

ՀՏԴ 539.3

Механика

Гурген ХАЧАТРЯН

к.ф.-м.н., доцент кафедры математики ШТУ

Гаянэ ПЕТРОСЯН

к.ф.-м.н., доцент кафедры математики АрГУ

E-mail: gayan-petrosian@mail.ru

РЕШЕНИЕ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

**Խաչատրյան Գ.Մ., Պետրոսյան Գ.Ա.
ՄԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՏԻՊԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ
ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՊԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԻ ԽԱՌԸ
ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՈՒՄ**

Աշխատանքը նվիրված է օրթոտրոպ գլանային թաղանթի սահմանային շերտի տիպի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի նկարագրմանն ու վերլուծությանը: Ենթադրվում է, որ գլանային թաղանթի ներքին և արտաքին մակերևույթների վրա տրված են համասեռ խառը եզրային պայմաններ, իսկ նրա եզրային կտրվածքների վրա կարող են տրված լինել առաձգականության տեսության տարբեր եզրային պայմաններ: Խնդրի լուծումը բերվում է սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների որոշման խնդրի: Ցույց է տրված, որ օրթոտրոպ նյութերի դեպքում սահմանային շերտի տիպի լուծումը տրոհվում է երկու տիպի լուծումների, որոնք նկարագրում են հարթ և հակահարթ սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակները:

Բանալի բառեր՝ ապիմպտոտիկ մեթոդ, օրթոտրոպ գլանային թաղանթ, խառը եզրային պայմաններ, սահմանային շերտի տիպի լուծում:

Обсуждается вопрос построения решения типа пограничного слоя для ортотропной цилиндрической оболочки. Предполагается, что на внешней поверхности оболочки заданы однородные значения нормального

напряжения и тангенциальных перемещений, на внутренней поверхности – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений. С помощью асимптотического метода построены решения типа пограничного слоя, выведено трансцендентные уравнения для определения собственных чисел, характеризующие скорости затухания найденных решений. Показано, что для ортотропных материалов решение типа пограничного слоя распадется на плоский и антиплоский пограничные слои.

Ключевые слова: асимптотический метод, ортотропная цилиндрическая оболочка, смешанные граничные условия, решение типа пограничного слоя.

Khachatryan G.M., Petrosyan G.A.
ON SOLUTIONS OF THE BOUNDARY LAYER TYPE
OF ONE MIXED BOUNDARY PROBLEM OF
ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

The question of constructing a solution of the boundary layer type for an orthotropic cylindrical shell. It is assumed that homogeneous values of normal stress and tangential displacements are set on the outer surface of the shell, and the values of normal displacement and tangential stresses on the inner surface. Using the asymptotic method, solutions of the boundary layer type are constructed, and a transcendental equation is derived to determine the eigenvalues characterizing the decay rates of the solution found. It is shown that, for orthotropic materials, a boundary-layer-type solution decomposes into plane and antiplane boundary layers.

Key words: asymptotic method, orthotropic cylindrical shells, mixed boundary conditions, boundary layer type solution.

Введение. Основные уравнения тонкой упругой анизотропной слоистой пластинки на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для пакета в целом получены С.Г. Лехницким [1]. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для пакета в целом, а так же уточненные теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены и развиты в известных монографиях С.А. Амбарцумяна [2,3]. Асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния произвольной изотропной оболочки разработан А.Л.Гольденвейзером [4,5]. На основе уравнений теории упругости, асимптотическим методом, классические и некоторые классы неклассических краевых задач для тонких анизотропных тел рассмотрены в монографиях [6,7]. В работе [8] построены итерационные процессы описывающие возможные напряженные состояния в первой краевой задаче для анизотропией цилиндрической оболочки. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки, на внешней и

внутренней поверхностях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсужден в работе [9]. Решения внутренней задачи и типа пограничного слоя для прямоугольной анизотропией пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные условия теории упругости, построены в работе [10]. Решение типа пограничного слоя для прямоугольной двухслойной анизотропией пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные однородные условия, построено в [11].

1. Пограничный слой ортотропной цилиндрической оболочки.

Рассматривается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния типа пограничного слоя в смешанной краевой задаче для ортотропной цилиндрической оболочки радиуса R , длиной L и толщиной $2h$ (рис. 1).

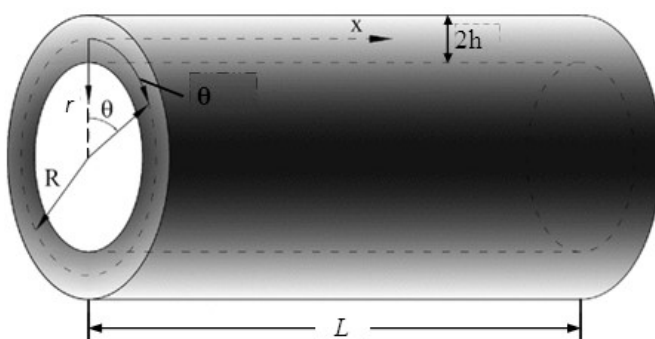


Рис. 1

Материал оболочки обладает цилиндрической анизотропией, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. На внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы следующие однородные условия теории упругости

$$\begin{aligned} u_x = 0, u_\theta = 0, \sigma_r = 0, \quad \text{когда } r = R + h, \\ \sigma_{rx} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, u_r = 0, \quad \text{когда } r = R - h, \end{aligned} \quad (1.1)$$

а на торцах $x = 0, L$ и краях $\theta = 0, \Theta$ ($0 < \Theta < 2\pi$) могут быть заданы произвольные краевые условия. При $\Theta = 2\pi$ имеем замкнутую цилиндрическую оболочку и вместо торцевых условий на краях $\theta = 0, \Theta$ необходимо задать условие периодичности напряжений и перемещений по θ .

Для решения поставленной задачи будем исходить из трехмерных уравнений теории упругости в цилиндрических координатах (x, r, θ) ($x \in [0; L], r \in [R - h; R + h], \theta \in [0; \Theta], 0 < \Theta \leq 2\pi$), в которые вводятся безразмерные координаты по формулам

$$t = \frac{x}{L}, \zeta = \frac{r - R}{h}, \varphi = \theta \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (1.2)$$

и безразмерные перемещения $U_r = u_r/R, U_\theta = u_\theta/R, U_x = u_x/R$, в результате чего уравнения теории упругости будут содержать малый геометрический параметр $\varepsilon = \sqrt{h/R}$.

Решение полученных уравнений отыскивается в виде функций типа пограничного слоя [6,7]

$$R_p = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\chi_p+s} R_p^{(s)}(\varphi, \zeta) \exp(-\lambda t), \quad (1.3)$$

где R_p любое из компонент напряжений и перемещений, при этом $\text{Re } \lambda > 0$, N – число приближений.

Непротиворечивые значения для χ_p подбираются следующим образом [6,7]:

$$\chi_\sigma = \chi, \chi_u = \chi + 2, \quad (1.4)$$

где χ произвольное число, которое определится из условия взаимодействия пограничного слоя с внутренним напряженным состоянием, λ характеризует изменяемость напряжений и перемещений пограничного слоя.

Подставляя (1.3), с учетом (1.4), в преобразованные уравнения теории упругости для ортотропных материалов, получим систему [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda \sigma_{xrp}^{(s)} + \zeta \frac{\partial \sigma_{rp}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - \lambda \zeta \sigma_{xrp}^{(s-2)} + \sigma_{rp}^{(s-2)} - \sigma_{\theta p}^{(s-2)} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda \sigma_{x\theta p}^{(s)} + \zeta \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - \lambda \zeta \sigma_{x\theta p}^{(s-2)} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xrp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda \sigma_{xp}^{(s)} + \zeta \frac{\partial \sigma_{xrp}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{x\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - \lambda \zeta \sigma_{xp}^{(s-2)} + \sigma_{xrp}^{(s-2)} &= 0, \\ -\lambda U_{xp}^{(s)} &= a_{11}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{12}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{13}\sigma_{rp}^{(s)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$a_{12}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{23}\sigma_{rp}^{(s)} - \frac{\partial U_{\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - U_{rp}^{(s-2)} + \zeta \left(a_{12}\sigma_{xp}^{(s-2)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{23}\sigma_{rp}^{(s-2)} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial U_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{23}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{33}\sigma_{rp}^{(s)},$$

$$\frac{\partial U_{\theta p}^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44}\sigma_{r\theta p}^{(s)} + \zeta a_{44}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} - \zeta \frac{\partial U_{\theta p}^{(s-2)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial U_{rp}^{(s-1)}}{\partial \varphi} + U_{\theta p}^{(s-2)},$$

$$\frac{\partial U_{xp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda U_{rp}^{(s)} = a_{55}\sigma_{xrp}^{(s)},$$

$$-\lambda U_{\theta p}^{(s)} = a_{66}\sigma_{x\theta p}^{(s)} + \zeta a_{66}\sigma_{x\theta p}^{(s-2)} + \lambda \zeta U_{\theta p}^{(s-2)} - \frac{\partial U_{xp}^{(s-1)}}{\partial \varphi}.$$

Из системы (1.5) выразим все неизвестные величины пограничного слоя через напряжения $\sigma_{r\theta p}^{(s)}$ и $\sigma_{rp}^{(s)}$. В итоге получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xp}^{(s)} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{xp}^{*(s)}, \quad \sigma_{xp}^{(s)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \sigma_x^{*(s)}, \\ \sigma_{\theta p}^{(s)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left(\frac{1}{\lambda^2} a_{12} \frac{\partial^2 \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{23} \sigma_{rp}^{(s)} \right) + \sigma_{\theta p}^{*(s)}, \\ U_{xp}^{(s)} &= -\frac{1}{\lambda^3} \left(A_{11} \frac{\partial^2 \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \lambda^2 A_{13} \sigma_{rp}^{(s)} \right) + u_p^{*(s)}, \\ U_{rp}^{(s)} &= -\frac{1}{\lambda^4} \left(A_{11} \frac{\partial^3 \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta^3} + \lambda^2 (A_{55} + A_{13}) \frac{\partial \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta} \right) + w_p^{*(s)},\end{aligned}\tag{1.6}$$

и

$$\sigma_{x\theta p}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{x\theta p}^{*(s)}, \quad U_{\theta p}^{(s)} = -\frac{A_{66}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s)}}{\partial \zeta} + v_p^{*(s)} = -\frac{a_{66}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s)}}{\partial \zeta} + v_p^{*(s)},\tag{1.7}$$

где использованы следующие обозначения [5,6]:

$$\begin{aligned}A_{11} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/a_{22}, \quad A_{13} = (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})/a_{22}, \\ A_{33} &= (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)/a_{22}, \quad A_{44} = a_{44}, \quad A_{55} = a_{55}, \quad A_{66} = a_{66}\end{aligned}\tag{1.8}$$

величины со звёздочкой известны и определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{xp}^{*(s)} &= \frac{1}{\lambda} \left(\zeta \frac{\partial \sigma_{rp}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - \lambda \zeta \sigma_{xp}^{(s-2)} + \sigma_{rp}^{(s-2)} - \sigma_{\theta p}^{(s-2)} \right), \\ \sigma_{x\theta p}^{*(s)} &= \frac{1}{\lambda} \left(\zeta \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - \lambda \zeta \sigma_{x\theta p}^{(s-2)} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} \right), \\ \sigma_{xp}^{*(s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{xp}^{*(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\lambda} \left(\zeta \frac{\partial \sigma_{xp}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{x\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} - \lambda \zeta \sigma_{xp}^{(s-2)} + \sigma_{xp}^{(s-2)} \right), \\ \sigma_{\theta p}^{*(s)} &= -\frac{a_{12}}{a_{22}} \sigma_{xp}^{*(s)} + \frac{\partial U_{\theta p}^{(s-1)}}{\partial \varphi} + U_{rp}^{(s-2)} - \zeta \left(a_{12} \sigma_{xp}^{(s-2)} + a_{22} \sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{23} \sigma_{rp}^{(s-2)} \right), \\ u_p^{*(s)} &= -\frac{1}{\lambda} \left(a_{11} \sigma_{xp}^{*(s)} + a_{12} \sigma_{\theta p}^{*(s)} \right), \\ v_p^{*(s)} &= -\frac{1}{\lambda} \left(a_{66} \sigma_{x\theta p}^{*(s)} + \frac{\partial U_{xp}^{(s-1)}}{\partial \varphi} + \zeta a_{66} \sigma_{x\theta p}^{(s-2)} \right) + \zeta U_{\theta p}^{(s-2)},\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$w_p^{*(s)} = -\frac{1}{\lambda} \left(a_{55} \sigma_{xrp}^{*(s)} - \frac{\partial u_p^{*(s)}}{\partial \zeta} \right).$$

Заметим, что в нулевом приближении $R_p^{*(0)}(\varphi, \zeta) \equiv 0$.

Для определения же неизвестных функций $\sigma_{r\theta p}^{(s)}$ и $\sigma_{rp}^{(s)}$ получим следующие уравнения

$$A_{11} \frac{\partial^4 \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{rp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{33} \lambda^4 \sigma_{rp}^{(s)} = R_1^{(s)}, \quad (1.10)$$

$$A_{66} \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta p}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{44} \lambda^4 \sigma_{r\theta p}^{(s)} = R_2^{(s)}, \quad (1.11)$$

где обобщенные нагрузки $R_1^{(s)}, R_2^{(s)}$ имеют вид:

$$R_1^{(s)} = \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{\partial u_p^{*(s)}}{\partial \zeta} - (a_{13} \sigma_{xp}^{*(s)} + a_{23} \sigma_{\theta p}^{*(s)}) \right] \quad (1.12)$$

$$R_2^{(s)} = \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{\partial v_p^{*(s)}}{\partial \zeta} - \zeta \left(a_{44} \sigma_{r\theta p}^{(s-2)} - \frac{\partial U_{\theta p}^{(s-2)}}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial U_{rp}^{(s-1)}}{\partial \varphi} + U_{\theta p}^{(s-2)} \right]$$

Нужно учесть, что $R_p^{(s-m)}(\varphi, \zeta) \equiv 0$, при $s < m$. При $s=0$ $R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = 0$ и уравнения (1.10) и (1.11) становятся однородными.

Уравнению (1.10) соответствует решение типа *плоского*, а уравнению (1.11) – *антиплоского* пограничных слоев [6.7]. При этом, поверхностные условия (1.1) также распадаются на две группы.

2. Плоский пограничный слой ортотропной цилиндрической оболочки.

При $s=0$, посредством формул (1.6), (1.10) и граничных условий (1.1) получим

$$A_{11} \frac{\partial^4 \sigma_{rp}^{(0)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{rp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{33} \lambda^4 \sigma_{rp}^{(0)} = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{rp}^{(0)} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{rp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rp}^{(0)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=-1} = 0, \quad \frac{\partial^3 \sigma_{rp}^{(0)}}{\partial \zeta^3} \Big|_{\zeta=-1} = 0. \quad (2.2)$$

Краевая задачи (2.1)–(2.2) являются задачей на собственные значения и собственные функции. После того, как будут найдены собственные значения λ_n , соответствующие собственные функции можно будет определить с помощью формул (1.6). Заметим, что в уравнение (2.1) переменная φ входит как параметр.

Однородному уравнению (2.1) соответствует характеристическое уравнение

$$A_{11} r^4 + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 r^2 + A_{33} \lambda^4 = 0 \quad (2.3)$$

Это уравнение может иметь корни трех типов в зависимости от значения $D = (2A_{13} + A_{55})^2 - 4A_{11}A_{33}$ [1,6.7].

а) Пусть $D > 0$. Тогда корни характеристического уравнения (2.3), мнимые и отличны друг от друга

$$r_{1,2} = \pm iq_1\lambda, \quad r_{3,4} = \pm iq_2\lambda, \quad q_{1,2} = \sqrt{\frac{(2A_{13} + A_{55}) \mp \sqrt{D}}{2A_{11}}}, \quad (2.4)$$

Корням (2.4) соответствует следующее решение уравнения (2.1)

$$\sigma_{rp}^{(0)}(\varphi, \zeta) = C_1^{(0)}(\varphi) \cos q_1 \lambda \zeta + C_2^{(0)}(\varphi) \sin q_1 \lambda \zeta + C_3^{(0)}(\varphi) \cos q_2 \lambda \zeta + C_4^{(0)}(\varphi) \sin q_2 \lambda \zeta \quad (2.5)$$

где $C_i^{(0)}(\varphi)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) неизвестные функции интегрирования.

По формулам (1.6) определяются величины плоского пограничного слоя.

Удовлетворив однородным условиям (2.2), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_3^{(0)}, C_4^{(0)}$. Приравняв определитель этой системы к нулю, получим следующее уравнение для определения λ :

$$(q_2^2 - q_1^2)^2 q_1 q_2 \cos 2q_1 \lambda \cos 2q_2 \lambda = 0. \quad (2.6)$$

Пусть λ_n корень уравнения

$$\cos 2q_2 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{q_2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in N. \quad (2.7)$$

Поскольку определитель системы равен нулю, то между ее строками существует линейная зависимость. Выбрасывая одно уравнение (например, последнее) получим систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Она позволяет первые три функции выразить через четвертую по формулам

$$C_{1n}^{(0)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} C_{4n}^{(0)}, C_{2n}^{(0)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} C_{4n}^{(0)}, C_{3n}^{(0)} = \frac{\Delta_3}{\Delta} C_{4n}^{(0)}, \quad (2.8)$$

где Δ основной, а Δ_i вспомогательные определители матрицы соответствующее системе из трех уравнений

$$\begin{aligned} \Delta &= (q_2^2 - q_1^2) q_1 \cos q_2 \lambda_n \cos 2q_1 \lambda_n \neq 0, \quad \Delta_1 = C_{4n}^{(0)} (q_2^2 - q_1^2) q_2 \sin q_1 \lambda_n \cos 2q_2 \lambda_n = 0, \\ \Delta_2 &= -C_{4n}^{(0)} (q_2^2 - q_1^2) q_2 \cos q_1 \lambda_n \cos 2q_2 \lambda_n = 0, \\ \Delta_3 &= -C_{4n}^{(0)} (q_2^2 - q_1^2) q_1 \sin q_2 \lambda_n \cos 2q_1 \lambda_n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тогда $C_{1n}^{(0)}(\varphi) = C_{2n}^{(0)}(\varphi) = 0$, а $C_{3n}^{(0)}(\varphi) = -\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} A_n^{(0)}(\varphi)$ и из формул (1.3),

(2.5) и (1.6) получим (вместо неизвестной $C_{4n}^{(0)}$ введена новая неизвестная $A_n^{(0)}$):

$$\sigma_{rp}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) \left[-\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} \cos q_2 \lambda_n \zeta + \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t),$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xp}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) q_2 \left[\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} \sin q_2 \lambda_n \zeta + \cos q_2 \lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t), \\
 \sigma_{xp}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) q_2^2 \left[\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} \cos q_2 \lambda_n \zeta - \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t), \quad (2.10) \\
 \sigma_{\varphi}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) \frac{a_{12} q_2^2 - a_{23}}{a_{22}} \left[-\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} \cos q_2 \lambda_n \zeta + \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t), \\
 U_{xp}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) \frac{A_{11} q_2^2 - A_{13}}{\lambda_n} \left[-\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} \cos q_2 \lambda_n \zeta + \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t), \\
 U_{rp}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) \frac{A_{11} q_2^2 - A_{13}}{\lambda_n} q_2 \left[\frac{\sin q_2 \lambda_n}{\cos q_2 \lambda_n} \sin q_2 \lambda_n \zeta + \cos q_2 \lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t).
 \end{aligned}$$

Аналогично, если λ_n корень уравнения

$$\cos 2q_1 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{q_1} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in N, \quad (2.11)$$

имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (q_1^2 - q_2^2) q_2 \cos q_1 \lambda_n \cos 2q_2 \lambda_n \neq 0, \quad \Delta_1 = -C_{2n}^{(0)}(q_1^2 - q_2^2) q_2 \sin q_1 \lambda_n \cos 2q_2 \lambda_n, \\
 \Delta_3 &= C_{2n}^{(0)}(q_1^2 - q_2^2) q_1 \sin q_2 \lambda_n \cos 2q_1 \lambda_n = 0, \\
 \Delta_4 &= -C_{2n}^{(0)}(q_1^2 - q_2^2) q_1 \cos q_2 \lambda_n \cos 2q_1 \lambda_n = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда $C_{3n}^{(0)}(\varphi) = C_{4n}^{(0)}(\varphi) = 0$, а $C_{1n}^{(0)}(\varphi) = -\frac{\sin q_1 \lambda_n}{\cos q_1 \lambda_n} A_n^{(0)}(\varphi)$ и из формул (2.5) и

(1.6) получаются аналогичные (2.10) формулы.

б) Пусть $D = 0$. В этом случае корни характеристического уравнения мнимые и кратные

$$r_{1,2} = \pm i q \lambda, \quad q = \sqrt{\frac{(2A_{13} + A_{55})}{2A_{11}}} = \sqrt[4]{\frac{A_{33}}{A_{11}}}, \quad (2.12)$$

а решение имеет следующий вид.

$$\sigma_{rp}^{(0)}(\varphi, \zeta) = (C_1^{(0)}(\varphi) + C_2^{(0)}(\varphi) \zeta) \cos q \lambda \zeta + (C_3^{(0)}(\varphi) + C_4^{(0)}(\varphi) \zeta) \sin q \lambda \zeta. \quad (2.13)$$

Из условий (2.2) снова получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_3^{(0)}, C_4^{(0)}$. Приравняв к нулю определитель полученной системы, получим

$$4q \lambda \cos^2 2q \lambda = 0. \quad (2.14)$$

что равносильно уравнению

$$\cos 2q \lambda = 0, \quad (2.15)$$

корни которого равны

$$\lambda_n = \frac{1}{q} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in N. \quad (2.16)$$

Выражая все остальные функции через функцию $C_{3n}^{(0)}$, получим (каждому значению $\lambda = \lambda_n$ соответствуют разные неизвестные $C_{in}^{(0)}(\varphi), (i=1,2,3,4)$):

$$C_{2n}^{(0)} = C_{4n}^{(0)} = 0, \quad C_{1n}^{(0)}(\varphi) = -\frac{\cos q\lambda_n(1+2\sin^2 q\lambda_n)}{\sin q\lambda_n(1+2\cos^2 q\lambda_n)} A_n^{(0)}(\varphi).$$

Для напряжения плоского пограничного слоя $\sigma_{rp}^{(0)}$ будем иметь:

$$\sigma_{rp}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)}(\varphi) \left[\frac{\cos q\lambda_n(1+2\sin^2 q\lambda_n)}{\sin q\lambda_n(1+2\cos^2 q\lambda_n)} \cos q\lambda_n \zeta + \sin q\lambda_n \zeta \right] \exp(-\lambda_n t). \quad (2.17)$$

Остальные величины плоского пограничного слоя определяются по формулам (1.6).

г) Пусть $D < 0$. В этом случае корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные

$$r_{1,2} = (p \pm iq)\lambda, \quad r_{3,4} = (-p \pm iq)\lambda$$

и соответствующее решение уравнения (3.1) будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{rp}^{(0)}(\varphi, \zeta) = C_1^{(0)}(\varphi)\varphi_1(\zeta) + C_2^{(0)}(\varphi)\varphi_2(\zeta) + C_3^{(0)}(\varphi)\varphi_3(\zeta) + C_4^{(0)}(\varphi)\varphi_4(\zeta), \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= chp\lambda\zeta \cos q\lambda\zeta, \quad \varphi_2(\zeta) = shp\lambda\zeta \sin q\lambda\zeta, \\ \varphi_3(\zeta) &= chp\lambda\zeta \sin q\lambda\zeta, \quad \varphi_4(\zeta) = shp\lambda\zeta \cos q\lambda\zeta \end{aligned}$$

Из условий (2.2), аналогично двум предыдущим случаям, получим систему однородных алгебраических относительно функций $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_3^{(0)}, C_4^{(0)}$. Повторяя те же рассуждения, получим следующее трансцендентное уравнение

$$ch^2 2p\lambda - \sin^2 2q\lambda = 0, \quad (2.19)$$

из которого можно определить собственные значения λ_n .

Выразив все неизвестные через $C_4^{(0)}$, из (2.18) получим

$$\sigma_{rp}^{(0)}(\varphi, \zeta) = \sum_{\lambda_n} \Delta^{-1}(\lambda_n) [\Delta_1(\lambda_n)\varphi_1 + \Delta_2(\lambda_n)\varphi_2 + \Delta_3(\lambda_n)\varphi_3 + \Delta_4(\lambda_n)\varphi_4] A_n^{(0)}(\varphi). \quad (2.20)$$

Остальные величины плоского пограничного слоя определяются по формулам (2.1).

Отметим, что если λ_n корень уравнения (2.7) или (2.11) (соответственно (2.15) или (2.19)), то из (2.9) и (2.10) следует, что $\sigma_{xp}^{(0)} = \sigma_{x\theta p}^{(0)} = U_{\theta p}^{(0)} \equiv 0$.

3. Антиплоский пограничный слой ортотропной цилиндрической оболочки.

При $s = 0$, посредством формул (1.7), (1.11) и граничных условий (1.1) получим

$$A_{66}\lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta p}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{44}\lambda^4 \sigma_{r\theta p}^{(0)} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{r\theta p}^{(0)} \Big|_{\zeta=-1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta p}^{(0)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = 0. \quad (3.2)$$

Корни характеристического уравнения

$$A_{66}\lambda^2 r^2 + A_{44}\lambda^4 = 0 \quad (3.3)$$

мнимые и им соответствует следующее решение уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta p}^{(0)}(\varphi, \zeta) &= C_1^{(0)}(\varphi) \cos \mu \lambda \zeta + C_2^{(0)}(\varphi) \sin \mu \lambda \zeta, \\ \sigma_{x\theta p}^{(0)}(\varphi, \zeta) &= -C_1^{(0)}(\varphi) \mu \sin \mu \lambda \zeta + C_2^{(0)}(\varphi) \mu \cos \mu \lambda \zeta, \\ v_p^{(0)}(\varphi, \zeta) &= -\mu a_{66} \lambda^{-1} (-C_1^{(0)}(\varphi) \sin \mu \lambda \zeta + C_2^{(0)}(\varphi) \cos \mu \lambda \zeta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{A_{44}}{A_{66}}} = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}. \quad (3.5)$$

Удовлетворив однородным условиям (3.2), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$

$$\begin{aligned} C_1^{(0)} \cos \mu \lambda - C_2^{(0)} \sin \mu \lambda &= 0 \\ -C_1^{(0)} \sin \mu \lambda + C_2^{(0)} \cos \mu \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Приравнявая определитель системы (3.6) к нулю, для определения λ получим уравнение

$$\cos 2\mu \lambda = 0, \quad (3.8)$$

корни которого будут

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right), \quad n \in N. \quad (3.9)$$

Отбросив второе уравнение системы (3.6) и выразив $C_1^{(0)}$ через $C_2^{(0)}$, получим

$$C_{1n}^{(0)} = -\operatorname{tg} \mu \lambda_n \cdot C_{2n}^{(0)}. \quad (3.10)$$

Поскольку каждому значению $\lambda = \lambda_n$ соответствует одна неизвестная $C_n^{(0)}(\varphi)$, то, с учетом (3.10) для величин антиплоского пограничного слоя ортотропной цилиндрической оболочки получим

$$\sigma_{r\theta p}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(0)}(\varphi) (-\operatorname{tg} \mu \lambda_n \cos \mu \lambda_n \zeta + \sin \mu \lambda_n \zeta) \exp(-\lambda_n t),$$

$$\sigma_{x\varphi}^{(0)}(t, \varphi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(0)}(\varphi) \mu (-tg\mu\lambda_n \sin \mu\lambda_n \zeta + \mu \cos \mu\lambda_n \zeta) \exp(-\lambda_n t), \quad (3.11)$$

$$v_p^{(0)}(t, \varphi, \zeta) = -\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(0)}(\varphi) \lambda_n^{-1} (-tg\mu\lambda_n \sin \mu\lambda_n \zeta + \cos \mu\lambda_n \zeta) \exp(-\lambda_n t).$$

Если λ_n корень уравнения (3.8), то при решении задачи (3.1) – (3.2), будем также иметь $\sigma_{rp}^{(0)} = \sigma_{xp}^{(0)} = \sigma_{xrp}^{(0)} = \sigma_{\theta p}^{(0)} = U_{xp}^{(0)} = U_{rp}^{(0)} = 0$.

Уравнения (2.1) и (3.1) при $s \geq 1$ становятся неоднородными и они должны быть решены при двух принципиально различных вариантах. В первом варианте λ_n корень уравнения (2.7), (2.11), (2.16) или (2.19) плоского погранслоя. Во втором варианте λ_n соответствует антиплоскому погранслою и является корнем уравнения (3.9). Величины плоского погранслоя обозначаются индексом « p », а антиплоского погранслоя – индексом « a », Решения уравнений (2.1) и (4.1) в каждом варианте запишутся в виде

$$R_p^{(s)} = R_{0p}^{(s)} + R_{*p}^{(s)}(p, a) \quad (3.12)$$

где $R_{0p}^{(s)}$ – решение однородного, а $R_{*p}^{(s)}$ – частное решение неоднородного уравнения (2.1), а $R_{0a}^{(s)}$ – решение однородного, а $R_{*a}^{(s)}$ – частное решение неоднородного уравнения (3.1). Подробности можно найти в монографии [6].

Аналогичным образом можно построить решения типа пограничного слоя вблизи торцов $x = L$.

Решение пространственной краевой задачи есть сумма внутренней задачи и пограничных слоев

$$J = Q_{\text{вн}} + R_p + R_a, \quad (3.13)$$

где $Q_{\text{вн}}, R_p, R_a$ соответственно решение внутренней задачи [9], интегралы плоского и антиплоского пограничных слоев.

Представление (3.13) содержит достаточное количество неизвестных констант, позволяющие удовлетворить торцевым условиям.

Գրականություն

1. Лехницкий С.Г., Теории упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416с.
2. Амбарцумян С.А., Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Амбарцумян С.А., Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448с.
4. Гольденвейзер А.Л., Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. //ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608.

5. Гольденвейзер А.Л., Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
6. Агаловян Л.А., Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
8. Хачатрян Ш.М., О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. №3. С. 26-41.
9. Хачатрян А.М., Петросян Г.А., Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной цилиндрической оболочки. Труды VI Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 01-06 октября, 2019. Дилижан, Армения. С.340-344.
10. Петросян Г.А., Хачатрян А.М., Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009.Т.62. №4. С.65-72.
11. Баласанян Е.С., Хачатрян А.М., Гулгазарян Л.Г., О решениях типа пограничного слоя в одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной пластинки. Изв. НАН РА. Механика. 2019. Т.72. №3. С.3-19.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ. Սահակյանը: