ՀՏԴ 513.813
Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ
ֆ.մ.գ.թ., ԱրԴՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ
e-mail: Gurgen250612@mail.ru

ԱՖԻՆԱԿԱՆ ԿԱՊԱԿՑՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԳԵՈԴԵԶԻԿ ԳԾԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ուսումնասիրված են գեոդեզիկ գծերը L_n աֆինական կապակցվածության տարածություններում: Ապացուցված է $\xi^i(t)$ վեկտորի զուգահեռ տեղափոխության պայմանը տրված կորի երկայնքով տարբեր x^i և $x^{i'}$ կոորդինատական համակարգերում: Ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի առանց ոլորման երկու կապակցվածության օբյեկտները ունենան ընդհանուր գեոդեզիկ գիծ: Որոշված է առանց ոլորման երկու կապակցվածության օբյեկտների համընկնելու պայմանը:

Keywords. *Բազմաձևություն, աֆինական կապակցվածություն, ոլորման թենզոր, տարածություն ոլորումով և առանց ոլորման, կանոնական պարամետր, սիմետրիկ թենզոր, կովարիանտ և կոնտրավարիանտ թենզորներ:*

Г. Налбандян

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Изучены геодезические линии в пространствах аффинной связности L_n. Получены условия параллельного переноса вектора $\xi^i(t)$ вдоль данной кривой в различных системах координат x^i и $x^{i'}$. Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы два объекта аффинной без кручения связности имели общую геодезическую линию. Найдены условия совпадения двух объектов аффинной связности без кручения .

Ключевые слова: *многообразия, аффинная связность, тензор кручения. пространство с кручением и без кручения, канонический параметр, симметрический тензор, ковариантные и контравариантные тензоры.*

G. Nalbandyan

GEODESIC LINES IN THE SPACE OF AFFINE CONNETION L_n.

In spaces with an affine connection L_n geodesic lines are investigated. The conditions for parallel transport of a vector $\xi^i(t)$ along a given curve in different coordinate systems x^i and $x^{i'}$ are proved. The necessary and sufficient conditions of a torsion-free affine connection of two objects having a general geodesic line; as well as coincidence of a torsion-free affine connection of two objects are proved.

Key wods: *diversity, affine connection, curvature tensor, space with torsion and without torsion, canonical parameter, symmetric tensor, covariant and contravariant tensors.*

Ինչպես հայտնի է, եթե W_n դիֆերենցելի բազմաձևությունում $g_{ij}(M)$ մետրիկական թենզորի փոխարեն ներմուծենք $\Gamma_{ij}^k(M)$ աֆինական կապակցվածության օբյեկտները, ապա ռիմանյան երկրաչափության փոխարեն կստանանք աֆինական կապակցվածության երկրաչափություն, և W_n բազմաձևությունը կվերածվի L_n աֆինական կապակցվածության տարածության [1,2]:

Ինչպես հայտնի է, աֆինական կապակցվածության օբյեկտները x^i լոկալ կոորդինատական համակարգից $x^{i'}$ լոկալ կոորդինատական համակարգին անցնելիս ձևափոխվում են

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \tag{1}$$

օրենքով: Այս բանաձևում Γ_{ij}^k, $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ օբյեկտները և բոլոր մասնակի ածանցյալները համարվում են հաշված M կետում [1-3]:

Հետագայում կդիտարկենք միայն աֆինական կապակցվածության տարածությունը, իսկ $\Gamma_{ij}^k(M) = \Gamma_{ij}^k(x^1, x^2, ..., x^n)$ ֆունկցիաները կհամարենք դիֆերենցելի: Նշված (1) բանաձևը ավելի հարմար տեսքի բերելու համար բազմապատկենք այն $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$ - ով և գումարելով ըստ k' - ի ու հաշվի առնելով, որ $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} = \delta_k^l$, կստանանք՝

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \delta_k^l + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_k^l \Gamma_{ij}^k ,$$

կամ

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^l : \qquad (2)$$

Աֆինական կապակցվածության տարածությունում ընդհանրապես $\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k$ ։ Ընդունենք հետևյալ նշանակումը՝

$$S_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k \qquad (3)$$

և ստուգենք S_{ij}^k ֆունկցիաների ձևափոխության օրենքը: Հաշվի առնելով (1) բանաձևը՝ կստանանք

$$S_{i'j'}^{k'}=\Gamma_{i'j'}^{k'}-\Gamma_{j'i'}^{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}S_{ij}^k :$$

Հետևաբար S_{ij}^k ֆունկցիաները ձևափոխվում են թենզորական օրենքով: Այդ թենզորը կոչվում է աֆինական կապակցվածության տարածության ոլորման թենզոր: Եթե $S_{ij}^k=0$, այսինքն $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$, ապա աֆինական կապակցվածության տարածությունը կոչվում է առանց ոլորման և նշանակվում է L_n^0 - ով: Այժմ նշենք աֆինական կապակցվածության տարածությունում վեկտորի զուգահեռ տեղափոխման հասկացությունը:

Դիցուք տրված են $x^i=x^i(t),\ a\le t\le b$ ռեգուլյար կորը և $\xi^i=\xi^i(t)$ վեկտորը: Կասենք, որ $\xi^i(t)$ վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում $x^i(t)$ կորով, եթե տեղի ունի

$$d\xi^k=-\Gamma_{ij}^k\xi^i dx^j \qquad (4)$$

հավասարությունը , որտեղ dx^i -ն $x^i(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է:

Թեորեմ 1: *Եթե $\xi^i(t)$ վեկտորը տեղափոխվում է զուգահեռ տրված կորի երկայնքով x^i կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, ապա այն կամայական այլ $x^{i'}$ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ ևս կտեղափոխվի զուգահեռ:*

Ապացույց: Համաձայն թենզորական օրենքի՝ $\xi^{k'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\xi^k$ ։ Հետևաբար

$$d\xi^{k'}=\left(d\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)\xi^k+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}d\xi^k=\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k\partial x^i}dx^i\xi^k+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}d\xi^k :$$

Փոխարինելով առաջին գումարելիում k -ն j - ով և հաշվի առնելով (4) –ը՝ կստանանք՝

$$d\xi^{k'}=\left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k\right)\xi^k dx^i : \qquad (5)$$

Այժմ (2) -ում փոխելով x^{i} և $x^{i'}$ կոորդինատների տեղերը և l -ը փոխելով k - ով՝

կստացվի՝ $\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}=\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{j}\partial x^{i}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\Gamma_{i'j'}^{k'}$, կամ՝

$$\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{j}\partial x^{i}}-\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}=-\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\Gamma_{i'j'}^{k'}: \qquad (6)$$

Հաշվի առնելով (6) –ը, (5) -ից կունենանք՝

$$d\xi^{k'}=-\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\Gamma_{i'j'}^{k'}\xi^{j}dx^{i}:$$

Քանի որ $dx^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}dx^{i}$, $\xi^{k'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\xi^{k}$, ապա $d\xi^{k'}=-\Gamma_{i'j'}^{k'}\xi^{i'}dx^{i'}$:

Հետևաբար $\xi^{i}(t)$ վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում $x^{i'}$ կոորդինատական համակարգում:

Ինչպես հայտնի է, գեոդեզիկ գծերը աֆինական կապակցվածության տարածությունում հանդես են գալիս այնպես, ինչպես ուղիղ գծերը աֆինական տարածությունում [2,3], և $x^{i}=x^{i}(s)$ գեոդեզիկ գիծը բնութագրվում է

$$\frac{d^2x^{k}}{d\sigma^2}=-\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^{i}}{d\sigma}\frac{dx^{j}}{d\sigma}$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով:

Դիտարկենք գեոդեզիկ գծի հետևյալ հատկությունը. տվյալ բազմաձևությունում Γ_{ij}^{k} կապակցվածության օբյեկտը որոշում է նույն գեոդեզիկ գիծը ինչ որ

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}+\Gamma_{ji}^{k}\right)$$

կապակցվածության օբյեկտը, որը թենզոր է, սիմետրիկ է ստորին ինդեքսների նկատմամբ և, հետևաբար, առանց ոլորման կապակցվածության օբյեկտ է:

Այժմ ցույց տանք, որ գեոդեզիկը երկու կապակցվածության օբյեկտների համար մնում է նույնը [3-5]: Գրենք գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումը $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ կապակցվածության համար՝

$$\frac{d^2x^{k}}{d\sigma^2}=-\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}\frac{dx^{i}}{d\sigma}\frac{dx^{j}}{d\sigma}=-\frac{1}{2}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^{i}}{d\sigma}\frac{dx^{j}}{d\sigma}-\frac{1}{2}\Gamma_{ji}^{k}\frac{dx^{i}}{d\sigma}\frac{dx^{j}}{d\sigma}:$$

Եթե երկրորդ գումարելիում փոխենք i և j ինդեքսների տեղերը, ապա այն կհավասարվի առաջին գումարելիին, և արդյունքում կստանանք՝

$$\frac{d^2x^{k}}{d\sigma^2}=-\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^{i}}{d\sigma}\frac{dx^{j}}{d\sigma}:$$

Վերջին հավասարումը հանդիսանում է Γ_{ij}^{k} կապակցվածության գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:

Դիցուք, W_n բազմաձևության մեջ տրված են առանց ոլորման Γ_{ij}^{k}, G_{ij}^{k} երկու կապակցվածության օբյեկտներ: Ինչպիսի՞ պայմանների դեպքում նրանք կունենան ընդհանուր գեոդեզիկ գիծ: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: *Որպեսզի երկու կապակցվածության օբյեկտներ առանց ոլորման ունենան ընդհանուր գեոդեզիկ գիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանք իրարից տարբերվեն* $T_{pq}^{k} = p_{(i}\delta_{j)}^{k}$ *տեսքի թենզորով:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք, որ այդ երկու կապակցվածության օբյեկտները ունեն ընդհանուր գեոդեզիկ գիծ: Դիցուք ξ^{i}-ն գեոդեզիկի շոշափող վեկտորն է, որը զուգահեռ է տեղափոխվում առաջին կապակցվածության նկատմաբ, իսկ η^{i}-ն նույն գեոդեզիկի շոշափող վեկտորն է, որը զուգահեռ է տեղափոխվում երկրորդ կապակցվածության նկատմաբ: Հետևաբար

$$\eta^{k} = \alpha\xi^{k},$$

որտեղ α-ն, ընդհանրապես ասած, փոփոխական է, այսինքն՝ $\alpha = \alpha\left(x^{1}, x^{2}, ..., x^{n}\right)$ ֆունկցիա է: Գրենք զուգահեռ տեղափոխման բանաձևերը՝

$$d\xi^{k} = -\Gamma_{ij}^{k}\xi^{i}dx^{i}, \quad d\eta^{k} = -G_{ij}^{k}\eta^{i}dx^{i}:$$

Եթե երկրորդ հավասարման մեջ տեղադրենք η^{k}-ի արժեքը, ապա կստանանք՝

$d\left(\alpha\xi^{k}\right) = -G_{ij}^{k}\left(\alpha\xi^{i}\right)dx^{i}$ կամ՝

$$d\alpha\xi^{k} + \alpha d\xi^{k} = -G_{ij}^{k}\alpha\xi^{i}dx^{i}:$$

Բաժանելով α-ի և հաշվի առնելով, որ $d\xi^{k} = -\Gamma_{ij}^{k}\xi^{i}dx^{j}$, կունենանք՝

$$\frac{d\alpha}{\alpha}\xi^{k} + \left(-\Gamma_{ij}^{k}\xi^{i}dx^{j}\right) = -G_{ij}^{k}\xi^{i}dx^{j}: \tag{7}$$

Զուգահեռ տեղափոխվող շոշափող ξ^{i} վեկտորն, ինչպես գիտենք, կարող ենք գրել $\xi^{i} = \frac{dx^{i}}{d\sigma}$ տեսքով, որտեղ σ-ն կանոնական պարամետրն է առաջին կապակցվածության օբյեկտների նկատմամբ: Հետևաբար, ստացված հավասարումը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}\xi^{k} = \left(\Gamma_{ij}^{k} - G_{ij}^{k}\right)\xi^{i}\xi^{j}: \tag{8}$$

Ինչպես հայտնի է, տրված կետով տրված ուղղությամբ անցնում է միայն ու միայն մեկ գեոդեզիկ գիծ, հետևաբար ստացված հավասարումը պետք է տեղի ունենա կամայական կետի և ցանկացած ξ^i վեկտորի համար:

Ընդ որում յուրաքանչյուր անգամ $\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}$ մեծությունը ունի իր տարբեր թվային արժեքները, որը կախված է կետի ընտրությունից և ξ^i վեկտորից: Եթե ընդունենք հետևյալ նշանակումը՝

$$T_{ij}^k = \left(\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k\right),$$

ապա կստանանք՝

$$\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}\xi^k = T_{ij}^k \xi^i \xi^j,$$

որտեղ $T_{ij}^k = \left(\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k\right)$ իրենից ներկայացնում է թենզոր՝ մեկ անգամ կոնտրավարիանտ և երկու անգամ կովարիանտ:

Այս հավասարումից պետք է կատարենք հետևություն T_{ij}^k թենզորի կառուցվածքի մասին: Այդ նպատակով արտաքսենք $\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}$ արտադրիչը հետևյալ կերպ: Եթե հավասարումը բազմապատկենք ξ^l-ով և ըստ k և l ինդեքսների կատարենք ալտեռնացիա, ապա կստանանք

$$\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}\xi^{[k}\xi^{l]} = \xi^{[l}T_{ij}^{k]}\xi^i\xi^j:$$

Քանի որ

$$\xi^{[k}\xi^{l]} = \frac{1}{2}\left(\xi^k\xi^l - \xi^l\xi^k\right) = 0,$$

ապա

$$\xi^{[l}T_{ij}^{k]}\xi^i\xi^j = 0: \qquad (9)$$

Հաշվի առնելով, որ δ_m^l միավորը թենզոր է, ապա կարելի է գրել $\xi^l = \delta_m^l\xi^m$: Այս արժեքը տեղադրելով (9) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$\delta_m^{[l}\ T_{ij}^{k]}\xi^m\xi^i\xi^j = 0:$$

Այս հավասարությունը պետք է տեղի ունենա նույնաբար բոլոր ξ^m, ξ^i, ξ^j վեկտորների նկատմամբ [2-5]: Հետևաբար, $\delta_m^{[l}\ T_{ij}^{k]} = 0$ և բացելով այս հավասարումը՝ կունենանք՝

$$\delta_p^{[l}\ T_{qr}^{k]} + \delta_p^{[l}\ T_{rq}^{k]} + \delta_q^{[l}\ T_{pr}^{k]} + \delta_q^{[l}\ T_{rp}^{k]} + \delta_r^{[l}\ T_{pq}^{k]} + \delta_r^{[l}\ T_{qp}^{k]} = 0:$$

Քանի որ T_{ij}^k սիմետրիկ է ըստ ներքին ինդեքսների, ապա ստանում ենք

$$2\left(\delta_p^{[l}\ T_{qr}^{k]} + \delta_q^{[l}\ T_{rp}^{k]} + \delta_r^{[l}\ T_{pq}^{k]}\right) = 0:$$

Այժմ գրենք ալտեռնացիան բացված տեսքով ՝

$$\delta_p^l\ T_{qr}^k + \delta_q^l\ T_{pr}^k + \delta_r^l\ T_{qp}^k - \delta_p^l\ T_{rq}^k - \delta_q^l\ T_{rp}^k - \delta_r^l\ T_{pq}^k = 0:$$

Հաշվի առնելով, որ $\delta_l^l = \delta_1^1 + \delta_2^2 + ... + \delta_n^n = n$, և կատարելով վերջին հավասարության մեջ արտաքսում ըստ l, r ինդեքսների՝ կստանանք

$$T_{qp}^k + T_{pq}^k + nT_{qp}^k - \delta_p^k\, T_{kq}^l - \delta_q^k\, T_{kp}^l - T_{pq}^k = 0,$$

որտեղից էլ՝

$$T_{pq}^k = \frac{1}{n+1}\left(\delta_p^k\, T_{kq}^l + \delta_q^k\, T_{kp}^l\right): \qquad (10)$$

Նշանակենք p_i - ով մեկ անգամ կովարիանտ թենզորը, որը ստացվում է T_{ij}^k թենզորից՝ փաթաթելով k, j ինդեքսները և այն բազմապատկելով $\frac{n+1}{2}$ - ով՝ կունենանք $p_i = \frac{n+1}{2} T_{il}^l$:

Այժմ (10)-ը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ՝

$$T_{pq}^k = \frac{1}{2}\left(p_i\delta_j^k + p_j\delta_i^k\right) = p_{(i}\delta_{j)}^k:$$

Բավարարություն: Դիցուք

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2}\left(p_i\delta_j^k + p_j\delta_i^k\right), \qquad (11)$$

որտեղ p_i -ն ինչ որ թենզոր է: Ենթադրենք T_{ij}^k կապակցվածության օբյեկտների նկատմամբ տրված է գեոդեզիկ գիծ [3-5], որի կանոնական պարամետրը σ -ն է, և ξ^i շոշափող վեկտորը տեղափոխվում է զուգահեռ:

Ցույց տանք, որ կարելի է ընտրել α փոփոխական արտադրիչն այնպես, որ $\eta^k = \alpha\xi^k$ լինի զուգահեռ տեղափոխվող վեկտոր նաև G_{ij}^k կապակցվածության օբյեկտի նկատմամբ: Դրանով իսկ ցույց տված կլինենք, որ այդ գեոդեզիկ գիծը գեոդեզիկ է նաև G_{ij}^k կապակցվածության օբյեկտի նկատմամբ:

Համաձայն (4) բանաձևի՝ $d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^i$: Այժմ պահանջենք, որ $\eta^k = \alpha\xi^k$ վեկտորը տեղափոխվի զուգահեռ G_{ij}^k կապակցվածության օբյեկտի նկատմամբ: Համաձայն վերը ստացվածի՝ $d\left(\alpha\xi^k\right) = -G_{ij}^k\left(\alpha\xi^i\right)dx^i$, կամ ձևափոխելով՝ կունենանք՝

$$\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}\xi^k = \left(\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k\right)\xi^i\xi^j:$$

Հաշվի առնելով (11)–ը՝ այս հավասարումը կարող ենք բերել հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}\xi^k = \frac{1}{2}\left(p_i\delta_j^k + p_j\delta_i^k\right)\xi^i\xi^j = p_{(i}\delta_{j)}^k\xi^i\xi^j:$$

Եթե վերցնենք $j = k$, ապա կունենանք՝ $\frac{d\ln\alpha}{d\sigma}\xi^k = p_i\xi^i\xi^k$, կամ

$$\left(\frac{d\ln\alpha}{d\sigma} - p_i\xi^i\right)\xi^k = 0:$$

Քանի որ այստեղ ξ^k կամայական վեկտոր է, ապա $\frac{d\ln\alpha}{d\sigma} - p_i\xi^i = 0$, կամ՝

$$\frac{d\ln\alpha}{d\sigma} = p_i\xi^i : \tag{12}$$

(12) հավասարման մեջ $p_i\xi^i$ մեծությունը լիովին որոշված ֆունկցիա է ըստ σ կանոնական պարամետրի [2-3]: Ինտեգրելով (12) հավասարումը՝ կստանանք $\ln\alpha = \int p_i\xi^i d\sigma$, որտեղից էլ՝

$$\alpha = e^{\int p_i\xi^i d\sigma} :$$

Այս բանաձևով փաստորեն մենք որոշեցինք α-ի արժեքը, դրանով իսկ նաև $\eta^k = \alpha\xi^k$ վեկտորը: Այսպիսով՝ T_{ij}^k կապակցվածության օբյեկտի նկատմամբ գեոդեզիկ գիծը կլինի գեոդեզիկ նաև G_{ij}^k կապակցվածության նկատմամբ: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3: *Առանց ոլորման երկու կապակցվածության օբյեկտներ համընկնում են, եթե դրանք ունեն ընդհանուր կանոնական պարամետր և ընդհանուր գեոդեզիկ գիծ:*

Ապացույց: Համաձայն գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումների, կունենանք

$$\frac{d^2x^k}{d\sigma^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}, \qquad \frac{d^2x^k}{d\sigma^2} = -G_{ij}^k \frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} :$$

Հետևաբար

$$\left(\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k\right)\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = 0 : \tag{13}$$

Քանի որ կամայական կետով և տրված ուղղությամբ անցնում է միայն ու միայն մեկ գեոդեզիկ գիծ, ապա (13)-ը պետք է տեղի ունենա բոլոր $\frac{dx^j}{d\sigma}$ վեկտորների համար:

Հետևաբար $\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k = 0$ կամ

$$\Gamma_{ij}^k = G_{ij}^k :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Գրականություն

1. Норден А.П. Пространства декартовой композиции // Изв. вузов, математика, N 4, 1963.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ.- М.: "Наука", 2006.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., фоменко А.Т. Современная

Геометрия М.: ''Наука'', 1986.
4. Նալբանդյան Գ.Ա., Մակերևույթի վրա վեկտորի զուգահեռ տեղափոխության մասին / հավելված ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր, N 1-2, 2003, էջ 5-12:
5. Նալբանդյան Գ.Ա., Ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա գեոդեզիկ գծեր / ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր, N 1, 2009, էջ 11-13:

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: