

ՀՏԴ 512

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Ռուդիկ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

մ.գ.թ., պրեֆեսոր

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոն

ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Հոդվածում դիտարկվում են խնդիրներ՝ իրենց լուծումներով, որոնք ներկայացնում են որոշակի հետաքրքրություն երկրաչափական կառուցումների տեսանկյունով: Այնուհետև այդ խնդիրների գործնական կիրառությունները ցուցադրվում են ժամացույցի օրինակի վրա: Հոդվածը պարունակում է 10 խնդիր՝ իրենց զծագիրներով և նկարներով:

Բանալի բառեր՝ հարթություն, գուգահեռ տեղափոխություն, համաչափություն, պտույտ, հոմոտեթիա, կառուցում, լուծում, ապացույց, ժամացույց, պաք, անկյուն, ստորինան, բուլե, ժամ:

Р. Аракелян

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В статье рассматриваются задачи с решениями, которые представляют интерес с точки зрения геометрических построений. Далее эти задачи находят практические применения на примере часов. Статья содержит 10 задач со своими рисунками и чертежами.

Ключевые слова: плоскость, параллельный перенос, симметрия, поворот, гомотетия, построение, время, угол, градус, минута, час.

R.Arakelyan

ON THE APPLICATION OF PLANE TRANSFORMATION IN SOLVING SOME PROBLEMS OF MATHEMATICS

In this paper we consider tasks with solutions that from the point of view geometric constructions are interest. Further, these tasks find practical applications using the example of hours. The article contains 10 tasks with their drawings.

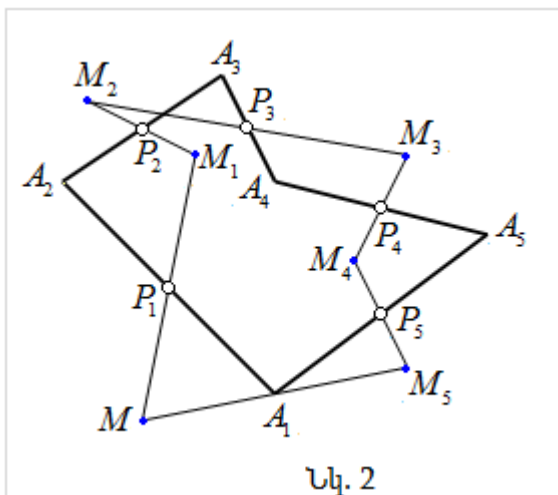
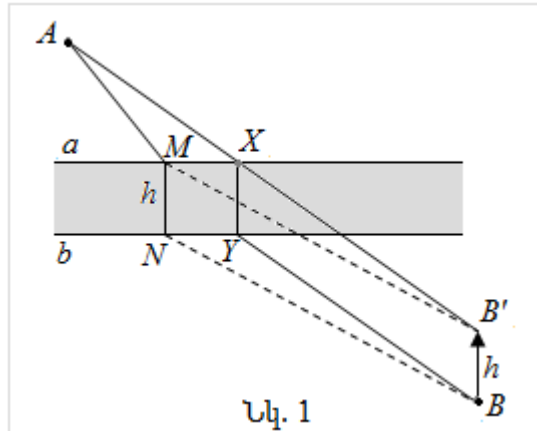
Keywords: plane, parallel transfer, symmetry, rotation, homothety, construction, time, angle, degree, minute, hour.

Երկրաչափության

դպրոցական և բուհական ծրագրերը պարունակում են հարթության *ձևափոխությունների* (զուգահեռ տեղափոխություն, կենտրոնական և առանցքային համաչափություն, պտույտ կետի շուրջ, հոմոտետիա և այլն) տեսություն, որը լայն կիրառություն ունի երկրաչափական կառուցման խնդիրների լուծման ժամանակ:

Մերկալեզու չգտնվելու համար բերենք մեկական օրինակ նշված ձևափոխությունների կիրառության վերաբերյալ:

Խնդիր 1. a և b զուգահեռ ավերով գետի տարբեր կողմերում գտնվում են A և B գյուղերը: Գետի վրա ո՞րտեղ պետք է կառուցել XY կամուրջը, որպեսզի այդ գյուղերը միացնող $AXYB$ ճանապարհը ունենա մինիմում երկարություն (նկ. 1):



Լուծում: Եթե գետի լայնությունը հավասար լիներ զրոյի, ապա լուծումը կլիներ AB հատվածը: Հետևաբար B գյուղը և գետի b ավեր զուգահեռ տեղափոխենք գետի լայնությանը հավասար և նրան ուղղահայաց h վեկտորի մեծությամբ: B կետի տեղափոխություննից ստացված կետը նշանակենք B' -ով: Կառուցենք AB' հատվածը: AB' -ի և a ուղղի հատման կետը նշանակենք X

-ով: Կառուցենք $XY \perp a$: Միացնենք Y -ը B -ի հետ, կստանանք որոնելի

Խնդիր 2. Տրված են $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ և A_5A_1 հնգանկյան կողմերի P_1, P_2, P_3, P_4 և P_5 միջնակետերը: Կառուցել $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ բազմանկյունը (նկ. 2):

$f(A_1) = A_1$, այսինքն՝ A_1 կետը այդ համաչափության անշարժ կետն է: Այդ կետը կառուցելու համար ընտրում ենք հարթության կամայական M կետ և իրագործում f համադրույթը: $M_5 = f(M)$: Այդ դեպքում A_1 կետը հանդիսանում է MM_5 հատվածի միջնակետը: Այնուհետև կառուցում ենք

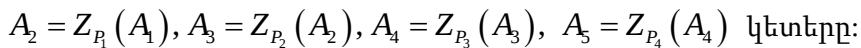


Figure 4 shows a rhombus $PQRS$ inscribed between three horizontal lines a , b , and c . A vertical line c' passes through vertices P and R . Vertex Q is on line b , and vertex S is also on line b . Arcs with arrows indicate a transformation from Q to R and from R to S .

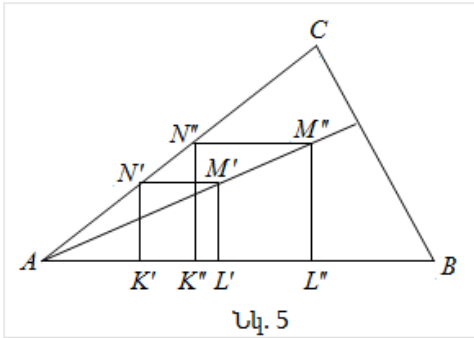
Լուծում: Եթե A' -ը A կետի համաչափն է MN ուղղի նկատմամբ, ապա, համաձայն սահմանման, $AP = A'P$ և $\angle MPA = \angle MPA' = 90^\circ$:

$\angle VXP = \angle VXP'$ հետևաբար՝
 $\angle PAX = \angle PAX'$: Այսպիսով B կետը
 պատկանում է $A'X$ ուղղին, այլ
 բառերով՝ X կետն ընկած է $A'B$
 ուղղի վրա: Հետևաբար X կետը
 կառուցվում է որպես $A'B$ և MN
 ուղիղների հատման կետ:

Խնդիր 4. Կառուցել քառակուսի այնպես, որ նրա երեք գագաթները պատկանեն տրված երեք գուգահեռ a, b և c ուղիղներին:

Հուշում: Դիցուք $PQRS$ -ն որոնելի քառակուսին է (նկ. 4), ընդ որում $P \in a, Q \in b, R \in c$: Q կետի շուրջ 90° -ով պտույտի դեպքում R -ը համընկնում է P -ի հետ, իսկ c ուղիղը ձևափոխվում է c' -ի, որը անցնում է P կետով, այնպես որ $P \equiv a \times c'$: Կառուցենք քառակուսու PQ կողմը,

որից հետո դժվար չէ կառուցել $PQRS$ քառակուսին:



Նկ. 5

1) նրա երկու գագաթները գտնվեն AB -ի վրա.

2) մի գագաթը AC -ի վրա.

3) մյուս գագաթը BC -ի վրա:

Նկատենք, որ դժվար չէ կառուցել առաջին երկու պայմաններին բավարարող քառակուսի: Թող դա լինի $K'L'M'N'$ քառակուսին (նկ. 5):

Ակնհայտ է, որ A կենտրոնով և P կամայական գործակցով հոմոտետիան $K'L'M'N'$ քառակուսին կձևափոխի $K''L''M''N''$ քառակուսու, բայց պարտադիր չէ, որ M'' կետը պատկանի եռանկյան BC կողմին: Որպեսզի լուծենք խնդիրը, անհրաժեշտ է հոմոտետիան ընտրել այնպես, որ M'' կետը հայտնվի եռանկյան BC կողմի վրա:

Դա տեղի կունենա, երբ M'' կետը հանդիսանա AM' ուղղի և BC ուղղի հատման կետ: Այստեղից էլ հետևում է հետևյալ կառուցումը:

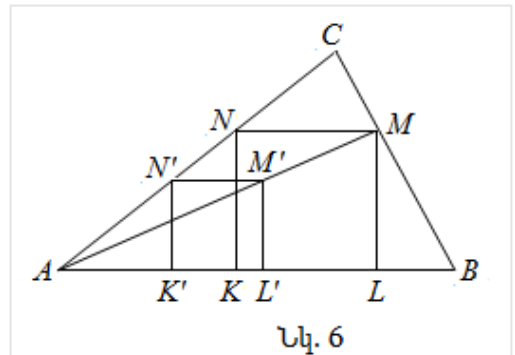
Կառուցում:

1. Կառուցում ենք կամայական $K'L'M'N'$ քառակուսի, որը բավարարում է 1) և 2) պայմաններին (նկ. 6):

2. Կառուցում ենք AM' ուղիղը և նշում նրա և BC ուղղի հատման M կետը:

3. M կետով տանում ենք ուղիղ գուգահեռ $M'N'$ -ին և AC հետ հատման կետը նշանակում N -ով:

4. M և N կետերից իջեցնում ենք ուղղահայացներ AB կողմին՝ ML և NK :



Նկ. 6



Նկ. 7

Ստացված $KLMN$ քառակուսին որոնելին է:

Հարթության ձևափոխություններից մի քանիսը կարելի է կիրառել ժամացույցի հետ կապված խնդիրները լուծելու համար:

Խնդիր 6. Ժամը 1-ն է: Քանի՞ րոպե հետո ժամացույցի սլաքները կունեն համաչափության կենտրոն, (նկ. 7): Այս և հաջորդ խնդիրներում սլաքների երկարությունները համարվում են մոտավորապես հավասար:

Լուծում: Ժամը 1-ին ժամացույցի մեծ սլաքը գտնվում է 12-ի վրա, իսկ փոքր սլաքը՝ 1-ի վրա: Մեծ սլաքը 60 րոպեում պտտվում է 360° -ով, հետևաբար 1 րոպեում պտտվում է 6° -ով: Փոքր սլաքը պտտվում է 12 անգամ դանդաղ մեծ սլաքից, հետևաբար 1 րոպեում պտտվում է $0,5^\circ$ -ով:

Խնդրում պահանջվում է, որ սլաքները որոշ ժամանակ հետո ունենան համաչափության կենտրոն, (նկ. 7) այսինքն, երբ սլաքների հատման O կետը կհանդիսանա սլաքների համաչափության կենտրոն, կամ քանի՞ րոպե հետո սլաքները կդասավորվեն մի ուղղի վրա:

Ենթադրենք դա տեղի կունենա t րոպե հետո: Այդ ժամանակահատվածում ժամացույցի մեծ սլաքը կգծի անկյուն հավասար $6^\circ t$, իսկ փոքր սլաքը՝ $0,5^\circ t$ անկյուն: Հետևաբար այդ անկյունների տարբերությունը կտա սլաքների սկզբնական դիրքի կազմած անկյունը, որը հավասար է 30° -ից հանած փոքր սլաքի գծած անկյունը՝ $0,5^\circ t$: Կազմենք հավասարում և լուծենք:

$$6^\circ t - (0,5^\circ t + 30^\circ) = 180^\circ \Rightarrow 5,5^\circ t = 210^\circ \Rightarrow 11^\circ t =$$

$$t = \frac{420^\circ}{11^\circ} = 38 \frac{2}{11} \text{ րոպե:}$$

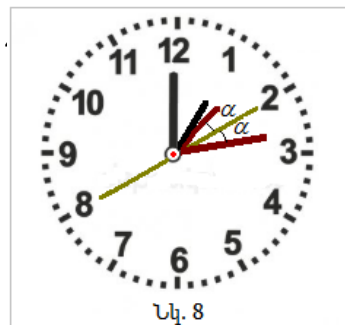
Խնդիր 7. Ժամը 1-ն է: Քանի՞ րոպե հետո ժամացույցի սլաքները կդասավորվեն համաչափ 2-8 ուղղի նկատմամբ, (նկ. 8):

2-8 ուղիղ ասելով՝ պետք է հասկանալ ժամացույցի 2 թիվը 8 թվին միացնող ուղիղը, որը անցնում է սլաքների հատման կետով:

Լուծում: Ժամը 1-ին սլաքների կազմած անկյունը հավասար է 30° -ի: Սլաքները 2-8 ուղղի նկատմամբ համաչափ դասավորվելու պահին ժամացույցի մեծ սլաքը գծել է $6^\circ t$ անկյուն, իսկ փոքր սլաքը՝ $0,5^\circ t$ անկյուն: Կազմենք հավասարում և այն լուծենք:

$$6^\circ t - 60^\circ = 30^\circ - 0,5^\circ t \Rightarrow 6,5^\circ t = 90^\circ \Rightarrow 13^\circ t = 180^\circ$$

$$t = \frac{180^\circ}{13^\circ} = 9 \frac{3}{13} \text{ րոպե:}$$



Նկ. 8



Նկ. 9

Խնդիր 8. Ժամը 3-ն է: Քանի՞ րոպե հետո ժամացույցի մեծ սլաքը կծածկի ժամացույցի փոքր սլաքը (նկ. 9):

Լուծում: Օգտագործելով ժամացույցի սլաքների պտտման արագությունների բանաձևերը՝ կազմենք հետևյալ հավասարումը:

$$6^{\circ}t - 0,5^{\circ}t = 90^{\circ} \Rightarrow 5,5^{\circ}t = 90^{\circ} \Rightarrow 11^{\circ}t = 180^{\circ} \Rightarrow t = \frac{180^{\circ}}{11^{\circ}} = 16\frac{4}{11} \text{ րոպե:}$$

Նկար 9-ում երևում է, որ փոքր սլաքը հորիզոնական դիրքից շեղվել է $1\frac{4}{11}$ րոպեի չափ, որը համընկում է հաշվարկների արդյունքի հետ:

Խնդիր 9. Ժամը 3- ն է : Քանի՞ րոպե հետո ժամացույցի սլաքները կկազմեն ուղիղ անկյուն:

Լուծում: Կազմենք հավասարում,

$$6^{\circ}t - 90^{\circ} - 0,5^{\circ}t = 90^{\circ} \Rightarrow 5,5^{\circ}t = 180^{\circ};$$

որի իմաստը բխում է նկ. 10-ից:

$$11^{\circ}t = 360^{\circ} \Rightarrow t = 32\frac{8}{11} \text{ րոպե:}$$

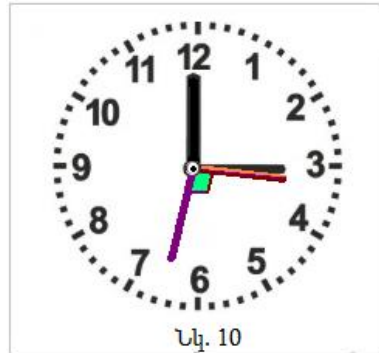
Խնդիր 10. Ժամը 9-ն է : Քանի՞ րոպե հետո ժամացույցի մեծ սլաքը կծածկի ժամացույցի փոքր սլաքը (նկ. 11):

Լուծում: Ժամացույցի մեծ սլաքը t րոպեում կգծի $6^{\circ}t$ անկյուն, որը իր մեջ ներառում է 270° -ի անկյունը և գումարած փոքր սլաքի գծած $0,5^{\circ}t$ անկյունը: Կազմենք հավասարումը և լուծենք:

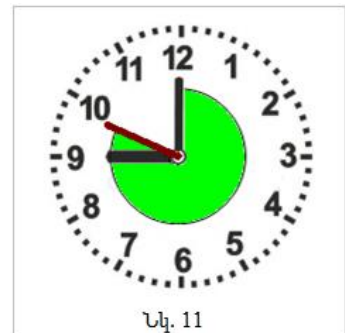
$$6^{\circ}t = 9 \cdot 30^{\circ} + 0,5^{\circ}t \Rightarrow 5,5^{\circ}t = 270^{\circ}$$

Լուծելով հավասարումը կստանանք՝

$$11^{\circ}t = 540^{\circ} \Rightarrow t = 49\frac{1}{11} \text{ րոպե:}$$



Նկ. 10



Նկ. 11

Գրականություն

1. Б.И.Аргунов, М.Б.Балк, Геометрические построения на плоскости. Учпедгизд, 1957.
2. Ռ.Լ.Առաքելյան, Մաթեմատիկա, Ձեռնարկ տարրական կրթության մեթոդիկա մասնագիտության համար, մաս IV, Երևան, Չանգակ-97, 2010:
3. И.Я.Яглом, Геометрические преобразования, М.ГИИТЛ, 1956.

Հոդվածը տպագրության է նրաշխարհում խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Տ.Սահակյանը: