

ԱՆԱՆԻԱ ՇԻՐԱԿԱՑՈՒ ԹՎԱՐԱՆԱԿԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԳԱՐԵԳՐԻ, ՊԵՏՐՈՍԱՆ

Անանիա Շիրակացու թվարանական աղյուսակները հայտնաբերել ու հրատարակել է պրոֆ. Ա. Գ. Աբրահամյանը 1939, 1944 թվականներին¹։ Անցած շուրջ 40 տարիների ընթացքում աղբյուրագետների և մաթեմատիկայի պատմաբանների հրատարակած մենագրություններում ու առանձին հոդվածներում լուսաբանվել են այդ աղյուսակների իմաստն ու նշանակությունը։

Մատենադարանի ավագ գիտական աշխատակից Ա. Ս. Մաթևոսյանը իր «Նորահայտ պատառիկներ Անանիա Շիրակացու թվաբանության դասագրքից» հոդվածում², անտեսելով Շիրակացու «վեցհազարեակը», փորձում է ցույց տալ, որ այդ պատառիկներից մեկում գտնվում է Անանիա Շիրակացու թվաբանության բաժանման աղյուսակը։ Այդ կապակցությամբ նա գրում է. «Անանիա Շիրակացու թվաբանության դասագրքում գտնարման, հանման և բազմապատկման շարքում եղել է նույն սկզբունքով կազմված բաժանման գործողություն, ուր եռաշարի կենտրոնում Ա—Բ թվաշարքն է բաժանելին, նրանից ձախ՝ բաժանարարը, աջ՝ քանորդը, որը առաջին անգամ ներկայացվում է գիտական հասարակայնությանը»³։

Այս կապակցությամբ հարկ ենք համարում համառոտակի անդրադառնալ Շիրակացու թվաբանական աղյուսակներին, հատկապես «վեցհազարեակին»։

Հայտնի է, որ Հայաստանում գոյություն է ունեցել թվարկության այբբենական համակարգ, որտեղ «ա»-ից մինչև «թ» տառը ներառյալ եղել են միավորներ, «ժ»-ից մինչև «ղ»՝ տասնավորներ, «ճ»-ից մինչև «ք»՝ հարյուրավորներ, «ռ»-ից մինչև «բ»՝ հազարավորներ (տե՛ս աղյուսակը)։

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Միավորներ	ա	բ	գ	դ	ե	զ	է	ը	թ
Տասնավորներ	ժ	ի	լ	խ	ծ	կ	հ	ձ	ղ
Հարյուրավորներ	ճ	մ	յ	ն	շ	ո	չ	պ	փ
Հազարավորներ	ռ	ս	վ	տ	ր	ց	ւ	փ	բ

¹ Երևանի պետական համալսարանի գիտական աշխատությունների ժողովածու, Երևան, 1939, № 11, էջ 245—274, Ա. Գ. Աբրահամյան, Անանիա Շիրակացու մատենագրությունը, Երևան, 1944, էջ 50—64.

² Ա. Ս. Մաթևոսյան, Նորահայտ պատառիկներ Անանիա Շիրակացու թվաբանության դասագրքից (ՀՍՍՀ ԳԱ «Լարներ», 1974, № 6, էջ 65—76)։

³ Նույն տեղում, էջ 72.

Գրուիլյան մեջ թիվ արտահայտող տառը տարբերելու համար վերջինիս վրա հորիզոնական դիծ է քաշվել կամ տառի սկզբում և վերջում գրվել է կետ. Մեծ թվեր գրելու համար օգտագործվել են այբուգենի տառերը՝ լրացուցիչ նշաններով, Այսպես, օրինակ, $\omega = 10000$, այսինքն՝ մեկ բյուր, $\chi = 100000$, այսինքն՝ տասը բյուր:

Այբբենական համակարգով իմպրանական շորս գործողությունները ընդհանուր դեպքում կատարելու համար անհրաժեշտ են եղել օժանդակ աղյուսակներ, Այդ նպատակին են ծառայել Անանիա Շիրակացու կազմած թվաբանական աղյուսակները: Խնդրո առարկա հարցը հստակ պատկերացնելու համար ստորև զետեղում ենք մեկական օրինակ գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման աղյուսակներից:

Գումարում

« ս տ	$2000 + 2000 = 4000$
ս վ բ	$2000 + 3000 = 5000$
ս տ ց	$2000 + 4000 = 6000$
ս բ լ	$2000 + 5000 = 7000$
ս ց փ	$2000 + 6000 = 8000$
ս լ ք	$2000 + 7000 = 9000$
ս փ ա	$2000 + 8000 = 10000$
ս ք ա ո	$2000 + 9000 = 11000$

Հանում

« ա ք	$10000 - 1000 = 9000$
« ք փ	$9000 - 1000 = 8000$
« փ լ	$8000 - 1000 = 7000$
« լ ց	$7000 - 1000 = 6000$
« ց բ	$6000 - 1000 = 5000$
« բ տ	$5000 - 1000 = 4000$
« տ վ	$4000 - 1000 = 3000$
« վ ս	$3000 - 1000 = 2000$
« ս ո	$2000 - 1000 = 1000$

Բազմապատկում

ք ա ք	$9000 \times 1 = 9000$
ք բ ա փ	$9000 \times 2 = 10^4 + 8000$
ք բ լ	$9000 \times 3 = 2 \cdot 10^4 + 7000$
ք դ գ ց	$9000 \times 4 = 3 \cdot 10^4 + 6000$
ք ե դ բ	$9000 \times 5 = 4 \cdot 10^4 + 5000$
ք զ ե տ	$9000 \times 6 = 5 \cdot 10^4 + 4000$
ք է դ վ	$9000 \times 7 = 6 \cdot 10^4 + 3000$
ք բ է ս	$9000 \times 8 = 7 \cdot 10^4 + 2000$
ք թ բ ո	$9000 \times 9 = 8 \cdot 10^4 + 1000$

Հայտնի է, որ Շիրակացու ժամանակ գումարման, հանման, բազմապատկման և հաժախման նշաններ չեն եղել: Հանման գործողությունից երևում է, որ այդ ժամանակ նախ գրել են հանելին, հետո նվազելին: Մեր թվարկությունից շատ գարեւ առաջ բաբելացիք, հավանաբար նաև ուրարտացիք, նույնպես հանելին գրել են նվազելիից առաջ:

Բաժանում

Շիրակացու «վեցհազարեակը» կամ հակադարձ մեծությունների աղյուսակը նոր նշանակումներով ունի հետևյալ տեսքը⁴:

1	6000	6000	21	285	6000
2	3000	6000	22	273	6000
3	2000	6000	23	260	6000
4	1500	6000	24	250	6000
5	1200	6000	25	240	6000
6	1000	6000	26	230	6000
7	857	6000	27	222	6000
8	750	6000	28	214	6000
9	665	6000	29	206	6000
10	600	6000	30	200	6000
11	545	6000	. . .	...	
12	500	6000	. . .	...	
13	462	6000	98	61	6000
14	428	6000	99	60	6000
15	400	6000	100	60	6000
16	375	6000	200	30	6000
17	353	6000	...	..	
18	333	6000	...	..	
19	315	6000	900	6	6000
20	300	6000	1000	6	6000
			2000	3	6000
			3000	2	6000
				.	
				.	
			9000	1	6000

Բացի վեցհազարյակից, Մ. Մաշտոցի անվան Մատենադարանի № 1973 ձեռագրում պահպանվել են նաև այլ թվերի համար կազմված աղյուսակներ, բերենք այդ աղյուսակներից երկուսը՝ նոր նշանակումներով⁵:

1	5000	5000	1	4000	4000
2		2500	2		2000
3		1666	3		1333
4		1250	4		1000
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

⁴ Ա ն ա ն ի ա Շ ի ր ա կ ա ջ ի, Մատենադրություն, Թարգմանությունը, առաջարանը և ծանոթագրությունները Ա. Գ. Աբրահամյանի և Գ. Բ. Պետրոսյանի, Երևան, 1979, էջ 42—48:

⁵ Գ. Բ. Պետրոսյան, Մաթեմատիկան Հայաստանում հին և միջին դարերում, Երևան, 1959, էջ 69:

Պատասխանության տեսակետից այս աղյուսակը կստացվի, եթե հակադարձ մեծությունների աղյուսակում վերջին երկու սյունակների տեղերը փոխենք⁶:

Այժմ անդրադառնանք վեցհազարյակին նախորդող երկու աղյուսակներին, որոնք ունեն «դարձ» (զույգ) և «կոճատք» (կենտ) վերնագրերը: Այժմյան նշանակումներով այդ աղյուսակներն ունեն հետևյալ տեսքը⁷:

Զույգ թվեր

2	4	6	8
2.10	4.10	6.10	8.10
2.10 ²	4.10 ²	6.10 ²	8.10 ²
2.10 ³	4.10 ³	6.10 ³	8.10 ³
2.10 ⁴	4.10 ⁴	6.10 ⁴	8.10 ⁴
2.10 ⁵	4.10 ⁵	6.10 ⁵	8.10 ⁵
2.10 ⁶	4.10 ⁶	6.10 ⁶	8.10 ⁶
2.10 ⁷	4.10 ⁷	6.10 ⁷	8.10 ⁷
2.10 ⁸	4.10 ⁸	6.10 ⁸	8.10 ⁸
2.10 ⁹	4.10 ⁹	6.10 ⁹	8.10 ⁹
2.10 ¹⁰	4.10 ¹⁰	6.10 ¹⁰	8.10 ¹⁰

Կենտ թվեր

1	3	5	7	9
1.10	3.10	5.10	7.10	9.10
1.10 ²	3.10 ²	5.10 ²	7.10 ²	9.10 ²
1.10 ³	3.10 ³	5.10 ³	7.10 ³	9.10 ³
1.10 ⁴	3.10 ⁴	5.10 ⁴	7.10 ⁴	9.10 ⁴
1.10 ⁵	3.10 ⁵	5.10 ⁵	7.10 ⁵	9.10 ⁵
1.10 ⁶	3.10 ⁶	5.10 ⁶	7.10 ⁶	9.10 ⁶
1.10 ⁷	3.10 ⁷	5.10 ⁷	7.10 ⁷	9.10 ⁷
1.10 ⁸	3.10 ⁸	5.10 ⁸	7.10 ⁸	9.10 ⁸
1.10 ⁹	3.10 ⁹	5.10 ⁹	7.10 ⁹	9.10 ⁹
1.10 ¹⁰	3.10 ¹⁰	5.10 ¹⁰	7.10 ¹⁰	9.10 ¹⁰

Այս աղյուսակներում զետեղված բոլոր թվերի համար «վեցհազարեակի» օրինակով կազմված են եղել բաժանման օժանդակ աղյուսակներ:

Շիրակացու վերը նշված թվարանական օժանդակ աղյուսակները հնարավորություն են տվել կատարելու բոլոր 4 գործողությունները՝ ընդհանուր դեպքում: Գումարման և հանման գործողությունները համեմատաբար հեշտ են: Այստեղ կանգ կառնենք բազմապատկման և բաժանման գործողությունների վրա:

Եթե մեր օրերում յուրաքանչյուր դպրոցական, իմանալով սովորական բազմապատկման աղյուսակը, հնարավորություն ունի թվարկության տաս-

⁶ Բերված աղյուսակներում, որոշ դեպքերում, թվերը կտրացված են:

⁷ Անահիտ Շիրակացու, Մատենադրություն, էջ 49:

նորդական դիրքային համակարգում հեշտությամբ բազմապատկելու բազմանիշ թվեր, ապա այդպես չի եղել հին և միջնադարյան Հայաստանում:

Օրինակ՝ 675X894 ոհն պղղ

675	ոհ				
894	պղղ				
2700	ոպ ող ող	480000	54000	2400	536400
6075	հպ հղ հղ	56000	6300	280	62580
5400	կպ կղ եղ	4000	450	20	4470
603450		540000	60750	2700	603450

Տասնորդական դիրքային համակարգով գրված բազմանիշ թվերը բազմապատկելու այժմյան կանոնով բազմապատկելին բազմապատկում ենք բազմապատկիչի յուրաքանչյուր թվանշանով. ընդ որում, ամեն անգամ ստացված թվի միավորը գրում ենք, իսկ տասնավորը մտքում պահում և ավելացնում հաջորդ անգամ ստացվող թվի միավորին: Դրա շնորհիվ ստացվում է այնքան մասնակի արտադրյալ, որքան թվանշան կա բազմապատկիչի մեջ՝ անկախ բազմապատկելիի թվանշանների թվից:

Այբբենական՝ ոչ-դիրքային համակարգում մտքում պահելու հանգամանքը բացառվում է, ուստի թվերից մեկի յուրաքանչյուր թվանշան բազմապատկվում է մյուսի յուրաքանչյուր թվանշանով և արդյունքն անմիջապես գրվում: Այսպիսով, ստացվում են այնքան մասնակի արտադրյալներ, որքան կստացվի. եթե բազմապատկենք բազմապատկիչների թվանշանների քանակները: Այնուհետև այդ մասնակի արտադրյալները գումարվում են ցանկացած հերթականությամբ:

Իներենք հակադարձ թվերի աղյուսակների օգնությամբ բաժանում կատարելու մի օրինակ. ցլըբ. բաժանել .իգ. վրա՝ 6532:23. հարկ է 23-ի վրա բաժանել 6000, 500 և 30-ը, որի համար պետք է օգտվել այդ թվերի համար կազմած հակադարձ թվերի աղյուսակներից.

$$6000:23=260 \text{ և } 20 \text{ մնացորդ.}$$

$$500:23=21 \text{ և } 17 \text{ մնացորդ} \quad 46:23=2$$

$$30:23=1 \text{ և } 7 \text{ մնացորդ} \quad 260+21+1+2=284$$

$$2+20+17+7=46 \quad 6532:23=284$$

Այժմ անցնենք Ա. Ս. Մաթևոսյանի այս հարցին տված մեկնաբանությունը:

Նա գրում է. «Եիրակացու մոտ թվերի հիմնական շարքը, որի շուրջ կատարվում են գործողությունները, հայոց այբուբենի Ա—Ք տառերն են թվական արժեքներով, որոնք վերից վար գրվում են գործողության կենտրոնում. լինի հանում, գումարում, բազմապատկում, տրամաբանորեն նաև բաժանում: Ուրեմն գումարման մեջ այն առաջին գումարելին է, հանման մեջ՝ նվազելին, բազմապատկման մեջ՝ բազմապատկելին, բաժանման մեջ պետք է լինի բաժանելին: Սրանք գրվում են եռաշարի կենտրոնում: Գումարելին, հանելին, բազմապատկիչը գրվում են նրանցից ձախ, այսինքն՝ կազմում են առաջին շարքը: Այդտեղ պետք է լինի նաև բաժանաբարը: Եվ վերջապես հիմ-

նական թվաշարքից աջ են գտնվում գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը: Տրամաբանորեն այդտեղ պետք է լինի նաև քանորդը՝ Ահա այն.

Գումարում				Հանում				Բազմապատկում			
բ	ա	գ	$2+1=3$	բ	ժա	թ	$2-11=9$	բ	ա	բ	$2\times 1=2$
բ	բ	դ	$2+2=4$	բ	ժ	լ	$2-10=8$	բ	բ	դ	$2\times 2=4$
բ	գ	ե	$2+3=5$	բ	թ	է	$2-9=7$	բ	գ	զ	$2\times 3=6$
բ	դ	զ	$2+4=6$	բ	լ	զ	$2-8=6$	բ	դ	լ	$2\times 4=8$
բ	ե	է	$2+5=7$	բ	է	ե	$2-7=5$	բ	ե	ժ	$2\times 5=10$
բ	զ	ը	$2+6=8$	բ	զ	դ	$2-6=4$	բ	զ	ժբ	$2\times 6=12$
բ	է	թ	$2+7=9$	բ	ե	զ	$2-5=3$	բ	է	ժդ	$2\times 7=14$
բ	լ	ժ	$2+8=10$	բ	դ	բ	$2-4=2$	բ	լ	ժզ	$2\times 8=16$
				բ	զ	ա	$2-3=1$	բ	թ	ժլ	$2\times 9=18$

Բաժանումը պետք է լինի

«Վեցհազարեակ»

բ	ա	յ	$2:1=1/2$
բ	բ	ա	$2:2=1$
բ	գ	յ ա	$2:3=1\ 1/2$
բ	դ	բ	$2:4=2$
բ	ե	յ բ	$2:5=2\ 1/2$
բ	զ	զ	$2:6=3$
բ	է	յ գ	$2:7=3\ 1/2$
բ	լ	դ	$2:8=4$
բ	թ	յ դ	$2:9=4\ 1/2$

ա	ց	ց	$1=6000:6000$
բ	վ	ց	$2=3000:6000$
գ	ս	ց'	$3=2000:6000$
դ	ռ	ց	$4=1500:6000$
ե	ռմ	ց	$5=1200:6000$
զ	ռ	ց	$6=1000:6000$
է	պժէ	ց	$7=857:6000$
լ	լժ	ց	$8=750:6000$
թ	ռկէ	ց	$9=667:6000$

«Վեցհազարեակը», ինչպես տեսնում ենք, մյուսների նման չէ՝ ծրկրորդում՝ պատահական թվեր են, որ պետք է հարմարվեն առաջինին, որպեսզի երրորդ շարքում, ամեն դեպքում, ստացվի վեց հազար⁸:

Այստեղ թվաբանական գործողությունները ժամանակակից նշանակումներով ճիշտ են գրված միայն գումարման և բազմապատկման աղյուսակներում, իսկ մյուս երեք աղյուսակներում սխալ են. չի կարելի գրել՝ $2-8=6$,

$2:7=3\frac{1}{2}$, $2=3000:6000$ և այլն:

Բաժանման աղյուսակը ամբողջությամբ սխալ է, որովհետև պարունակում է կոտորակներ, օժանդակ աղյուսակները կոտորակներ չեն պարունակում:

Եթե մենք Ա. Ա. Մաթևոսյանի բերած բազմապատկման աղյուսակում բազմապատկիչի և արտադրյալի տեղերը փոխենք, կստանանք հետևյալ աղյուսակը.

⁸ Ա. Ս. Մաթևոսյան, Նշվ. հոդվ., էջ 71—72:

բ	բ	ա	2	2	1
բ	դ	բ	2	4	2
բ	զ	զ	2	6	3
բ	ը	դ	2	8	4
բ	ժ	ե	2	10	5
բ	ժբ	զ	2	12	6
բ	ժդ	է	2	14	7
բ	ժզ	ը	2	16	8
բ	ժը	թ	2	18	9

Նման ձևով կարելի է կազմել այնքան բաժանման աղյուսակներ, որքան բազմապատկման աղյուսակների թիվն է:

Այժմ տեսնենք, թե ինչ է իրենից ներկայացնում Ա. Ս. Մաթևոսյանի հայտնաբերած աղյուսակը:

$\alpha(F)$	(1)	(ժ)ե	2	30	15
(բ)	(հ)	Ի	2	40	20
(բ)	(Ծ)	Իե	2	50	25
(բ)	(Ճ)	Ծ	2	100	50
(բ)	(Մ)	Ճ	2	200	100
(բ)	(3)	ՃՄ	2	300	150
(բ)	ն	Մ	2	400	200
(բ)	(Շ)	Մ(3)	2	500	250
(բ)	(Ո)	3	2	600	300
(բ)	(Զ)	3Մ	2	700	350
(բ)	Պ	ն	2	800	400
(բ)	Ջ	նՄ	2	900	450
(բ)	Թ	Շ	2	1000	500
(բ)	(Ա')	Բ	2	10000	5000

Համեմատելով այս աղյուսակը նախորդ աղյուսակի հետ, հեշտ է նկատել, որ դրանք մեկ ամբողջական աղյուսակի տարբեր մասերն են: Այդ ամբողջական աղյուսակը հեշտությամբ ստացվում է բազմապատկման ամբողջական աղյուսակից, երբ բազմապատկիչի և արտադրյալի տեղերը փոխում ենք: Այս աղյուսակները մենք կարող ենք դիտել որպես բաժանման օժանդակ աղյուսակներ, սակայն դրանց օգնությամբ չենք կարող կատարել բաժանումը՝ ընդհանուր դեպքում:

Ընդհանուր դեպքում բաժանումը կատարելու համար պետք է դիմել Շիրակացու «վեցհազարեակին» և այլ թվերի համար նման եղանակով կազմված օժանդակ աղյուսակների՝ որպիսին նշված է հոդվածի սկզբում:

Ա. Ս. Մաթևոսյանը չի ըմբռնել Շիրակացու «վեցհազարեակի» ու դրան նախորդող աղյուսակների էությունը: Թերի և ոչ էական նշանակություն ունեցող մի աղյուսակի ընդհանրացմամբ նա հանգել է սխալ եզրակացության: Նրա հայտարարությամբ՝ ինքն է առաջին անգամ հայտնաբերել Անանիա Շի-

յակացու բաժանման աղյուսակները, մինչդեռ դրանք դիտություն պատմությանը հայտնի են 1940-ական թվականներից և իրենց արտացոլումն են գտել հայերեն և ռուսերեն լեզուներով մաթեմատիկայի պատմությանը նվիրված աշխատություններում¹⁰։

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦАХ АНАНИИ ШИРАКАЦИ

ГАРЕГИН ПЕТРОСЯН

Резюме

В статье излагается краткое содержание четырех арифметических таблиц сложения, вычитания, умножения и деления (шеститысячника) учебника арифметики Анании Ширакаци, показывается как в древности и средние века в алфавитной системе счисления выполнялись арифметические действия.

А. С. Матевосян («Вестник», 1974, № 6), не разобравшись в таблице деления Ширакаци и ошибочно истолковав одну не характерную таблицу, приписывает себе открытие таблицы деления Анании Ширакаци, в то время как таблица была известна еще в 1940-х годах.

¹⁰ Գ. Բ. Պետրոսյան, Անանիա Շիրակացու թվաբանության դասագիրքը և նրա նշանակությունը մաթեմատիկայի պատմության համար (ՀՍՍՀ ԳԱ «Տեղեկագիր» (հաս. գիտ.), 1946, № 11—12, էջ 35—37), Գ. Բ. Պետրոսյան, Մաթեմատիկական Հայաստանում հին և միջին դարերում, էջ 67—70; Ա. Գ. Աբրամյան, Գ. Բ. Պետրոսյան, Անանիա Շիրակացու, Երևան, 1970, շ. 36—60; Գ. Բ. Պետրոսյան, Об алфавитных системах счисления («Историко-математические исследования», вып. XXIII, М., 1978, с. 153—155).