

ՀՏԴ 514.7

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Ռուդիկ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի պրոֆ., մ.գ.թ.

ՀԱՎԱՍԱՐԱՄԵԾ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿԱԶՄ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

Սույն հոդվածի նպատակն է հիմնովին բացահայտել դպրոցականների մոտ բազմանկյունների հավասարամեծ և հավասարակազմ հասկացությունները, ամրապնդել այն համապատասխան խնդիրների առաջադրությամբ և լուծումների շարադրությամբ:

Բանալի բառեր՝ Եռանկյուն, քառանկյուն, զուգահեռագիծ, սեղան, բազմանկյուն, տրոհում մասերի, մակերես, հավասարամեծ և հավասարակազմ բազմանկյուններ:

Р.Аракелян

РАВНОВЕЛИКОСТЬ И РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Цель данной статьи является раскрыть школьникам суть понятие равновеликость и равноставленность многоугольников, и укрепить их, решив соответствующие задачи.

Ключевые слова: Треугольник, четырёхугольник, параллелограмма, трапеция, многоугольник, разбиение на части, площадь, равновеликие и равноставленные многоугольники:

R.Araqelyan

POLYGONS' EQUALITY AND EQUIDISTANCE

The purpose of this article is to reveal to schoolchildren the essence of the concept of polygons' equality and equidistance and to strengthen them in solving corresponding tasks.

Key words: Triangle, quadrilateral, parallelogram, trapezoid, polygon, division into parts (subdivision), area, equal and equidistant polygons:

Մահմանում. Երկու հավասար մակերեսներով բազմանկյունները կոչվում են *հավասարամեծ*: Երկու բազմանկյուններ կոչվում են *հավասարակազմ*, եթե նրանց կարելի է տրոհել զույգ առ զույգ հավասար բազմանկյունների:

Ակնհայտ է, որ եթե երկու բազմանկյուններ կազմված են հավասարակազմ բազմանկյունների գումարից, ապա նրանք հավասարակազմ են:

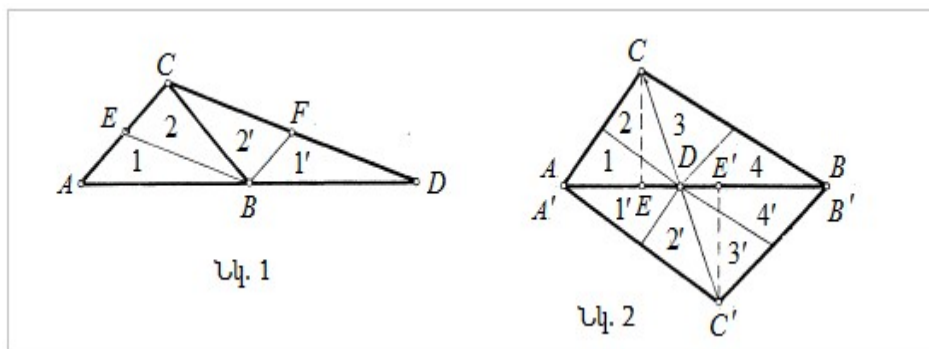
Թեորեմ 1: Երկու բազմանկյուններ, որոնք հավասարակազմ են երրորդ բազմանկյան, հավասարակազմ են:

Թող P_1 և P_2 բազմանկյունները հավասարակազմ են P -ին: Դա նշանակում է, որ ըստ սահմանման՝ P բազմանկյունը կարելի է տրոհել $p_1, p_2, \dots, p_m$, բազմանկյունների որոնք կազմում են P_1 , մյուս կողմից կարելի է տրոհել այնպիսի $p^1, p^2, \dots, p^n$, բազմանկյունների որոնք կազմում են P_2 : Դիտարկենք երկու տրոհումների վերադրումը: Առաջին տրոհման բազմանկյունները նշանակենք p_i -ով, երկրորդ տրոհման բազմանկյունները՝ p^j -ով: Երկու տրոհումների ընդհանուր մասը նշանակենք p_i^j -ով: p_i^j -մասերը, որտեղ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ կազմում են P բազմանկյան նոր տրոհում: j -ինդեքսի փոփոխման ժամանակ p_i^j բազմանկյունները կազմում են p_i բազմանկյունը, իսկ i ինդեքսի փոփոխման ժամանակ կազմում են p^j բազմանկյունը: Ըստ պայմանի՝ i ինդեքսի փոփոխման ժամանակ կազմում են P_1 բազմանկյունը, իսկ j ինդեքսի փոփոխման ժամանակ կազմում են P_2 բազմանկյունը: Ստացվում է, որ p_i^j -ի բազմանկյունները դասավորելով ստանում ենք P_1 -ն, իսկ վերադասավորելով այլ ձևով՝ P_2 -ը: Քանի որ նրանցից յուրաքանչյուրը պարունակում է p_i^j -ն, ապա P_1 -ը և P_2 -ը հավասարակազմ են:

Թեորեմ 2. Հավասարամեծ եռանկյունները հավասարակազմ են:

Ապացույցը դիտարկենք եռանկյունների երեք դիրքերի համար:

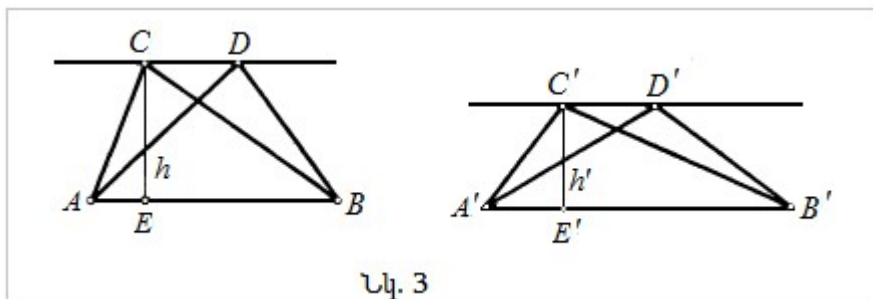
Դեպք 1. Թող ABC և CBD եռանկյունները կից են, այսինքն՝ BC կողմն ընդհանուր է, իսկ AB -ն և BD -ն պատկանում են մի ուղղի, նկ. 1: Եռանկյունների կից լինելուց հետևում է, որ $AB = BD$: Տանելով $BF \parallel CA$, $BE \parallel CD$, ACD եռանկյունը կտրոհենք 1, 2, 1', 2' եռանկյունների: Քանի որ



$AB = BD$ և $BE \parallel CD$, ապա միջին գծի հատկությունից կգրենք $AE = EC = BF$ և նույն պատճառով՝ $DF = FC = BE$: Հետևաբար, եռանկյուններ $ABE = BDF$, $BEC = BCF$:

Դեպք 2. ABC և $A'B'C'$ հավասարամեծ եռանկյուններն ունեն նկ. 2-ի տեսքը, այսինքն՝ ունեն մեկական հավասար կողմ՝ $AB = A'B'$: Նրանց տրոհումը հավասարակազմ եռանկյունների երևում նկ. 2-ում:

Դեպք 3. ABC և $A'B'C'$ հավասարամեծ եռանկյուններն ունեն նկ. 3-ի տեսքը: Եռանկյան C գագաթով տանենք ուղիղ $CD \parallel AB$, իսկ C' գագաթով ուղիղ $C'D' \parallel A'B'$: Այնուհետև այդ ուղիղների վրա վերցնենք D և D' այնպես, որ $AD = A'D'$, որն ակնհայտ է, որ միշտ կարելի է կատարել տարբեր ձևերով: Միացնենք D կետը B հետ, իսկ D' -ը՝ B' -ի հետ: Կատանանք երկու հավասարամեծ եռանկյուններ՝ ABD և $A'B'D'$: Քանի որ նրանք ունեն AD և $A'D'$ հավասար կողմերը, ապա համաձայն դեպք 2-ի՝ նրանք հավասարակազմ են: Այդ նույն պատճառով նրանք



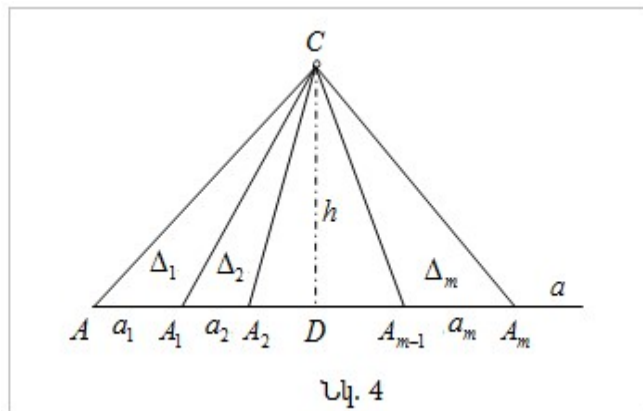
հավասարակազմ են ABC և $A'B'C'$ եռանկյուններին: Հենվելով թեորեմ 1-ին՝ կպնդենք, որ մեր եռանկյունները հավասարակազմ են: Թեորեմն ապացուցվեց լրիվությամբ:

Թեորեմ 3. Ցանկացած բազմանկյուն հավասարակազմ է որոշակի բազմանկյան, որը հավասարամեծ է իրեն:

Թող բազմանկյունը տրոհված է $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ եռանկյունների: Ընտրենք h թիվն և $a_1, a_2, \dots, a_m$ թվերն այնպես, որ $a_i \cdot h = 2S(\Delta_i)$: Որևէ a ուղղի վրա տեղադրենք մի շարք հատվածները, $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{m-1}A_m$, նկ. 4: Վերցնենք a ուղղին չպատկանող C կետը նրանից h հեռավորության վրա: Ակնհայտ է, որ $AA_1C, A_1A_2C, \dots, A_{m-1}A_mC$ եռանկյունները հավասարամեծ են համապատասխանորեն $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ եռանկյուններին: Նախորդ թեորեմի համաձայն՝ նրանք միաժամանակ նաև հավասարակազմ են: Այսպիսով, AA_mC եռանկյունը կազմված է եռանկյուններից, որոնք հավասարակազմ են այն եռանկյուններին, որոնք ստացվել են բազմանկյան տրոհումից: Այստեղից հետևում է, որ մեր բազմանկյունը հավասարակազմ է AA_mC եռանկյանը:

Թեորեմ 4. (Բոլլայի-Գերվինի). Հավասարամեծ բազմանկյունները հավասարակազմ են:

Եթե P_1 և P_2 բազմանկյունները հավասարամեծ են, ապա համաձայն թեորեմ 3-ի՝ գոյություն ունեն Δ_1 և Δ_2 եռանկյունները՝ հավասարամեծ և հավասարակազմ նրանց: Թեորեմ 1-ի համաձայն՝ P_1 և P_2 բազմանկյունները հավասարակազմ են:



9-րդ դասարանի հարթաչափության դասընթացում հանդիպում են խնդիրներ՝ կապված «*պատկերների տրոհման և նրանց մասերի վերադասավորման*» հետ: Օրինակ՝ զուգահեռագծի մակերեսի հաշվման ժամանակ, զուգահեռագիծը տրոհելով և վերադասավորելով, ստանում են ուղղանկյուն, եռանկյունը՝ ստանում են զուգահեռագիծ: Որպես օրենք,



(1802-1860)

տրոհման խնդիրները չունեն լուծման ունիվերսալ մեթոդներ, այդ պատճառով այդ հարցի շարադրման ժամանակ սովորողները կարող են լրիվությամբ ցուցադրել իրենց ինտուիցիան և ստեղծագործական մտածողությունը: Պատկերների տրոհման խնդիրները հետաքրքրաշարժ են և մատչելի: Նրանց լուծման ընթացքում սովորողների մոտ ձևավորվում են պատկերացումներ բազմանկյունների այնպիսի կարևոր հատկությունների մասին, ինչպիսիք են «*հավասարամեծությունը*» և «*հավասարակազմությունը*»:

Սովորողների առջև կարելի է դնել հիմնախնդիր, ճիշտ է արդյո՞ք հակադարձ միտքը, այսինքն, որ ցանկացած երկու հավասարամեծ բազմանկյուններ հավասարակազմ են: Այդ առաջադրությունը մաթեմատիկայի պատմությունում հայտնի է *Բոյայի-Գերվինի թեորեմ* անվամբ (նկարում Բոյային է): Բազմանկյունների տրոհման խնդիրը ունի նաև կիրառական ուղղվածություն:

Պատկերների տրոհման խնդիրները ծագել են շատ վաղ:

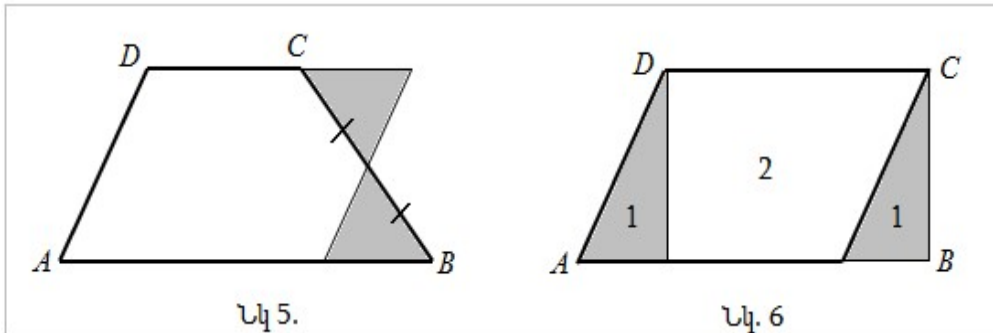
Մ.թ.ա. 7-ից 5-րդ դարերում Հնդկաստանում «Պարանի կանոնը» գրքում դիտարկվում էր քառակուսու և ուղղանկյան տրոհման խնդիրը: Ավելի ուշ այդ խնդիրը դիտարկել է Էվկլիդեսը իր «Սկզբունքներ» գրքում: Առաջին տրակտատը, որում դիտարկվում էր բազմանկյունների տրոհման խնդիրը, գրել է նշանավոր մաթեմատիկոս, աստղագետ Աբու-լ-Վեֆր (940-998 թթ.):

Դիտարկենք զուգահեռագծի, եռանկյան և սեղանի մակերեսների բանաձևերի արտաձման խնդիրները:

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ սեղանը հավասարակազմ է այն զուգահեռագծին, որի հիմքը հավասար է սեղանի միջին գծին, իսկ բարձրությունը՝ սեղանի բարձրությանը:

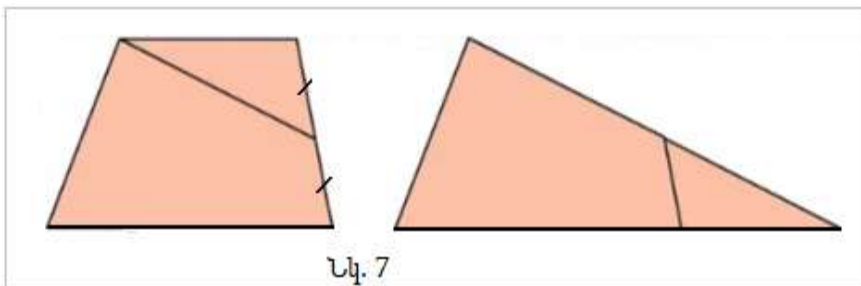
Լուծում: Լուծումը հետևում է նկար 5-ից:

Խնդիր 2. Ապացուցել, որ հասարամեծ զուգահեռագիծը և ուղղանկյունը հավասարակազմ են:



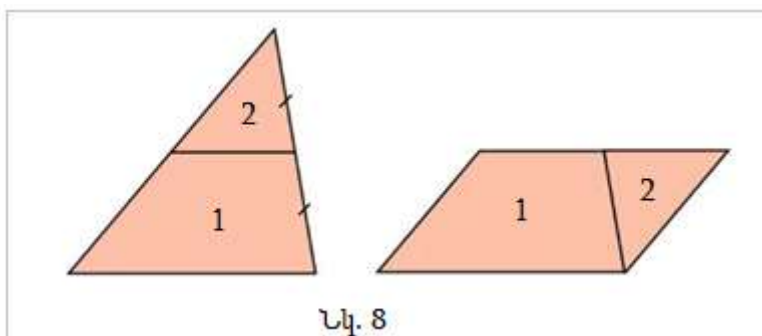
Լուծում: Լուծումը հետևում է նկ. 6-ից:

Խնդիր 3. Կառուցել տրված սեղանին հավասարակազմ եռանկյուն:



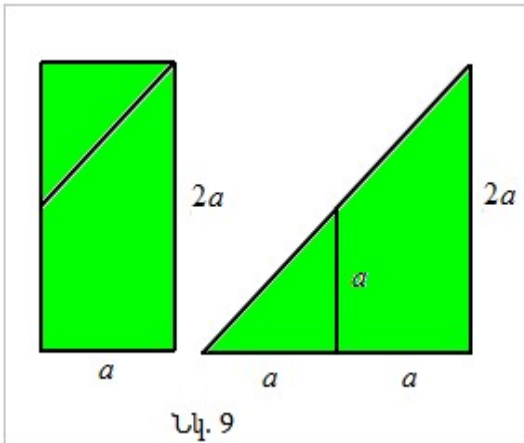
Լուծում: Լուծումը պատկերված է նկ. 7-ում:

Խնդիր 4. Տրված է եռանկյուն, այն տրոհել և ստանալ զուգահեռագիծ: *Լուծում:* Կտրում ենք եռանկյան միջին գծով և ստացված

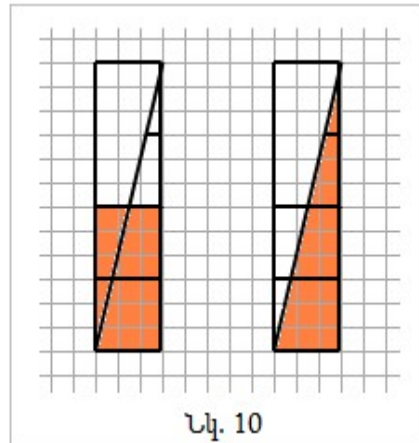


եռանկյունը կցագրում սեղանին աջից: Ինքնուրույն ապացուցել, որ ստացվում է զուգահեռագիծ, նկ. 8:

Խնդիր 5. Տրված է ուղղանկյուն, որի մի կողմը երկու անգամ մեծ է մյուսից: Այն տրոհել մասերի այնպես, որ հնարավոր լինի մասերից կազմել ուղղանկյուն եռանկյունի:*Լուծում:* Դա կարելի է իրականացնել 2 եղանակով, մեկը պատկերված է նկ. 9-ում, իսկ մյուսը՝ նկ. 10-ում: Տրոհման խնդիրները նպատակահարմար է դիտարկել քառակուսի վանդակավոր թղթի վրա, որը և իրականացրված է նկ. 10-ում:



Նկ. 9



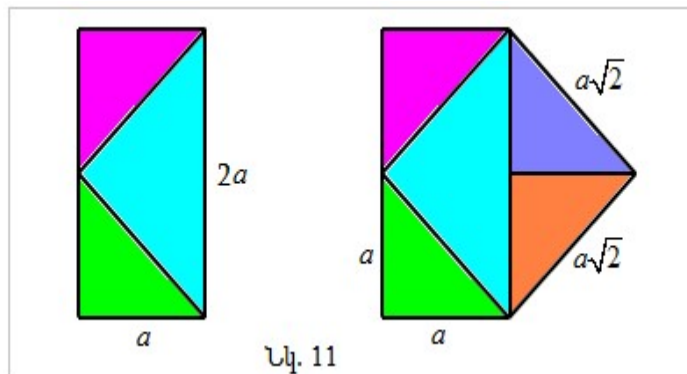
Նկ. 10

Խնդիր 6. Տրված է ուղղանկյուն, որի մի կողմը երկու անգամ մեծ է մյուսից: Այն տրոհել մասերի այնպես, որ հնարավոր լինի նրանից կազմել քառակուսի:

Լուծում: Ուղղանկյան կողմերը նշանակենք a և $2a$: Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է $2a^2$, հետևաբար, նրա ևս վասարամեծ քառակուսու

մակերեսը հավասար է $2a^2$, իսկ քառակուսու կողմը կունենա $a\sqrt{2}$ երկարություն:

Նշվածից հետևում է ուղղանկյան տրոհման և վերադասավորման հետևյալ ձևը, նկ. 11:

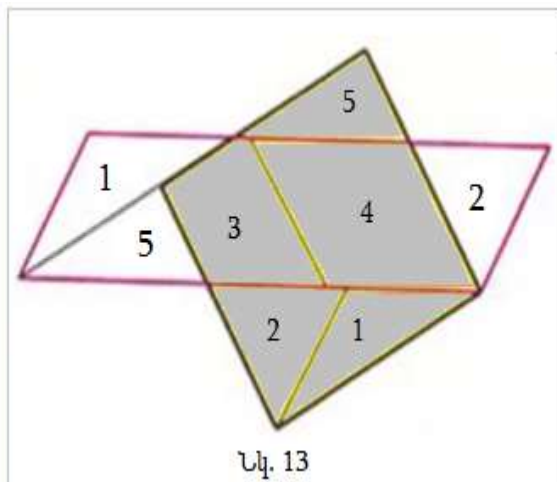
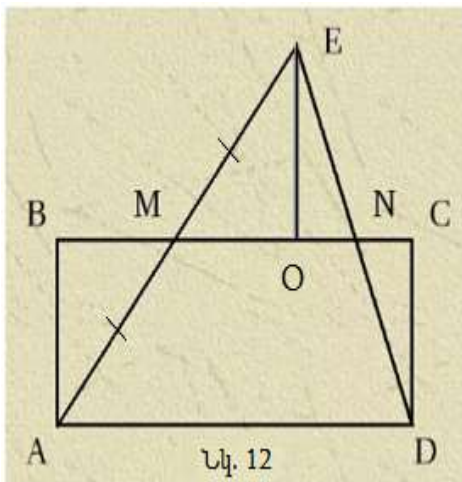


Նկ. 11

Խնդիր 7. Ապացուցել, որ հավասարամեծ եռանկյունը և ուղղանկյունը հավասարակազմ են:

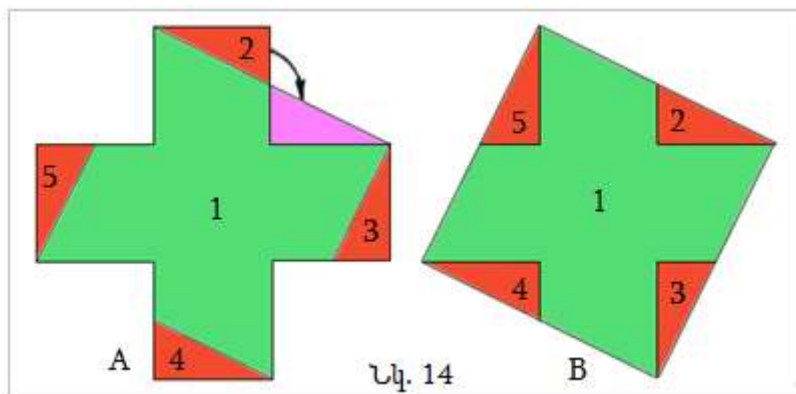
Լուծում: Լուծումը ակնհայտ է դառնում նկ. 12-ից:

Խնդիր 8: Ցուցադրել հավասարամեծ զուգահեռագծի և քառակուսու հավասարակազմությունը, նկ. 13:



Լուծում: Դժվար չէ ապացուցել, որ զուգահեռագծի և քառակուսու սպիտակ և սև գույնի 1, 2 և 5 եռանկյունները հավասար են, իսկ 3 և 4 քառանկյուններն ընդհանուր են, հետևաբար, զուգահեռագիծը և քառակուսին հավասարակազմ են:

Խնդիր 9: Պատկերել հավասարամեծ Քրիստոնեական խաչի և քառակուսու հավասարակազմ լինելը:



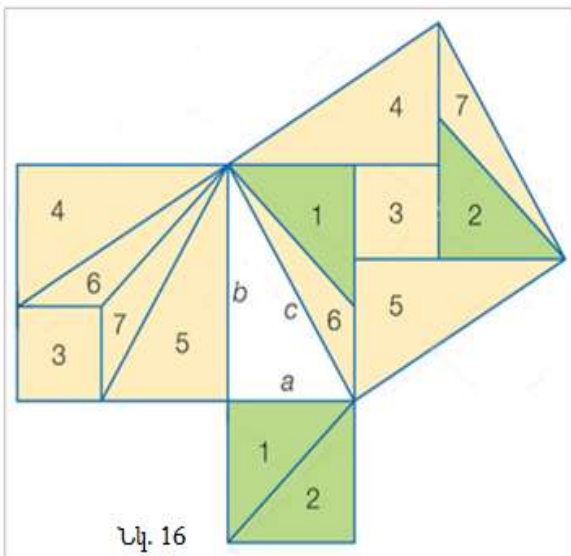
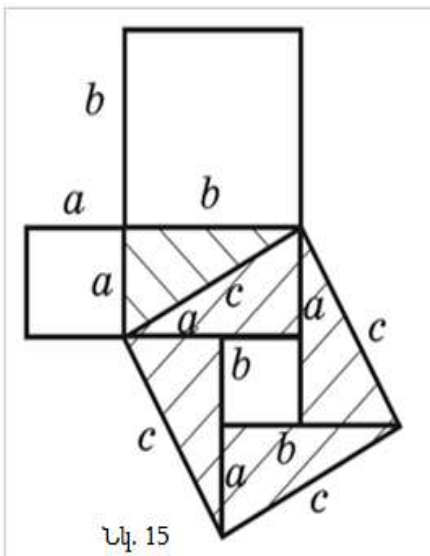
Լուծում: Տրված են A և B բազմանկյունները, նկ. 14, որոնք հավասարամեծ են: Ապացուցել, որ նրանք հավասարակազմ են: Դրա

համար բավական է 4 ուղղանկյուն եռանկյունները պտտել փոքր էջի գագաթի շուրջ ուղիղ անկյան տակ:

Ակնհայտ է, որ պատկերի պտույտի ժամանակ այն պատկերը ձևափոխվում է ինքն իրեն հավասար պատկերի:

Խնդիր 10: Պյութագորասի թեորեմի ապացույցը գծագրի այլ հավասարակազմության օգնությամբ:

Ցուցադրում: a , b էջերով եռանկյան, նկ. 15, c ներքնաձիգի վրա



կառուցված է քառակուսի, որը կազմված է 4 հավասար ուղղանկյուն եռանկյուններից և $(b-a)$ կողմով քառակուսուց:

Օգտագործելով մակերեսների բանաձևերը՝ կարող ենք գրել՝

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (b-a)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 :$$

Ստացանք Պյութագորասի թեորեմը:

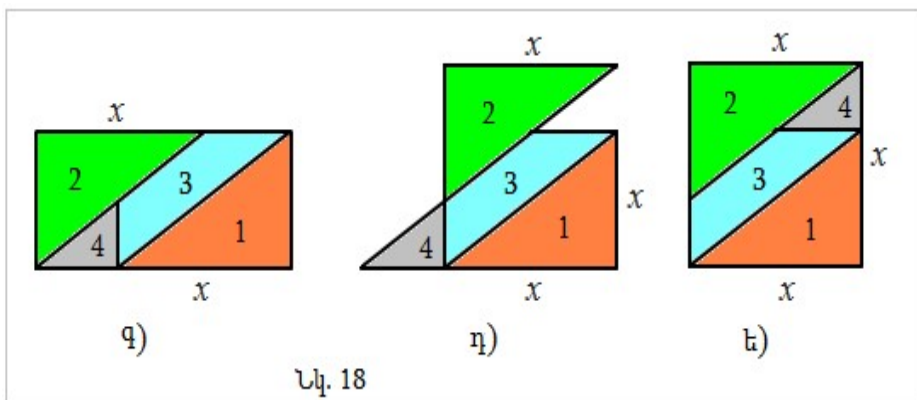
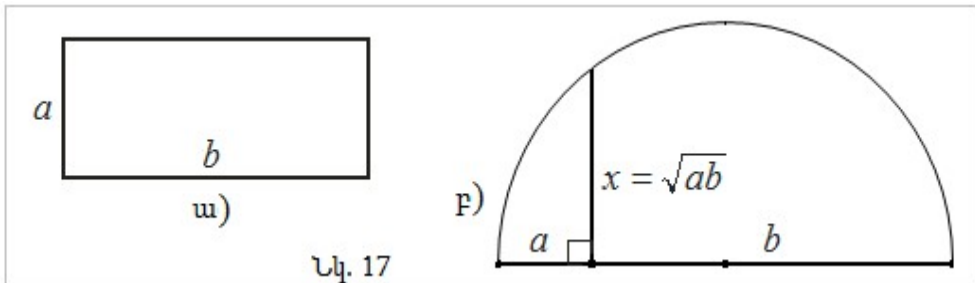
Նկ. 16 - ում ցուցադրված է Պյութագորասի թեորեմի գծագրի այլ տրոհում:

Խնդիր 11: Տրված է a , b կողմերով ուղղանկյուն: Կառուցել նրան հավասարամեծ քառակուսի և ցուցադրել նրանց հավասարակազմությունը:

Լուծում: Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է $a \cdot b$ -ի: Եթե նրան հավասարամեծ քառակուսու կողմը նշանակենք x -ով, ապա կգրենք՝ $x = \sqrt{ab}$:

Ուրեմն պետք է կառուցենք a , b հատվածների միջին երկրաչափականը, այն ներկայացված է նկ. 17-ի ա), բ) կետերում:

Ուղղանկյանը հավասարամեծ քառակուսու կառուցման քայլերը ցուցադրված են նկ. 18-ի գ), դ) և ե) կետերում:



Գրականություն

1. Екимова М. А., Кукин Г. П., Задачи на разрезание., МЦНМО, М., 2002.
 2. Заслажский А., Паркеты разрезания // Квант, 1999, №2.
 3. Линдгрэн Г., Занимательные задачи на разрезание.- М., Мир, 1977.
- Համաձայնի կայքեր:

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ. Սահակյանը: