

ՀՏԴ 413.813

Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ.

e-mail Gurgen250612@mail.ru

ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԿԵՏԻ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Թեմայի ուսումնասիրության նպատակն է տալ հարթության վրա կետի աստիճանի հասկացությունը և նրա հատկությունները: Ապացուցված է, որ եթե M կետով անցնող ℓ ուղիղը հատում է S շրջանագիծը A և B կետերում, ապա $MA \cdot MB$ արտադրյալը վերցրված իր նշանով կախված չէ ℓ ուղիղի ընտրությունից: Ապացուցված է, որ եթե M կետով անցնող ℓ և ℓ_1 ուղիղները հատում են Z ցիկլը համապատասխանաբար A, B և A_1, B_1 կետերում, ապա $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1$ արտադրյալը վերցված իր նշանով կախված չէ ℓ և ℓ_1 ուղիղների ընտրությունից:

Բանալի բառեր՝ կետի աստիճան, աստիճանի նշան, շրջանագիծ, համարժեք անկյուններ, համեմատական հատվածներ, ցիկլ, արտադրյալ, ռադիկալ առանցք, ռադիկալ կենտրոն:

Г.НАЛБАНДЯН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТЕПЕНИ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

Цель исследования – дать понятие степени точки на плоскости и ее свойства. Доказано, что, если прямая ℓ , проходящая через точку M , пересекает окружность S в точках A и B , то произведение $MA \cdot MB$, взятое со знаком, не зависит от выбора прямой ℓ . Доказано, что, если прямые ℓ и ℓ_1 , проходящие через точку M , пересекают цикл Z в соответствующих точках A, B и A_1, B_1 , то произведение $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1$ взятое своим знаком, не зависят от выбора прямых ℓ и ℓ_1 .

Ключевые слова: степень точки, знак степени, круг, эквивалентные углы, сравнительные отрезки, цикл, эквивалентные углы, сравнительные отрезки, цикл, производная, радикальная ось, радикальный центр.

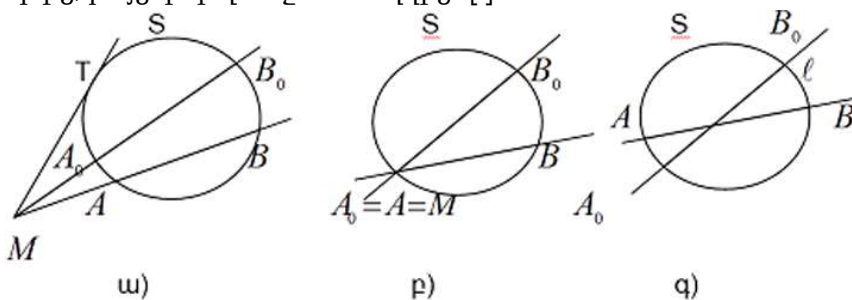
G.NALBANDYAN

SOME PROPERTIES OF A POINT'S DEGREE ON A PLANE

The purpose of the study is to give the concept of the degree of a point on a plane and its properties. It is proved that if the straight line ℓ passing through the point M intersects the circle S , at points A and B , then multiplication $MA \cdot MB$ the, taken with a sign does not depend on the choice of a straight line. It is proved that if lines ℓ and ℓ_1 passing through a point M intersect the Z cycle at corresponding to the points, A, B and A_1, B_1 , then the multiplication $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1$ taken by their sign, do not evoke from the choice of direct lines ℓ and ℓ_1 .

Key words: degree of the point, degree of the mark, circle, equivalent angles, comperative lines, radical cycle.

Հայտնի է, որ եթե M կետով անցնող ℓ ուղիղը հատում է S շրջանագիծը և կետերում, ապա $MA \cdot MB$ արտադրյալը կախված է միայն M կետից և S շրջանագծից, բայց կախված չէ ℓ ուղիղից [1]:



նկ.1

Համարվում է $MA \cdot MB$ արտադրյալը դրական, եթե MA և MB հատվածները համուղղված են, հակառակ դեպքում՝ բացասական: + կամ - նշանով վերցված արտադրյալը կոչվում է M կետի աստիճան S շրջանագծի նկատմամբ՝

$$MA \cdot MB \quad (1)$$

Պարզ է, որ այդ աստիճանը կլինի դրական, եթե M կետը S շրջանագծից դուրս է, հավասար կլինի զրոյի, եթե M կետը կլինի շրջանագծի վրա, իսկ եթե M -ը գտնվում է շրջանագծի ներսում, ապա այդ աստիճանը բացասական է: Եթե M կետը շրջանագծից դուրս է, ապա M կետի աստիճանը շրջանագծի նկատմամբ հավասար է M կետով S շրջանագծին տարված MT շոշափողի երկարության քառակուսուն [2]:

Եթե $MQ = d$, որտեղ Q -ն r շառավղով S շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ ℓ ուղիղը անցնում է Q կետով և հատում է S շրջանագիծը A_0 և B_0

կետերում, ապա MA_0 և MB_0 հատվածներից մեկի երկարությունը հավասար է $d + r$, իսկ երկրորդի երկարությունը հավասար է $d - r$:

Հետևաբար, $MA \cdot MB$ արտադրյալի նշանի հաշվման համար բավական է վերցնել $(d - r)$ տարբերության նշանը, այսինքն՝ M կետի աստիճանը S շրջանագծի նկատմամբ կլինի հավասար

$$d^2 - r^2 \quad (2)$$

արտահայտությամբ:

Այդ պատճառով, եթե M և Q կետերի կոորդինատները համապատասխանաբար հավասար են (x_0, y_0) և (a, b) , ապա M կետի աստիճանը շրջանագծի նկատմամբ հավասար է

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 \quad (2')$$

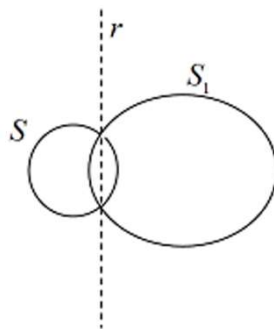
արտահայտությամբ: Հայտնի է, որ S շրջանագծի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \quad (3)$$

կամ

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0 \quad (3')$$

որտեղ. $p = -a$, $q = -b$, $f = a^2 + b^2 - r^2$:



նկ.2

Հետևաբար, $M(x_0, y_0)$ կետի աստիճանը շրջանագծի նկատմամբ հավասար է (3) հավասարության ձախ մասին, եթե x և y կոորդինատների փոխարեն տեղադրենք M կետի x_0 և y_0 կոորդինատները: Եթե մի քանի կետեր, որոնք տրված են (2')-ի տեսքով և ունեն միևնույն k աստիճանը, ապա (3) հավասարությունը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = k,$$

կամ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (r^2 - k) = 0:$$

Այսինքն, այն իրենից ներկայացնում է շրջանագիծ, որը նման է տրված S շրջանագծին:

Եթե մի քանի կետեր ունեն միևնույն աստիճանը S շրջանագծի նկատմամբ տրված $(3')$ տեսքով և S_1 շրջանագծի նկատմամբ տրված

$$x^2 + y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1 = 0 \quad (3'')$$

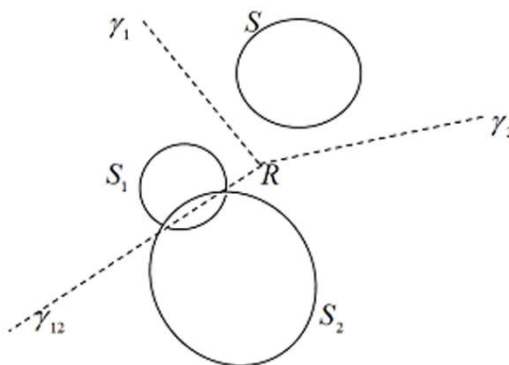
հավասարումով, ապա

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = x^2 + y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1,$$

կամ

$$2(p - p_1)x + 2(q - q_1)y + (f - f_1) = 0 :$$

Այսինքն, իրենից ներկայացնում է r ուղիղ գիծ(նկ. 2): Բացառություն է կազմում այն դեպքը, երբ $p = p_1$ և $q = q_1$, այսինքն՝ S և S_1 շրջանագծերը հավասար են 3, 5:



նկ.3

Հետևաբար, S, S_1, S_2 շրջանագծերի ռադիկալ r_1, r_2, r_{12} առանցքները կամ զուգահեռ են իրար, կամ էլ հատվում են մեկ կետում՝ S, S_1, S_2 շրջանագծերի R ռադիկալ կենտրոնում (նկ. 3):

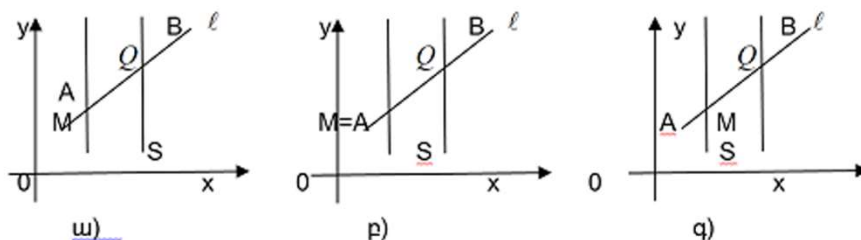
Այժմ ուսումնասիրենք Հալիլեյի երկրաչափությունը:

Ինչպես նշել ենք, որ M կետով անցնող կամայական ℓ ուղիղ, որը S շրջանագիծը հատում է A և B կետերում, ապա $MA \cdot MB$ արտադրյալը կախված է միայն M կետից և S շրջանագծից, բայց կախված չէ ℓ ուղղից, և այդ արտադրյալը անվանում են M կետի աստիճան S շրջանագծի նկատմամբ:

Եթե $d = MQ$ M կետի և S շրջանագծի Q կենտրոնի միջև եղած հեռավորությունն է, և $r = AQ = QB$ S -ի շառավիղն է, ապա MA և MB հատվածներից մեկը հավասար կլինի $d + r$, իսկ մյուսը՝ $d - r$, այսինքն Հալիլեյի երկրաչափությունում նույնպես M կետի աստիճանը S շրջանագծի նկատմամբ հավասար է.

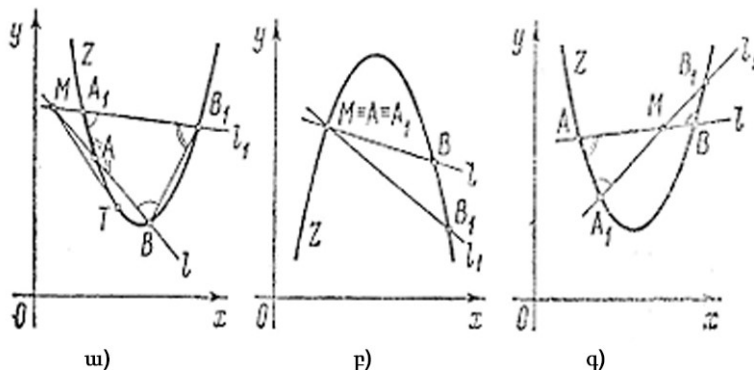
$$d^2 - r^2$$

արտահայտության [1], [3]:



նկ.4

Այժմ կատարենք նմանատիպ դատողությունները ցիկլի համար:



նկ.5

Թող M կետով անցնող ℓ և ℓ_1 ուղիղները հատում են Z ցիկլը համապատասխանաբար A, B և A_1, B_1 կետերում (նկ.5): Եթե $M \in Z$ -ին, ապա $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = 0$: Եթե $M \notin Z$ -ին, ապա $\angle ABB_1 = \angle AA_1B_1$ և $\angle A_1AB = \angle A_1B_1B$ ինչպես ցիկլին ներգծված անկյուններ հենված միևնույն լարի վրա:

Հետևաբար, MAA_1 և MB_1B եռանկյունները ունեն միևնույն անկյունները: Քանի որ եռանկյան կողմերը համեմատական են հանդիպակաց անկյուններին, ապա

$$\frac{MA}{MB_1} = \frac{MA_1}{MB},$$

կամ

$$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1:$$

Ինչն էլ ապացուցում է արտադրյալի (1) անկախությունը ℓ ուղղի ընտրությունից:

Այդ արտադրյալն անվանում են M կետի աստիճան Z -ի նկատմամբ: Պարզ է, որ կետի աստիճանը Z -ի նկատմամբ կլինի դրական, եթե կետը

գտնվում է Z -ից դուրս, հավասար կլինի զրոյի, եթե $M \in Z$ -ին, և կլինի բացասական, եթե M -ը գտնվում է Z -ի

ներսում: Եթե M կետի կոորդինատներն են x_0, y_0 և S ցիկլը հանդիսանում է երկու զուգահեռ ուղիղներ $x = x_1$ և $x = x_2$ (նկ.4), ապա MA և MB հատվածները հավասար են $x_1 - x_0$ և $x_2 - x_0$, այդ պատճառով M կետի աստիճանը S -ի նկատմամբ կլինի

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2):$$

Քանի որ S ցիկլի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad (4)$$

կամ

$$x^2 + 2bx + c = 0, \quad (4')$$

որտեղ $2b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 \cdot x_2$, M կետի աստիճանը ցիկլի նկատմամբ հավասար է $(4')$ հավասարման ձախ մասի արժեքին, եթե x և y կոորդինատների փոխարեն տեղադրենք x_0 և y_0 [2, 3]:

Մյուս կողմից, Z ցիկլը ունի հետևյալ ընդհանուր հավասարումը՝

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (5)$$

Իսկ $M(x_0, y_0)$ կետով անցնող ℓ ուղիղը ունի

$$y - y_0 = k(x - x_0): \quad (6)$$

հավասարումը:

Այդ դեպքում, ℓ ուղղի և Z ցիկլի հատման A և B կետերի (x_1, y_1) և (x_2, y_2) կոորդինատները որոշվում են (5)-(6) համակարգից: Իրոք, ձևափոխելով (6)-ը

$$y = kx + (y_0 - kx_0)$$

տեսքի և այն տեղադրելով (5)-ի մեջ՝ կստանանք

$$x^2 + 2(b_1 + kb_2)x + [2b_2(y_0 - kx_0) + c] = 0:$$

Ըստ Վիետի թեորեմի՝ կունենանք՝

$$x_1 + x_2 = -2(b_1 + kb_2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2b_2(y_0 - kx_0) + c:$$

Այդ պատճառով $M(x_0, y_0)$ կետի աստիճանը ցիկլի նկատմամբ հավասար է

$$x_0^2 + 2(b_1 + kb_2)x_0 + [2b_2(y_0 - kx_0) + c] = x_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c:$$

Հետևաբար, M կետի աստիճանը Z ցիկլի նկատմամբ հավասար է (5)-ի ձախ մասին, եթե x, y կոորդինատների փոխարեն տեղադրենք M կետի x_0, y_0 կոորդինատները:

Այսպիսով, եթե մի քանի կետեր ունեն միևնույն k աստիճանը ցիկլի նկատմամբ, ապա այն գրվում է հետևյալ կերպ՝

$$x^2 + 2bx + c = k,$$

կամ

$$x^2 + 2bx + (c - k) = 0:$$

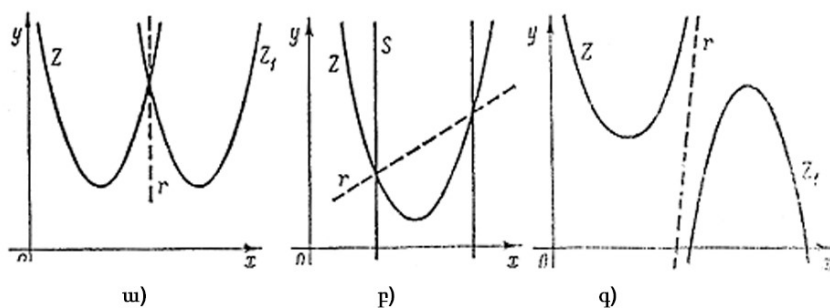
Այսպիսով, կունենանք

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = k,$$

կամ

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + (c - k) = 0,$$

այսինքն այն իրենից ներկայացնում է ցիկլ նման տրվածին:



նկ.6

Եթե մի քանի կետեր ունեն հավասար աստիճաններ S և S_1 շրջանագծերի նկատմամբ տրված $(3'), (3'')$ հավասարումներով, կամ $(4')$ և

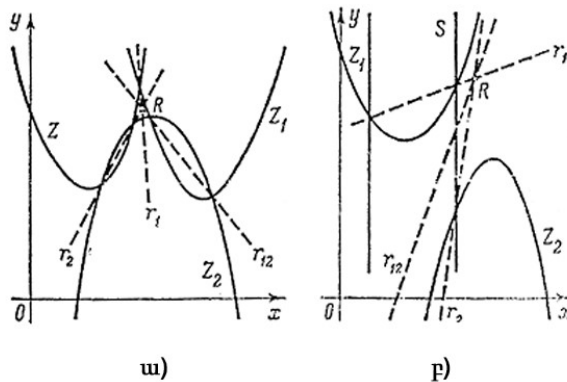
$$x^2 + 2b_1x + c_1 = 0 \quad (4'')$$

հավասարումներով, կամ S շրջանագծի տրված $(4')$ հավասարումով և Z ցիկլի տրված (5) հավասարումով, կամ էլ Z և Z' ցիկլերի նկատմամբ տրված երկու (5) և

$$x^2 + 2b_1^{(1)}x + 2b_2^{(1)}y + c_1 = 0 \quad (5')$$

հավասարումներով, իրենից ներկայացնում է r ուղիղը $[1], [4], [5]$:

Այդ ուղիղն անվանում են *ռադիկալ առանցք* (նկ.6):



նկ.7

Երկու շրջանագծերի ռադիկալ առանցքը կլինի հատուկ ուղիղ գիծ: Իրոք

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2b_1x + c,$$

որտեղից

$$x = \frac{c_1 - c}{2(b - b_1)} :$$

Մնացած դեպքերում ռադիկալ առանցքը կլինի սովորական ուղիղ գիծ:

Իրոք (5) և (5') ցիկլերի ռադիկալ առանցքի հավասարումը կլինի՝

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = x^2 + 2b_1^{(1)}x + 2b_2^{(1)}y + c$$

և որտեղից կստանանք

$$y = \frac{b_1^{(1)} - b_1}{b_2 - b_2^{(1)}} x$$

տեսքը:

Պարզ է, որ եթե երկու գծեր՝ ցիկլը և շրջանագիծը, կամ երկու ցիկլերը հատվում են P և Q կետերում, ապա այդ գծերի ռադիկալ առանցքը կլինի PQ ուղիղը (նկ.7):

Գրականություն

1. Понарин Я.П., Элементарная геометрия, М., 2004, 312 ст.
2. Прасолов В.В., Задачи по геометрии, в 2-х ч.-М, Наука, 1986.
3. Аргунов Б.И., Балк М.Б., Элементарная геометрия, М., 1966, 366 ст.
4. Яглом И.М., Геометрические преобразования, М., 1956, ч., 612 ст.
5. Атанасян Л.С., Васильева М.Б., Гуревич Г.Б., и др., Сборник задач по элементарной геометрии, М., 1975, 176 ст.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ. Սահակյանը: