Вероятности $P_{ij}(\alpha)$ для модели $M | M | 1 | n$ в момент α для любого значения i, j ($0 \leq i, j \leq n$) определяются по формуле [3]:

$$P_{ij}(\alpha) = \rho^j \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+1}} + \frac{2}{n+1} \rho^{1+\frac{i-j}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} a_{jk}}{a_k} e^{-a_k \mu \alpha} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \lambda / \mu, \quad a_k = 1 + \rho - 2\sqrt{\rho} \cos \theta_k, \\ a_{ik} &= \sin(i+1) \theta_k - \rho^{-\frac{1}{2}} \sin i \theta_k, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \theta_k &= k \frac{\pi}{n+1}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Поскольку в моменты времени t_i обслуживающий прибор выходит из строя и восстанавливается в течении длительности времени β , то за этот период поступившие вызовы накапливаются. Согласно экспоненциальному распределению за промежуток времени β (когда прибор восстанавливается) в систему поступят s вызовов с вероятностью $\gamma_s(\beta)$ [1]:

$$\gamma_s(\beta) = \frac{(\lambda \beta)^s}{s!} e^{-\lambda \beta}. \quad (2)$$

По формуле полной вероятности с учетом независимости вероятностей $P_{ij}(\alpha)$ и $\gamma_s(\beta)$, для рассматриваемой вложенной цепи Маркова, вероятности перехода $P_{ij}(\alpha, \beta)$ между состояниями S_i за один шаг (за единицу времени α) определяются по формуле:

$$P_{ij}(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^j P_{ik}(\alpha) \gamma_{j-k}(\beta). \quad (3)$$

Тогда вероятности перехода между состояниями за любое число шагов (за время t), зная вероятности перехода за один шаг (3), можно найти по формуле[6]:

$$P(t) = P_{a,\beta}^t, \quad (4)$$

где $P(t)$ и $P_{a,\beta}$ являются матрицами размера $(n \times n)$ с элементами соответственно $||P_{ij}(t)||$ и $||P_{ij}(a,\beta)||$. Здесь элементы матрицы перехода $P_{a,\beta}$ определяются согласно формуле (3). Вычисление вероятностей $P_{ij}(t)$ по формуле (4) представляет сложности технического характера, особенно когда $n \geq 10$. В теории массового обслуживания часто изучают лишь предельные вероятностно-временные характеристики:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = P_{ij}. \quad (5)$$

Если нагрузка системы $\rho < 1$, то существование стационарных вероятностей (5) устанавливается эргодическими теоремами [4].

Для вложенной цепи Маркова при условии $\rho < 1$ существуют предельные вероятности (5) и не зависят от начального состояния [1].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом предельные вероятности (6) удовлетворяют системе уравнений:

$$P_j = \sum_{k=1}^n P_k P_{kj}(a, \beta),$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

здесь $P_{kj}(a, \beta)$ – вероятность перехода между состояниями вложенной цепи Маркова за один шаг и определяются по формуле (3). Решая систему уравнений можно определить стационарные вероятности

$$P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Литература

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания./ Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит. —1987.-336с.
2. Даниелян Э.А., Сандрян С.Н. Предельная теорема в модели Прабху при единичной нагрузке. Тезисы докладов XXI школа – коллоквиум по теории вероятностей и математической статистике. Бакуриани, 1987г.
3. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания./ Г.П.Климов-М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат.лит. —1966.-244с.
4. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания./ А.А. Боровков—М.: Наука, 1972.-407с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов./ Е.С. Вентцель-7-е изд. стер. М.: Высш.шк., 2001.-575с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т.2./ В. Феллер—М.: Мир 1984.-738с.

Հոդվածը տպագրության է նրաշխարհին խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: