

ՀՏԴ 512.62, 512.8

Մաթեմատիկա

Լիանա Աբրահամյան

ԱրՊՀ Մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆ/մ. գ. թ.

E-mail: liana_abrahamyan@mail.ru:

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԸ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ (ՀԱՄԱՌՈՏ ԱԿՆԱՐԿ)

Ներկա աշխատանքում դիտարկված է հանրահաշվական կառուցվածքների դերը դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում: Որպես կիրառություն բերվել է ԱԸԲ որոշումը գաուսյան ամբողջ թվերի օղակում:

Բանալի բառեր՝ հանրահաշվական կառուցվածք, զործողություն, տեղափոխականություն, զուգորդականություն, կիսախումբ, քվազիխումբ, խումբ, օղակ, դաշտ, կավար:

Л.Р.Абрамян

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

В данной работе рассмотрена роль алгебраических структур в курсе школьной математики. В качестве применения приводится метод нахождения НОД в кольце целых гауссовых чисел.

Ключевые слова: алгебраическая структура, операция, коммутативность, ассоциативность, полугруппа, квазигруппа, группа, кольцо, поле, решетка.

L. R. Abrahamyan

ALGEBRAIC STRUCTURES IN THE MATHEMATICS OF THE SECONDARY SCHOOL (THE SHORT SURVEY)

In this paper reveals the role of algebraic structures in the course of school mathematics. As an application, a method for finding GCD in a ring of Gaussian integers is given.

Key words algebraic structures, operation, commutativity, associativity, semigroup, quasigroup, group, ring, field, lattice.

1. Ներածություն

Հանրահաշվական կառուցվածքների հետ ծանոթացումը իրականում սկսվում է միջնակարգ դպրոցից, երբ աշակերտը սկսում է գումարել, բազմապատկել և հանել բնական թվերը (բնականաբար, առանց համապատասխան տերմինների գործածման): Սկզբից բնական թվերի բազմության վրա ուսումնասիրվում են գումարման գործողությունը և նրա տեղափոխականությունն ու գուգորդականությունը: Այսպիսով, կրտսեր դպրոցի աշակերտը ծանոթանում է բնական թվերի տեղափոխական գումարային կիսախմբի հետ: Իսկ բազմապատկման գործողությունը ուսումնասիրելիս աշակերտը արդեն գործ է ունենում բնական թվերի արտադրյալային տեղափոխական կիսախմբի հետ:

Այնուհետև առաջանում է բնական թվերի ընդլայնման անհրաժեշտությունը՝ գումարման և բազմապատկման գործողությունների հակադարձ գործողությունների ներմուծմամբ: Արդյունքում բնական թվերի բազմությունը ընդլայնվում է մինչև ամբողջ թվերի բազմության, առաջանում է ամբողջ թվերի քվադրիխումբը հանման գործողության նկատմամբ, ամբողջ թվերի գումարային խումբը և ամբողջ թվերի միավորով, տեղափոխական և գուգորդական օղակը, իսկ ամբողջ թվերի բազմությունը ընդլայնվում է մինչև ռացիոնալ թվերի բազմության, այստեղ առաջանում է նաև հակադարձելի (ոչ գրոյական) ռացիոնալ թվերի արտադրյալային խումբը՝ $Q^*(\cdot)$ ($Q^* = Q \setminus \{0\}$) և ռացիոնալ թվերի դաշտը: Հիմնականում դպրոցի աշակերտների ծանոթացումը կավարների հետ կարող է տեղի ունենալ, երբ նրանք ուսումնասիրում են ԱԼԲ (ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի) և ԸԱԲ (ընդհանուր ամենափոքր բազմապատկիկ) գործողությունները [1]:

2. Հանրահաշվական կառուցվածքների դերը դպրոցական ուսուցչի աշխատանքում

Հանրահաշվական կառուցվածքների ուսումնասիրումը բացահայտում է հանրահաշվի տարբեր բաժինների ընդհանուր օրինաչափությունները: Հանրահաշվական կառուցվածքների օրինակներ են հանդիսանում ձևափոխությունների կիսախումբը և նրա ենթակիսախմբերը, տեղադրությունների սիմետրիկ խումբը և նրա ենթախմբերը, չվերասերվող մատրիցների արտադրյալային խումբը, միավորից արմատների միածին

խումբը, բազմանդամների և մատրիցների օղակները [1-4], բազմությունների և թվային բազմությունների վրա սահմանվող կավարները և բուլյան հանրահաշիվները [1]:

Երբեմն կարծիքներ են հնչում, թե ապագա մաթեմատիկայի ուսուցչի ինչի՞ն է պետք խմբերի տեսությունը, եթե նա ամբողջ կյանքում քառակուսային հավասարումների լուծում է սովորեցնելու աշակերտին: Այդպիսի կարծիքները շատ հնացած են և, իհարկե, արդիական չեն, եթե հատկապես հաշվի առնենք համակարգչային գիտության զարգացման արագընթաց տեմպերը:

Իհարկե, հնարավոր է աշակերտներին սովորեցնել լուծել քառակուսային, լոգարիթմական և եռանկյունաչափական հավասարումներ առանց հանրահաշվական կառուցվածքների իմացության: Բայց, որպեսզի աշակերտը տեղյակ լինի, թե ինչու բարձր աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների մի մասը հնարավոր չէ լուծել արմատանշանների օգնությամբ, նա պետք է գաղափար կազմի խմբի և դաշտի մասին, ինչպես նաև Գալուայի տեսության մասին, իսկ Ստոունի թեորեմները լիարժեք պատկերացում կարող են տալ բաշխական կավարների և բուլյան հանրահաշիվների մասին: Ուսման նպատակ պետք է դրվի լիարժեք մասնագետի ձևավորումը՝ միտված ոչ միայն ներկային, այլև հատկապես ապագային: Տարանջատված կարողություններ ուսուցանելու փոխարեն պետք է առաջարկել սովորողներին հիմնարար գիտելիքներ, որոնք ձևավորում են համապատասխան մոտեցումներ, տարաբնույթ խնդիրների լուծման համար: Ժամանակակից մաթեմատիկայի ուսուցիչը պետք է լինի և՛ որակյալ մաթեմատիկոս, և՛ լավ մանկավարժ: Հանրահաշվական կառուցվածքների ուսումնասիրումը ուսուցիչների կողմից շատ կարևոր է մտածողության և տեսակետների զարգացման համար: Այդպիսի կառուցվածքները կազմում են նաև մաթեմատիկական մտածողության սխեմաներ [6] և հանգեցնում են օգտակար ընդհանրացումների: Սովորողների ուսուցումը հանրահաշվական կառուցվածքների հիման վրա ապահովում է ապագա ուսուցիչների մոտ հիմնարար, առանցքային գիտելիքների ձևավորմանը:

Օրինակ, դպրոցականը հաճախ գործ է ունենում տեղափոխական, գուգորդական գործողությունների հետ, սակայն միավորի և գրոյի միջև ոչ մի ընդհանուր բան չի նկատում, նույնը կարելի է ասել նաև հակադիրի և հակադարձի մասին: Իսկ տարբեր բազմությունների վրա որոշված գործողությունները ընդհանրապես չեն համեմատվում դպրոցական դասընթացում: Ժամանակակից հանրահաշվի հիմնարար գաղափարները պետք է դարձնել հասանելի աշակերտներին, ուսանողներին և ուսուցիչներին:

Հատկապես աշակերտների գիտակցության մեջ ժամանակակից մաթեմատիկական պետք է ներկայացվի որպես միասնական, գեղեցկությամբ ապշեցնող գիտություն իր կիրառություններով: Աշակերտների մոտ այդպիսի գիտելիքների ձևավորման պատասխանատուն հենց ուսուցիչն է:

3. ԱԸԲ գաուսյան ամբողջ թվերի օղակում

$\alpha = a + bi$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է.

ա) գաուսյան թիվ, եթե a -ն և b -ն ռացիոնալ թվեր են, այսինքն՝ $a, b \in \mathbb{Q}$,

բ) ամբողջ գաուսյան թիվ, եթե a -ն և b -ն ամբողջ թվեր են, այսինքն՝ $a, b \in \mathbb{Z}$:

α կոմպլեքս թվի նորմը նշանակվում է $Nr(\alpha)$ -ով և սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $Nr(\alpha) = |\alpha|^2$, որտեղ $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

Բոլոր գաուսյան թվերի բազմությունը նշանակվում է $\mathbb{Q}[i]$ -ով, իսկ բոլոր ամբողջ գաուսյան թվերի բազմությունը՝ $\mathbb{Z}[i]$ -ով: $\mathbb{Q}[i]$ բազմությունը կազմում է դաշտ՝ կոմպլեքս թվերի գումարման և բազմապատկման նկատմամբ:

[1]-ում ապացուցվում է ամբողջ գաուսյան թվերի մնացորդով բաժանման վերաբերյալ հետևյալ թեորեմը՝

Ցանկացած α և $\beta \neq 0$ ամբողջ գաուսյան թվերի համար գոյություն ունեն այնպիսի δ և ρ ամբողջ գաուսյան թվեր, որ $\alpha = \beta\delta + \rho$, որտեղ $0 \leq Nr(\rho) < Nr(\beta)$:

Դիտարկենք $\mathbb{Z}[i]$ հանրահաշվական ստորուկտուրայում Էվկլիդեսի մնացորդով բաժանման ալգորիթմը և ԱԸԲ-ի որոշումը, ինչը հետաքրքրություն կառաջացնի դպրոցի ուսուցչի մոտ՝ ընդլայնելով նրա գիտելիքները կոմպլեքս թվերի, ԱԸԲ գտնելու խնդիրների շրջանակում, ընդլայնելով ոչ ստանդարտ խնդիրների շարքը:

Օրինակների վրա ցույց տանք ԱԸԲ-ի որոշումը $\mathbb{Z}[i]$ -ում:

Օրինակ 1: Մնացորդով բաժանենք $11 + 10i$ ամբողջ գաուսյան թիվը $4 + i$ ամբողջ գաուսյան թվի վրա:

$$\frac{11 + 10i}{4 + i} = \frac{(11 + 10i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{54 + 29i}{17} \approx 3,17 + 1,7i,$$

ստացված արդյունքին ամենամոտ ամբողջ գաուսյան թիվը $3 + 2i$ -ն է, հետևաբար մնացորդը կլինի՝

$$11 + 10i - (4 + i)(3 + 2i) = 1 - i:$$

Այսպիսով, կստանանք

$$11 + 10i = (4 + i)(3 + 2i) + 1 - i$$

Օրինակ 2: Որոշենք $32 + 9i$ և $4 + 11i$ ամբողջ գաուսյան թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը $\mathbb{Z}[i]$ -ում:

Քայլ 1. $32 + 9i = (4 + 11i)(2 - 2i) + 2 - 5i$ (մնացորդով բաժանել ենք առաջին թիվը երկրորդի վրա):

Քայլ 2. $4 + 11i = (2 - 5i)(-2 + i) + 3 - i$ (մնացորդով բաժանել ենք նախորդ բաժանարարը նախորդ մնացորդի վրա):

Քայլ 3. $2 - 5i = (3 - i)(1 - i) - i$ (մնացորդով բաժանել ենք նախորդ բաժանարարը նախորդ մնացորդի վրա):

Քայլ 4. $3 - i = (-i)(1 + 3i)$ (բաժանումը կատարվել է առանց մնացորդի):

Նկատենք, որ յուրաքանչյուր քայլում մնացորդի նորմը մոնոտոն փոքրանում է: Վերջին ոչ զրոյական մնացորդը հավասար է i -ի, որը միավորի բաժանարար է (այսինքն՝ հակադարձելի է), ուստի դիտարկված թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

Գրականություն

1. Յու. Մ. Մովսիսյան, Բարձրագույն հանրահաշիվ և թվերի տեսություն, Երևան, 2008թ., 729 էջ:
 2. Հ. Ս. Միքայելյան, Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց 1, Էդիթ պրինթ հրատարակչություն, Երևան, 2004թ., 349 էջ:
 3. Հ. Ս. Միքայելյան, Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, 2, Էդիթ պրինթ հրատարակչություն, Երևան, 2004թ., 349 էջ:
 4. А.И. Мальцев, Алгебраические системы, Москва, 2012, 392 с.
- В.А.Тестов, Фундаментальность образования, Москва, 2006 // Педагогика, N4, с. 3-7. В.А.Тестов, Фундаментальность образования, Москва, 2016

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ.Սահակյանը: