

Ռուդիկ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոն, մ.գ.թ., պրոֆ.

ՀԱՄԱՍԵՌ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

Սույն հոդվածում դիտարկվում են հետևյալ հարցերը.

1. Հարթ երկրաչափական պատկերի ծանրության կենտրոն
2. Տարածաչափական մարմնի ծանրության կենտրոն
3. Համասեռ պատկերների և մարմինների ծանրության կենտրոնի կոորդինատներ
4. Ծանրության կենտրոնի կոորդինատների որոշման եղանակներ

Նշված հարցի ուսումնասիրությունը թույլ կտա նախ որոշել մի շարք հարթ պատկերների, տարածական մարմինների ծանրության կենտրոնը, որն ունի ինչպես տեսական, այնպես էլ կիրառական նշանակություն: Հոդվածը երկրաչափության և ֆիզիկայի միջառարկայական կապերի որոշ հարցերի մեկնաբանման և քննությունի օրինակ է:

Բանալի բառեր՝ երկրաչափական պատկեր, մարմին, համաչափություն, ծանրության կենտրոն, պատկերի տրոհում, մակերես, ծավալ, կետի կոորդինատներ:

Р. Аракелян

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

Изучение данного материала даст возможность определить центры тяжести некоторых фигур, что имеет как теоретическое, так и практическое значение.

Вопросы реализуемые в статье являются ярким примером межпредметных связей между физикой и геометрией.

Ключевые слова: геометрическая фигура, геометрическое тело, симметрия, центр тяжести, разбиение фигур, площадь, объем, координаты точки.

R. Araqelyan

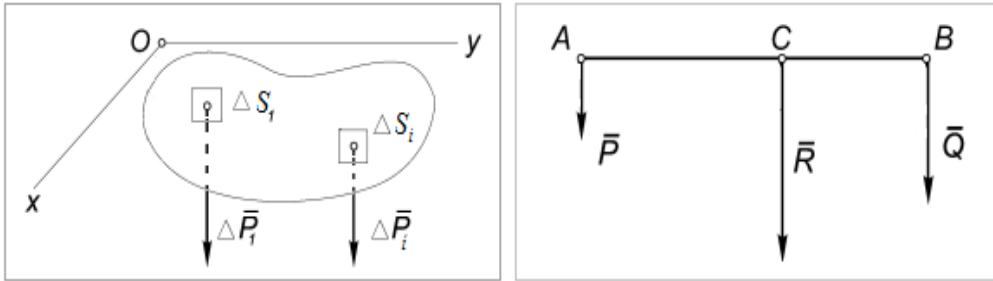
THE CENTRE OF GRAVITY OF A GEOMETRIC BODY

The study of the given material will make it possible to determine the centers of gravity of some flat and spatial figures, which has both theoretical and practical significance. The issues implemented in the article are a prime example of interdisciplinary connections between Physics and Geometry.

Keywords: geometric figure, geometric body, symmetry, center of gravity, figure splitting, area, volume, point coordinate.

Դիտարկենք հարթ պատկեր, որի կշիռը հավասար է P -ի, իսկ մակերեսը՝ S -ի: Հարցը քննարկենք Oxy կոորդինատական համակարգում: Եթե պատկերը տրոհենք տարրական մասերի ΔS_i մակերեսներով, ապա յուրաքանչյուր մասնիկի վրա կազդի երկրի ձգողության ΔP_i ուժը՝ ուղղված դեպի երկրագնդի կենտրոն: Ենթադրենք, որ պատկերի չափերը նշանակալից փոքր են Երկրի չափերի համեմատ, այդ ժամանակ պատկերի մասնիկների վրա ազդող ուժերը կհամարենք իրար զուգահեռ, նկ. 1:

Մահմանում. Հարթ պատկերի ծանրության կենտրոն կոչվում է այդ պատկերի տարրական մասերի ծանրության զուգահեռ ուժերի կենտրոնը:



Նկ. 1 Զուգահեռ ուժերի համակարգ

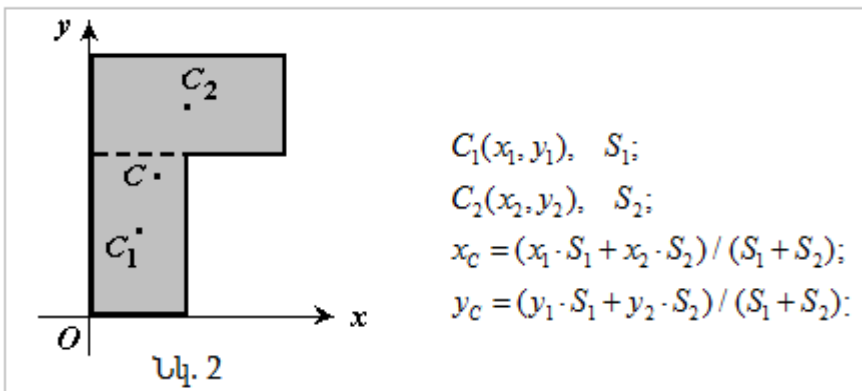
Որպես հատվածի ծանրության կենտրոն նշանակենք այդ հատվածի C կետը, որը բավարարում է $AC/CB = Q/P$ պայմանին:

Հարթ պատկերի դեպքում հարցը դիտարկվում է Oxy կոորդինատական համակարգում և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$x_c = (\sum \Delta S_i \cdot x_i) / (\sum \Delta S_i), \quad (1)$$

$$y_c = (\sum \Delta S_i \cdot y_i) / (\sum \Delta S_i):$$

Օրինակ 1. Գտնել պատկերի՝ (նկ. 2), ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:



Լուծում. Նկ. 2-ում պատկերը բաժանված է երկու ուղղանկյունների, որոնց ծանրության կենտրոնը ուղղանկյունների անկյունագծերի հատման կետն է, նկարում այդ կետերը նշված են C_1 և C_2 տառերով, իսկ պատկերի

ծանրության կենտրոնը՝ $C(x_c, y_c)$ -ով, ուղղանկյունների մակերեսները՝ S_1 և S_2 տառերով:

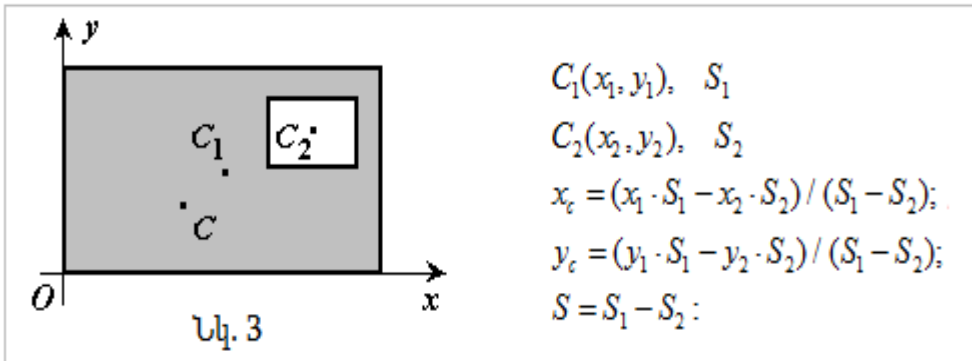
Օգտվենք տեսության (1) բանաձևերից: Ակնհայտ է, որ C -ն գտնվում է C_1C_2 հատվածի վրա: Լուծումը տեղադրված է նկ. 2-ի մոտ:

Բացասական մակերեսների մեթոդը

Օրինակ 2. Այս մեթոդը հանդիսանում է պատկերը մասերի տրոհման մեթոդի մասնավոր դեպք, որը կիրառվում է այն դեպքում, երբ պատկերից հեռացված են մասեր, որոնց և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները և մակերեսները հայտնի են, նկ. 3: Խնդրի լուծումը տեղադրված է նկարի մոտ:

Դիտարկենք մի օրինակ ևս:

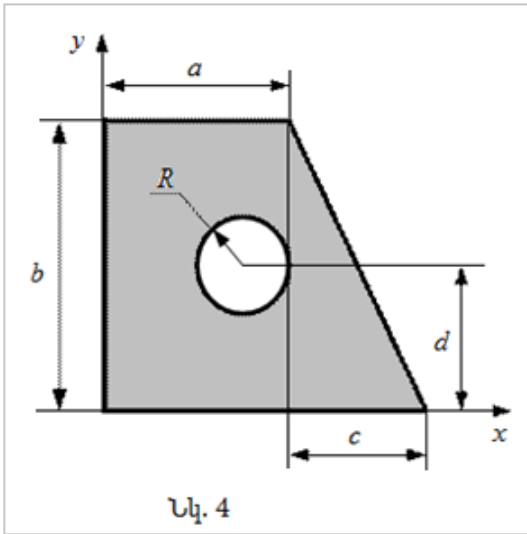
Օրինակ 3. Տրված է սեղանաձև համասեռ թիթեղ, որից հեռացված է նրա մի կտորը, որը ունի շրջանի ձև: Չափսերը ներկայացված են նկ. 4-ում: Որոշել պատկերի ծանրության կենտրոնը:



Լուծում. Թիթեղը տրոհենք երեք պատկերների՝ ուղղանկյան, եռանկյան և շրջանի:

Այդ պատկերների համար գտնենք մակերեսները և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Հաշվարկները տեղադրված են նկ. 4-ի մոտ:



$$S_1 = ab; x_1 = \frac{a}{2}; y_1 = \frac{b}{2};$$

$$S_2 = \frac{cb}{2}; x_2 = a + \frac{c}{3}; y_2 = \frac{b}{3};$$

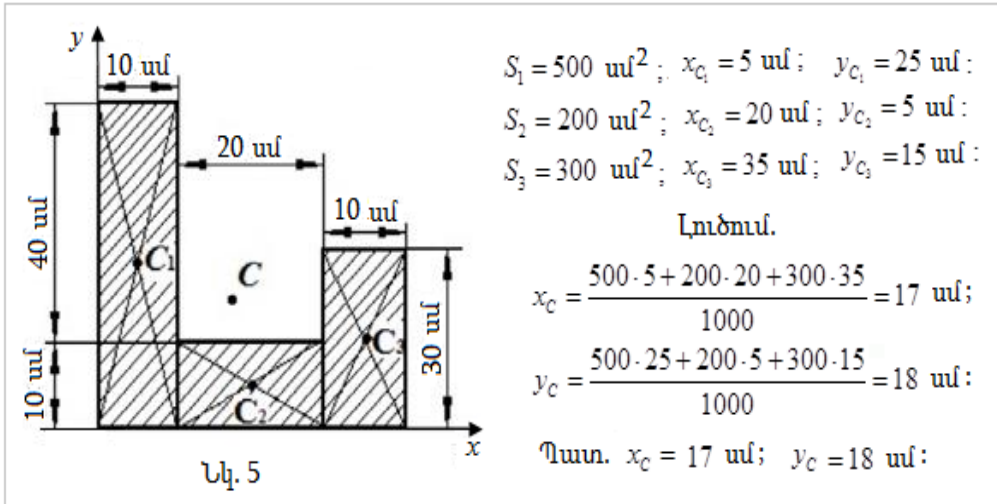
$$S_3 = \pi R^2; x_3 = a - R; y_3 = d;$$

ա)
$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 + S_2 - S_3};$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 + S_2 - S_3};$$

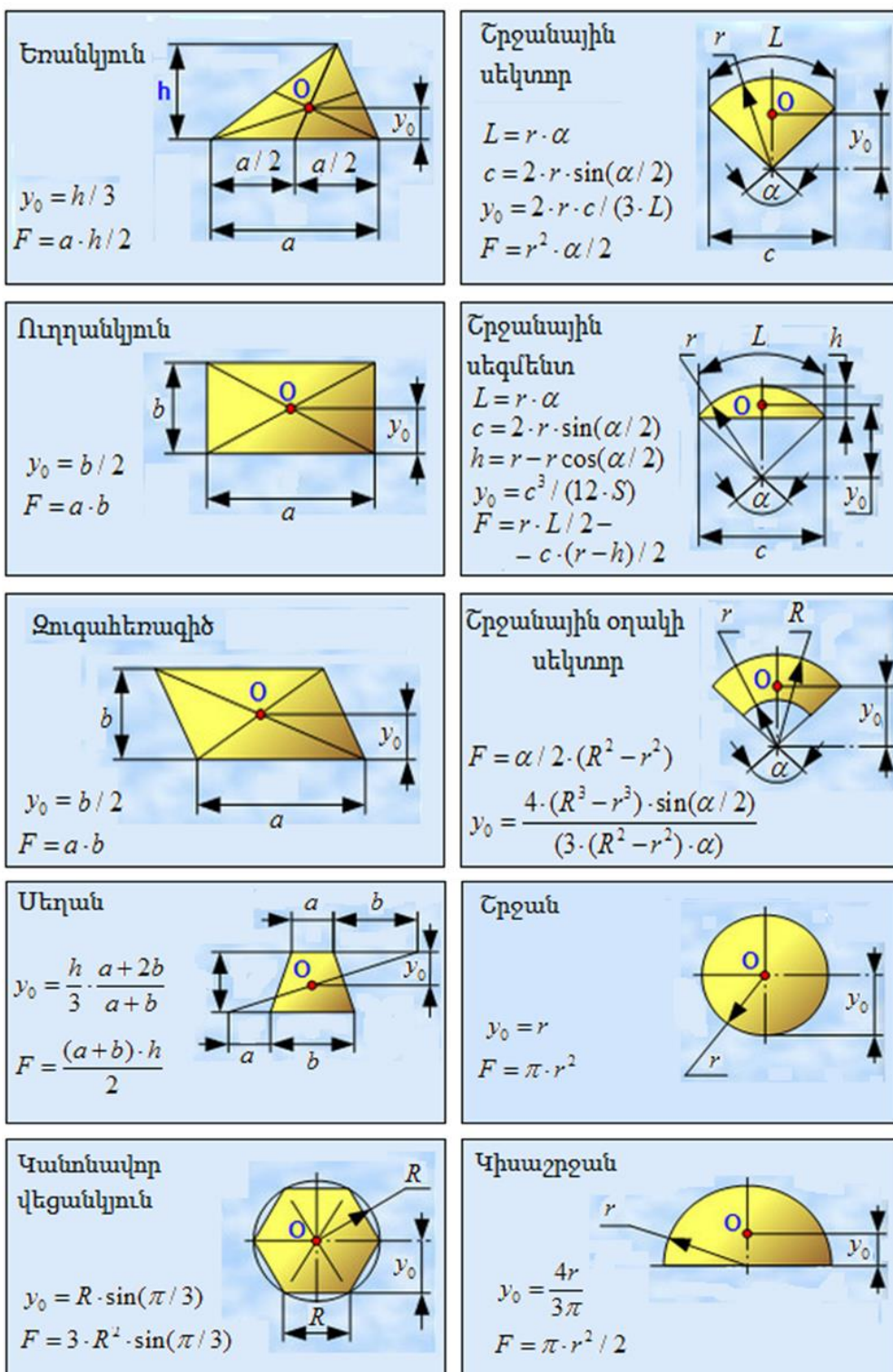
Մտում է ա) բանձներում տեղադրել ստացված մակերեսների մեծությունները և երեք պատկերների ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Օրինակ 4. Գտնել պատկերի ծանրության կենտրոնը, (նկ. 5):



Լուծումը տեղադրված է նկարի մոտ:

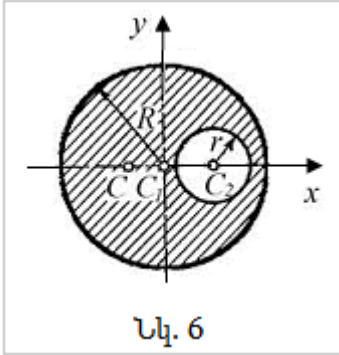
ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ԾԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԸ



Աղյուսակում F -ով նշանակված է պատկերի մակերեսը, իսկ y_0 -ով՝ պատկերի ծանրության կենտրոնի օրդինատը:

Դիտարկենք պատկերը տրոհման մի օրինակ ևս:

Օրինակ 5. Որոշել շրջանաձև թիթեղի ծանրության կենտրոնը որի շառավիղը հավասար է R -ի և ունի r շառավղով շրջանաձև կտրվածք, նկ. 6:



Նկ. 6

Շրջանի ծանրության կենտրոնն է $C_1(0,0)$ և ունի մակերես՝ $S_1 = \pi R^2$, կտրվածքի մակերեսը՝ $S_2 = \pi r^2$: Կտրվածքով թիթեղի ծանրության կենտրոնը պատկանում է Ox առանցքին, հետևաբար $y_c = 0$:

Լուծում.

$$S_2 = \pi r^2, x_1 = 0, x_2 = a, S = S_1 - S_2 = \pi(R^2 - r^2),$$

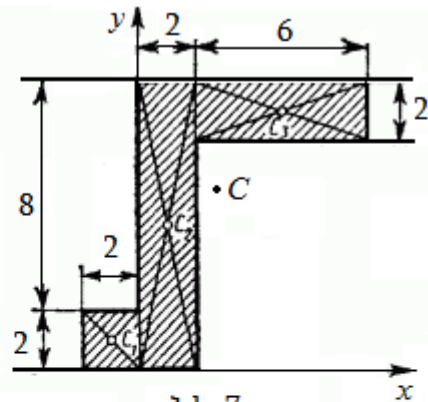
Տեղադրելով այս տվյալները հայտնի բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$x_c = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}; y_c = 0:$$

Պատասխան՝ $x_c = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}; y_c = 0$:

Օրինակ 6. Գտնել համասեռ թիթեղի, (նկ. 7), ծանրության կենտրոնը: Նկարի բոլոր չափումները տրված են սմ-ներով:

z/h	1	2	3
x_k	-1	1	5
y_k	1	5	9
s_k	4	20	12



Նկ. 7

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ սմ}^2;$$

$$x_c = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ սմ};$$

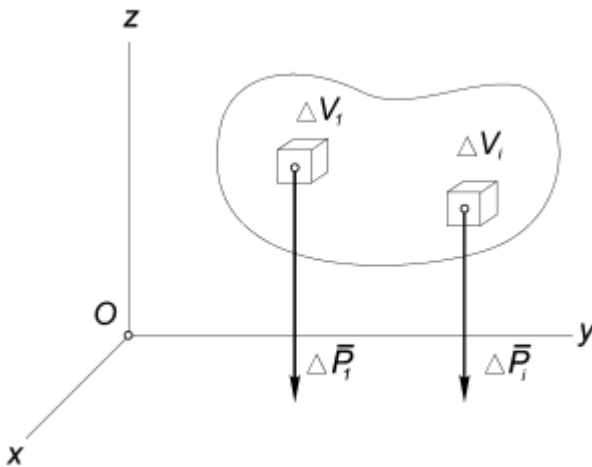
$$y_c = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ սմ};$$

Լուծում. Գտնենք ուղղանկյուններից յուրաքանչյուրի ծանրության կենտրոնը և մակերեսը: Այդ տվյալները տեղադրված են աղյուսակում:

Այս օրինակը հուշում է, որ պատկերի ծանրության կենտրոնը կարող է երբեմն չպատկանել պատկերին:

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

Դիտարկենք պինդ մարմին, որի կշիռը հավասար է P -ի, իսկ ծավալը՝ V -ի: Հարցը քննարկենք $Oxyz$ կոորդինատական համակարգում: Եթե մարմինը տրոհենք տարրական մասերի ΔV_i ծավալներով, ապա յուրաքանչյուր մասնիկի վրա կազդի երկրի ձգողության ΔP_i ուժը՝ ուղղված դեպի երկրագնդի կենտրոն: Ենթադրենք, որ մարմնի չափսերը նշանակալից փոքր են Երկրի չափերի համեմատ, այդ ժամանակ մարմնի



Նկ. 8 Զուգահեռ ուժերի համակարգ

մասնիկների վրա ազդող ուժերը կհամարենք իրար զուգահեռ, (նկ. 8):

Մահմանում. Պինդ մարմնի ծանրության կենտրոն կոչվում է այդ մարմնի տարրական մասերի ծանրության զուգահեռ ուժերի կենտրոնը:

Եթե մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները նշանակենք x_c, y_c, z_c -ով, ապա կգրենք՝

$$\begin{aligned} x_c &= (\sum \Delta V_i \cdot x_i) / (\sum \Delta V_i); \\ y_c &= (\sum \Delta V_i \cdot y_i) / (\sum \Delta V_i); \\ z_c &= (\sum \Delta V_i \cdot z_i) / (\sum \Delta V_i); \end{aligned} \quad (2)$$

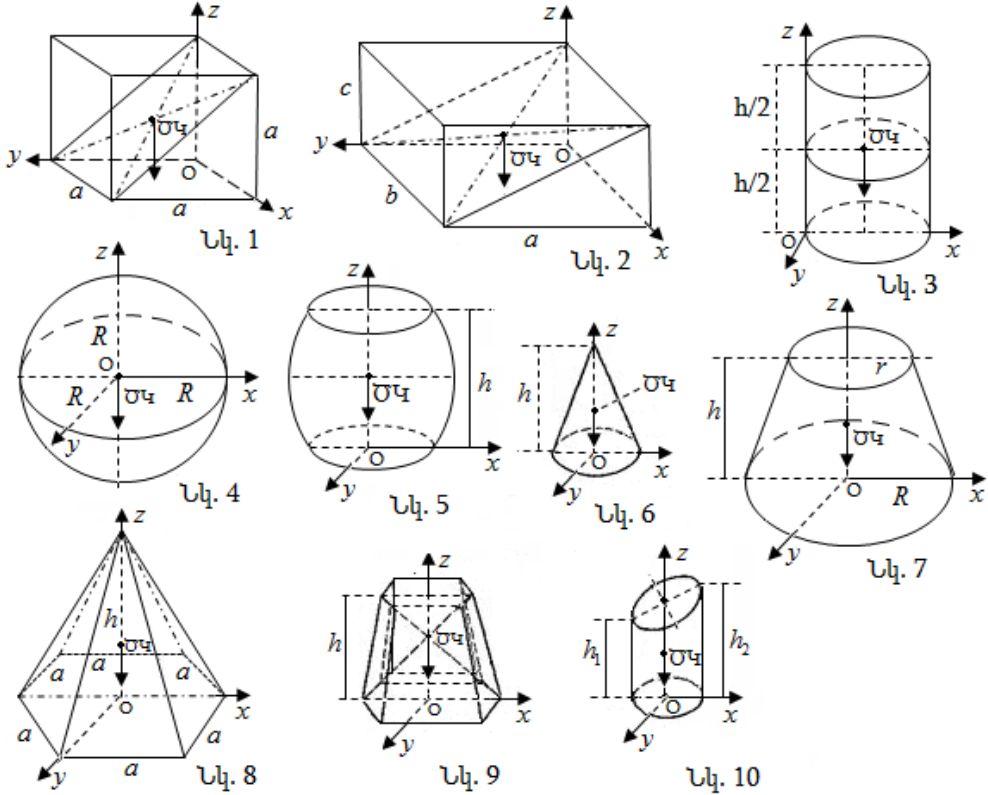
Ծանրության կենտրոնի որոշման ժամանակ օգտակար են հետևյալ թեորեմները:

1. Եթե համասեռ մարմինը ունի համաչափության հարթություն, ապա ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ հարթությունում:

2. Եթե համասեռ մարմինը ունի համաչափության առանցք, ապա ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ ուղղի վրա:

3. Եթե համասեռ մարմինը ունի համաչափության կենտրոն, ապա ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ կետում:

Մի քանի մարմինների ծանրության կենտրոնի պատկերումը



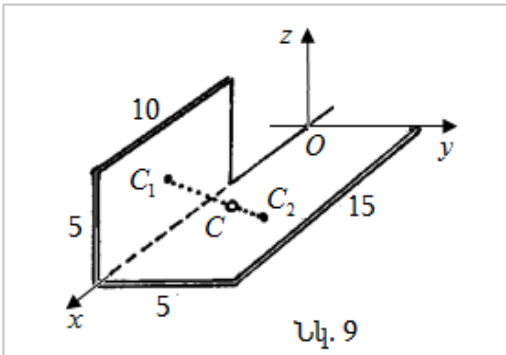
Մի քանի մարմինների ծավալը և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները

Մարմնի անվանումը	Նկարի համարը	Ծավալի բանաձևը	Ծանրության կենտրոնի կոորդինատները
Խորանարդ	Նկ. 1	$V = a^3$	$x = y = z = a / 2$
Ուղղանկյուն գուգահեռանիստ	Նկ. 2	$V = abc$	$x = a / 2, y = c / 2; z = b / 2$
Գլան	Նկ. 3	$V = \pi r^2 h$	$x = y = 0, z = h / 2$
Գունդ	Նկ. 4	$V = 4\pi r^3 / 3$	$x = y = z = 0$
Տակառ	Նկ. 5	$V = \frac{\pi}{12} H(2D^2 + d^2)$	$x = y = 0, z = H / 2$
Կոն	Նկ. 6	$V = \pi r^2 h / 3$	$x = y = 0, z = H / 5$

Հատած կոն	Նկ. 7	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$	$x = y = 0, z = \frac{H(R^2 + 3r^2 + 2Rr)}{4(R^2 + r^2 + Rr)}$
Բուրգ	Նկ. 8	$V = Sh / 3$	$x = y = 0, z = h / 5$
Հատած Բուրգ	Նկ. 9	$V = h(S + s + \sqrt{Ss}) / 3$	$x = y = 0, z = \frac{h(S + 2\sqrt{Ss} + 3s / S)}{5(s + \sqrt{Ss})}$
Հատած գլան	Նկ. 10	$V = \frac{1}{2} R^2 (H + h)$	$x = y = 0, z = \frac{1}{2} (H + h)$

Օրինակ 7. Գտնել ուղիղ անկյան տակ ծռած թիթեղի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, որի չափումները տրված են նկ. 9-ում:

Լուծում. Նախ գտնենք ուղղանկյունների ծանրության կենտրոնի կոորդինատները և մակերեսները:



$$x_1 = 20 \text{ սմ}; \quad y_1 = 0 \text{ սմ}; \quad z_1 = 2,5 \text{ սմ};$$

$$x_2 = 7,5 \text{ սմ}; \quad y_2 = 2,5 \text{ սմ}; \quad z_2 = 0 \text{ սմ};$$

$$S_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ սմ}^2;$$

$$S_2 = 5 \cdot 15 = 75 \text{ սմ}^2;$$

Քանի որ պատկերը տարածաչափական է, օգտվենք (2) բանաձևերից և կազմենք ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Օրինակ 8. Հաշվել նկ. 10-ում պատկերված համասեռ մարմնի

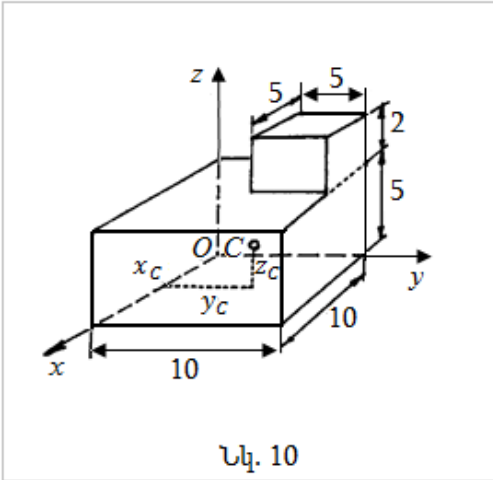
$$x_c = \sum \frac{S_i x_i}{S} = \frac{50 \cdot 20 + 75 \cdot 7,5}{50 + 75} = 12,5 \text{ սմ};$$

$$y_c = \sum \frac{S_i y_i}{S} = \frac{50 \cdot 0 + 75 \cdot 2,5}{125} = 1,5 \text{ սմ};$$

$$z_c = \sum \frac{S_i z_i}{S} = \frac{50 \cdot 2,5}{125} = 1,0 \text{ սմ};$$

ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Լուծում. Մարմինը կազմված է երկու զուգահեռանիստերից, որոնցից յուրաքանչյուրի համար կարող ենք գտնել ծանրության կենտրոնի կոորդինատները և ծավալները:



Նկ. 10

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \text{ սմ}; & y_1 &= 5 \text{ սմ}; & z_1 &= 2,5 \text{ սմ}; \\ x_2 &= 2,5 \text{ սմ}; & y_2 &= 7,5 \text{ սմ}; & z_2 &= 6 \text{ սմ}; \end{aligned}$$

$$V_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500 \text{ սմ}^3;$$

$$V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50 \text{ սմ}^3;$$

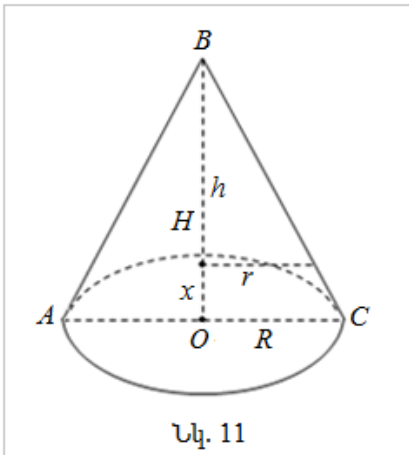
$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{500 + 50} = 4,77 \text{ սմ};$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V} = \frac{500 \cdot 5 + 50 \cdot 7,5}{550} = 5,23 \text{ սմ};$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{550} = 2,82 \text{ սմ};$$

Պատասխան՝ $x_c = 4,77 \text{ սմ}; y_c = 5,23 \text{ սմ}; z_c = 2,82 \text{ սմ};$

Օրինակ 9. Գտնել ուղիղ շրջանային կոնի ծանրության կենտրոնը, նկ. 11:



Նկ. 11

Լուծում. Թող կոնի հիմքի շառավիղը R է, բարձրությունը H :

Ակնհայտ է, որ կոնի ծանրության կենտրոնը գտնվում է բարձրության վրա: Ծանրության կենտրոնով կոնի հիմքին զուգահեռ տարած հարթությամբ կոնի ծավալը բաժանվում է հավասար մասերի:

Ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը կոնի հիմքից նշանակենք x -ով:

Օգտվելով վերը նշված պայմանից և նկ. 11-ում պատկերված եռանկյունների նմանությունից՝ կկատարենք հետևյալ հաշվարկները.

$$V_R = \frac{1}{3} \pi R^2 H; \quad V_r = \frac{1}{3} \pi r^2 h;$$

Քանի որ $2V_r = V_R$, ապա

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{2h}{H}; \quad (3)$$

Եռանկյունների նմանությունից կգրենք՝

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2}: \quad (4)$$

(1) -ից և (2) -ից կստանանք՝

$$\frac{2h}{H} = \frac{H^2}{h^2}; \quad 2h^3 = H^3 \Rightarrow \frac{h^3}{H^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$h = H - x; \quad \frac{H - x}{H} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{x}{H} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$\sqrt[3]{2} \approx 1,25; \quad x \approx H(1 - \frac{1}{1,25}) = \frac{0,25}{1,25} = \frac{H}{5}:$$

$$\text{Պատասխան՝ } x = \frac{1}{5}H:$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Гашков С. Б., Центры тяжести и геометрия. Издательство Московского центра непрерывного математического образования. Москва 2015
2. Առաքելյան Ռ. Լ. Մաթեմատիկա, «Զանգակ – 97» հրատ., Երևան, 2010.
3. Moccow-stud.com

Հոդվածը տպագրության է ներաշխարհել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Տ.Սահակյանը: