

ՀՏԴ 62-501.7

Прикладная математика

*Володя МАНАСЯН**доцент кофедры прикладной математики и информатики АрГУ**E-mail: manasyan1949@mail.ru*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНОГО ВЫПУСКА ИТЕРАТИВНЫМ МЕТОДОМ

В статье, используя итеративный метод, рассматривается межотраслевая модель Леонтьева, на конкретном промере показывается его преимущество для определения равновесного выпуска.

Ключевые слова: межотраслевой баланс, модель Леонтьева, итерация, эффект распространения.

Վ. Մանասյան**ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇԻՌ ԹՈՂԱՐԿՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ****ԻՏԵՐԱՏԻՎ ՄԵԹՈԴՈՎ**

Հոդվածում հետազոտվում է Լեոնտևի միջնորդային մոդելը՝ օգտագործելով իտերատիվ մեթոդը, կոնկրետ օրինակի վրա ցույց տալով նրա առավելությունները հավասարակշիռ թողարկման որոշման համար:

Բանալի բառեր՝ միջնորդային հաշվեկշիռ, գծային հավասարումների համակարգ, մատրից, Լեոնտևի մոդել, իտերացիա, տարածման արդյունավետություն:

V. Manasyan**DETERMINATION OF EQUILIBRIUM RELEASE BY
ITERATIVE METHOD**

The article deals with Leontiev's interindustrial model applying iterative method. We aim at showing its advantages of balance in production exemplifying in patterns.

Keywords: interindustrial (intersectoral) balance, system of linear equations, matrix, Leontiev's model, iteration, economic growth efficiency, steady's effect.

В экономике межотраслевой баланс – это каркасная модель экономики, таблица, в которой показываются многообразные натуральные и

стоимостные связи в народном хозяйстве. Анализ межотраслевого баланса дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе [1].

С точки зрения математики межотраслевой анализ может рассматриваться как особый случай решения системы уравнений.

Действительно, строки межотраслевого баланса показывают распределение выпуска каждого вида продукции, каждая строка характеризуется следующим балансом:

Выпуск данного вида продукции = Промежуточный спрос + Конечный спрос

Столбцы таблицы показывают структуру затрат или структуру используемых ресурсов, необходимых для каждой отрасли. Для столбцов устанавливается следующий баланс:

Расходы отрасли = Промежуточные затраты + Добавленная стоимость

Известно, что центральный вопрос межотраслевого анализа заключается в том, что как изменится объем выпуска данной отрасли, если при фиксированном коэффициенте прямых затрат значение конечного спроса изменится на какую-нибудь величину. Для ответа на поставленный вопрос, мы приходим к необходимости отыскания решения системы линейных уравнений

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

или в матричном представлении

$$X = AX + Y, \quad (2)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad - \text{матрица объемов выпуска отраслей,}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad - \text{матрица коэффициентов прямых затрат } (a_{ij}$$

определяется как объем ресурса i , необходимый для производства единицы продукта j)

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad - \text{матрица конечных спросов отраслей.}$$

Полученная формула есть не что иное, как леонтьевская модель межотраслевого баланса [2].

Матрица коэффициентов прямых затрат A соответствует таблице этих коэффициентов и здесь матрица A должна быть продуктивной.

Напомним, что неотрицательная квадратная матрица A является продуктивной, если существует хотя бы один такой положительный вектор $X > 0$, что

$$(E - A)X > 0$$

Предполагаем, что матрица A такова. Тогда для любого положительного вектора конечного спроса Y векторное уравнение (2) имеет положительное решение, равное $X = (E - A)^{-1}Y$. Здесь

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица размерности } n.$$

Матрица $B = (E - A)^{-1}$ называется обратной матрицей Леонтьева или матричным мультипликатором. Эта матрица представляет матрицу коэффициентов полных затрат. Экономический смысл ее элементов b_{ij} заключается в следующем: коэффициент b_{ij} показывает потребность в валовом выпуске продукции отрасли i для производства единицы конечной продукции отрасли j . Таким образом b_{ij} в сущности есть мультипликатор, показывающий эффект распространения спроса, первоначальным источником, которого является спрос на конечную продукцию.

Можно доказать [3], что

$$E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (E - A)^{-1},$$

откуда

$$X = (E - A)^{-1}Y = (E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots)Y,$$

причем AY есть результат первичного эффекта распространения, A^2Y - вторичного и т.д.

Из предыдущего соотношения следует, что решение (2) можно получить итерационно:

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)} + Y, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Подставляя в (3) в качестве исходного итеративного значения $X^{(0)} = Y$, мы рассчитаем эффект мультипликации, порождаемый конечным спросом. Приведем пример. Пусть имеем таблицу, которая содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц [4].

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	40	40	100
2	Энергетика	10	10	40	60	100
3	Машиностроение	20	10	20	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления, а также матрицу коэффициентов прямых затрат.

Имеем:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид

$$Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Требуется найти вектор валового выпуска X , удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты X_1, X_2, X_3 неизвестного вектора X находятся из системы уравнений, которая имеет в данном случае вид

$$\begin{cases} X_1 = 0,05X_1 + 0,35X_2 + 0,4X_3 + 60 \\ X_2 = 0,1X_1 + 0,1X_2 + 0,4X_3 + 70 \\ X_3 = 0,2X_1 + 0,1X_2 + 0,2X_3 + 30 \end{cases}$$

В матричной форме эта система примет вид (2) или

$$(E - A)X = Y, \quad (4)$$

где матрица $(E - A)$ имеет вид

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}$$

Решением системы линейных уравнений (4) будет:

$$X = \begin{pmatrix} 152,2 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2%, уровень энергетики – на 35,8% и выпуск продукции машиностроения – на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в таблице.

С помощью итеративного метода мы на ЭВМ получим следующие итерации

.....

$$\begin{aligned} \|X^{(20)} - X^{(19)}\|_k &= \sqrt{0,002^2 + 0,003^2 + 0,003^2} = \\ \sqrt{0,000004 + 0,000009 + 0,000009} &= \sqrt{0,000022} < \sqrt{0,000025} = 0,005 < \\ &0,01. \end{aligned}$$
$$X^{(20)} = \begin{pmatrix} 152,137 \\ 135,796 \\ 92,509 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 152,14 \\ 135,80 \\ 92,51 \end{pmatrix},$$
$$AY = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39,5 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

(Результат первичного эффекта распространения),

(Результат вторичного эффекта распространения) и т.д.

Использование в межотраслевом анализе итеративного метода имеет следующие преимущества:

1. Он удобен для расчета эффекта мультипликации.
2. Не предполагают алгебраических знаний, необходимых для вычисления обратных матриц.
3. Итерационный метод обладает сходимостью.
4. Ответ можно получить с заданной точностью на ЭВМ.

Литература

1. Л.И. Лопатников – Экономико-математический словарь, М., Наука 1987г., стр. 209-214
2. Математическая экономика на персональном компьютере (под ред. М.Кубонива), М., 1991г., стр. 157-164
3. Б.П. Демидович, И.А. Марон- Основы вычислительной математики, М., Науки 1970г., стр. 231-251, стр. 315-319, стр. 294-301
4. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов-Основы математики и ее приложение в экономическом образовании, М., изд. Дело, 2003г.

Հոդվածը տպագրության է նրաշխարհում խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.ս.գ.թ. Գ.Տ.Սահակյանը: