

ՀՏԴ 371.31:51, 378.147:51
 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Միքայել ԱՊՐԵՍՅԱՆ

ԱրԴՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս

E-mail: 58AME@mail.ru

ԱՄԻՄԱՏՈՏՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Աշխատանքում դիտարկված են ֆունկցիաների գրաֆիկներ: Ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման ժամանակ կիրառում են հետևյալ հնարքները՝ «կենտրոն» կառուցում, գործողություններ գրաֆիկների հետ (գրաֆիկների գումարում, հանում, բազմապատկում), ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ (տեղաշարժ, սեղմում, ձգում): Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման ժամանակ օգտակար է պարզել նրա բնութագրիչ առանձնահատկությունները: Որոշ դեպքերում սովորողների մոտ առաջանում են դժվարություններ՝ կապված կորի ասիմպտոտների հետ: Հոդվածի նպատակն է դիտարկել կորի ասիմպտոտների հետ կապված դժվարությունների հաղթահարումը:

Բանալի բառեր՝ ֆունկցիայի գրաֆիկ, կորագիծ, ուղղաձիգ, հորիզոնական և թեք ասիմպտոտներ, ֆունկցիայի սահման, գրաֆիկների գումարում, հանում, բազմապատկում, ուղիղ, խնդիր, լուծում:

М. Апресян

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИЕ АСИМПТОТЫ

В работе рассмотрены графики функций. При построении графиков функций применяются следующие приемы: построение «по точкам»; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение графиков); преобразования графиков (сдвиг, растяжение). При построении графика функции полезно выяснить его характерные особенности. В некоторых случаях у обучающихся возникают трудности, связанные с асимптотами кривых. Цель статьи помочь учащимся преодолеть трудности, связанные с данной темой.

Ключевые слова: График функции, криволинейные, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты, предел функции, сложение, вычитание, умножение графиков, прямая, задача, решение.

М. Apresyan

CONSTRUCTING THE GRAPH OF A FUNCTION HAVING ASYMPTOTES

The article considers the graph of a function. For constructing the graph of a function we used the following methods: construction "on points"; actions on graphs (addition, subtraction, multiplication of graphs); transformations of graphs (shifting, stretching). For constructing the graph of a function, it is useful to find out its characteristic features. In some cases, students have difficulties with asymptotes of the curve. The

purpose of the article is to help students to overcome the difficulties with asymptotes of the curve.

Keywords: Graph of a function, curvilinear, vertical, horizontal, a slant (oblique) asymptote, limit, determination, addition, subtraction, multiplication, straight line, task, solution.

Ֆունկցիաներն ուսումնասիրելիս հաճախ օգտվում են նրա գրաֆիկից: Ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման համար գոյություն ունեն շատ հնարքներ: Առավել հետաքրքիր է, երբ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման համար օգտագործվում են հնարավոր քիչ քայլեր: Այդ առումով առանձնահատուկ են ասիմպտոտներ ունեցող ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցումը: Հոդվածի նպատակն է դյուրացնել կորի ասիմպտոտների հետ կապված դժվարությունների հաղթահարումը: Ասիմպտոտների իմանալը կարևոր է ամբողջ գրաֆիկի ձևը ճիշտ պատկերացնելու համար: Ասիմպտոտների իմանալը օգնում է նաև ճշգրիտ որոշելու ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը նրա ամբողջ որոշման տիրույթում:

Աշխատանքում առաջարկվում են ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման վերաբերյալ մի քանի խնդիրներ:

Խնդիր 1. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} :$$

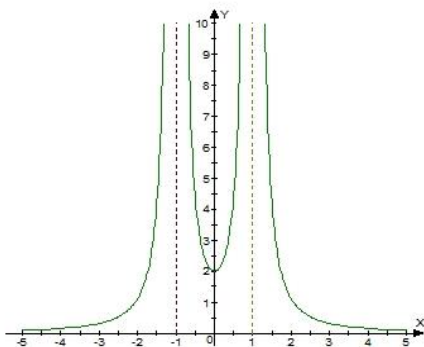
Լուծում: Նախ կարելի է հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad (1)$$

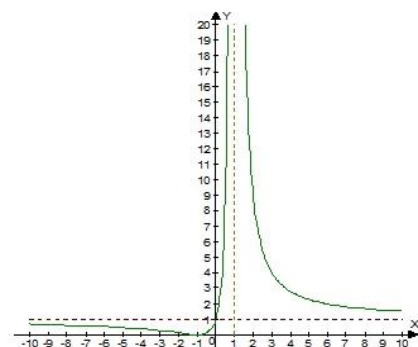
Հաշվի առնելով (1)-ը՝ կարող ենք ասել, որ $x = -1$ և $x = 1$ ուղիղները դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հանդիսանում են ուղղաձիգ ասիմպտոտներ: $y = 0$ ուղիղը դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հանդիսանում է հորիզոնական ասիմպտոտ, որովհետև արկա են հետևյալ պայմանները.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 :$$

$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 1-ում:



Նկ.1



Նկ.2

Խնդիր 2. Լառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

Լուծում: Քանի որ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

ապա $y=1$ ուղիղը ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հորիզոնական ասիմպտոտ է: Բացի դրանից, քանի որ

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = +\infty,$$

ապա $x=1$ ուղիղը դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի համար ուղղաձիգ ասիմպտոտ է:

Դժվար չէ նկատել, որ տված ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;1), (-1;0)$ կետերով և ամբողջովին գտնվում է վերին կիսահարթությունում: Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ.2-ում:

Խնդիր 3. Լառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

Լուծում: Նախ կարելի է որոշել թեք ասիմպտոտի գոյությունը: Դրա համար պետք է գտնել հետևյալ սահմանները.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x(x-1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$$

Այսպիսով $y = x + 2$ ուղիղը տված ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հանդիսանում է թեք ասիմպտոտ: Քանի որ

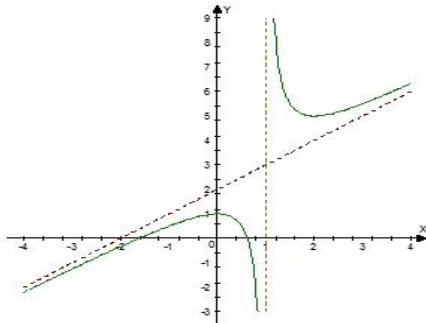
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = -\infty,$$

ապա $x=1$ ուղիղը դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հանդիսանում է ուղղաձիգ ասիմպտոտ: Նշված ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ.3-ում: Վերլուծելով խնդիր 3-ի լուծումը՝ կարելի է նշված ֆունկցիան ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

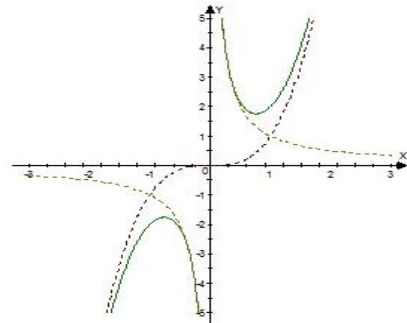
$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1} :$$

Դիտարկվող ֆունկցիայի ներկայացման վերջին տեսքից միանգամից ակնհայտ է դառնում, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար թեք ասիմպտոտ է հանդիսանում $y = x + 2$ ուղիղը: Կարելի է նկատել ավելին:

Խոսքը ֆունկցիայի գրաֆիկի կորագիծ ասիմպտոտների մասին է: Ուշագրավ է թերևս հետևյալ սահմանումը.



Նկ.3



Նկ.4

Սահմանում: $g(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոչվում է կորագիծ ասիմպտոտ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար, երբ $x \rightarrow a$, եթե $f(x)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)$$

տեսքով, որտեղ $\alpha(x)$ -ը a կետում անվերջ փոքր մեծություն է:

Գործնականում հանդիպում են ձախ, աջ ասիմպտոտների:

Խնդիր 4. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$$

Լուծում: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկի համար x -ը անվերջության ձգտելիս կորագիծ ասիմպտոտ է հանդիսանում $g(x) = x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի համար, x -ը զրոյին ձգտելիս, կորագիծ ասիմպտոտ է հանդիսանում $h(x) = \frac{1}{x}$ հիպերբոլը: Որոշելի գրաֆիկը

պատկերված է նկ.4-ում:

Խնդիր 5. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$f(x) = \frac{x|x|}{1-x}$$

Լուծում: Քանի որ

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{1-x} = +\infty,$$

ապա դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի համար ուղղաձիգ ասիմպտոտ է հանդիսանում $x=1$ ուղիղը: Ակնհայտ է, որ որոշելի գրաֆիկը հորիզոնական ասիմպտոտ չունի: Թեք ասիմպտոտների գոյությունը պարզելու համար կարելի է հաշվել հետևյալ սահմանները.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = -1,$$

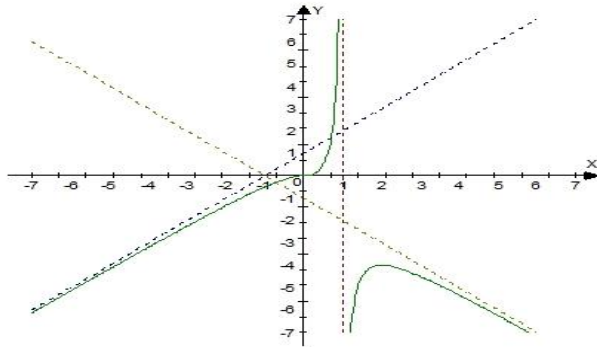
$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = -1:$$

Հետևաբար $y = -x - 1$ ուղիղը նշված ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հանդիսանում է աջ թեք ասիմպտոտ: Այնուհետև հաշվելով հետևյալ սահմանները՝

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{1-x} \right) = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{1-x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{1-x} \right) = 1:$$

Դժվար չէ պարզել, որ $y = x + 1$ ուղիղը որոնելի գրաֆիկի համար հանդիսանում է ձախ թեք ասիմպտոտ: Դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ.5-ում:



Նկ.5

Եզրակացություն: Դիտարկված խնդիրների լուծումները ցույց են տալիս, որ ասիմպտոտների իմանալը կարևոր է ամբողջ գրաֆիկի ձևը ճիշտ պատկերացնելու համար:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М., 1970, 400 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1972. 544с.
3. Գևորգյան Գ. Գ. և ուրիշներ: Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք, առաջին մաս, Երևան. 2007, 265 էջ

Հոդվածը տպագրության է ներառվում խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Տ.Սահակյանը: