

ՀՏԴ 512

Մաթեմատիկա

Պերգի ՄԱՀԱԿՅԱՆ

ԱրՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դոցենտ,
ֆ.ս.գ.թ.

E-mail: ter_saak_george@mail.ru

ԿՈՆՒ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում դիտարկվում է մի մեթոդ, որը թույլ է տալիս ալգորիթմորեն մոտենալ կոնի, ինչպես նաև նրան ներգծած կամ արտագծած գնդերի համադրությունների հետ կապված բազմաթիվ խնդիրների լուծմանը:

Բանալի բառեր` կոն, կոնի և գնդի համադրություններ:

Г. Саакян

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНУСА

В работе рассматривается метод, который позволяет алгоритмически подойти к решению многочисленных задач на конус, а также на комбинации конуса и вписанного или описанного шаров.

Ключевые слова: конус, комбинации конуса и шара

G. Sahakyan

ON ONE ALGORITHM FOR SOLVING TASKS CONCERNING CONE

The paper considers a method that allows algorithmically approaching the solution of numerous problems on a cone, as well as on a combination of a cone and inscribed or described balls.

Keywords cone, combination of cone and balls

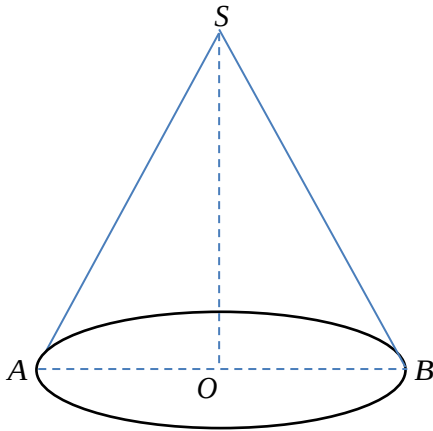
Կոնը (լատիներեն conus) կամ կոնական մակերևույթը ([1], [2]) որոշվում է որպես տարածության ուղիղների (ծնիչների) բազմություն, որը միացնում է որոշակի գծի (ուղղորդ) կետերը տարածության տրված կետի (գագաթի) հետ: Մասնավորապես, եթե կոնի ուղղորդը հանդիսանում է շրջանագիծ, իսկ գագաթը պրոյեկտվում է նրա կենտրոնը, ապա այդպիսի կոնը անվանում են կլոր կամ ուղիղ շրջանային: Ուղիղ շրջանային կոնը կարելի է ստանալ նաև պտտելով ուղղանկյուն եռանկյունը էջերից մեկի շուրջը: Այստեղ մենք քննարկելու ենք կլոր կոնը:

Կոնի վերաբերյալ, ինչպես նաև ուրիշ երկրաչափական խնդիրների լուծման ժամանակ, գործնականում աշակերտների համար ամենաբարդը սկզբնական փուլն է՝ խնդրի լուծման մոտեցման որոշումը, այսինքն խնդրի լուծման ալգորիթմի կառուցումը:

Այս հոդվածում շարադրված մեթոդը հանդիսանում է ալգորիթմ կոնի (ոչ միայն) վերաբերյալ լայն դասի խնդիրների լուծման համար: Նրա հիմքում

ընկած է կոնի որոշության գաղափարը, այսինքն՝ տրված պարամետրերով (հիմքի շառավիղը, ծնիչի երկարությունը, առանցքային հատույթի գագաթի մոտ անկյունը և այլն) նրա միակության որոշումը: Այդ մեթոդի պարզության շնորհիվ խնդրի լուծումը դառնում է հեշտ ընկալվող:

Պարզ է, որ ցակացած կոն կլինի միարժեքորեն որոշված, եթե որոշված է նրա առանցքային հատույթը՝ $\triangle AOB$ -ն (նկար 1):



Նկար 1:

$SO = h$ - կոնի բարձրությունը

$AO = OB = r$ - հիմքի շառավիղը

$SA = SB = \ell$ - կոնի ծնիչը

$\angle ASB = \alpha$ - առանցքային հատույթի

գագաթի մոտ անկյունը

$\angle SAO = \angle SBO = \varphi$ - ծնիչի թեքության

անկյունը հիմքի հարթության նկատմամբ:

Մյուս կողմից, քանի որ վերջինս իրենից ներկայացնում է հավասարասրուն եռանկյուն և որոշվում է երկու տարրերով (օրինակ՝ երկու ոչ հավասար կողմերով), ապա հեշտ է գալ այն եզրակացության, որ կոնի որոշության համար բավական է իմանալ նրա որևէ երկու պարամետրերը: Օրինակ՝ այսպիսին են կարող լինել (տես նկար 1) r և h , r և ℓ , ℓ և α , r և φ և այլն: Վերևում նշված ցանկացած երկու պարամետրերի տրման ժամանակ մնացածները հեշտությամբ որոշվում են (օրինակ՝ օգտագործելով հավասարուն եռանկյան հատկությունները): Օրինակ, եթե հայտնի են r և ℓ -ը, ապա $\triangle AOS$ -ից կունենանք

$$h = \sqrt{\ell^2 - r^2}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\ell}, \quad \alpha = 2 \arcsin \left(\frac{r}{\ell} \right), \quad \varphi = 90^\circ - \alpha:$$

Ելնելով վերը շարադրվածից՝ կարելի է առաջարկել կոնի վերաբերյալ խնդիրների լուծման ալգորիթմներից մեկը, որը խնդրի լուծման համար կոնի որոշության չհերիքող պարամետրերի ներմուծման մեջ է: Հետագայում դրանց արժեքները որոշվում են խնդրի պայմաններից, կամ դրանք կրճատվում են լուծման ընթացքում: Դիտարկենք նշված եղանակը հետևյալ խնդիրների լուծման համար:

Խնդիր 1: Կոնի ծնիչի և բարձրության երկարությունների գումարը հավասար է m -ի, առանցքային հատույթի գագաթի մոտ անկյունը՝ α -ի: Որոշե՛լ կոնի ծավալը:

Լուծում: Քանի որ տրված խնդրի մեջ կոնի պարամետրերից մեկը (α -ն) հայտնի է, ապա կոնի որոշության համար բավական է մտցնել ևս մի՝ երկրորդ պարամետր, օրինակ ℓ -ը: ΔAOS -ից կունենանք՝

$$SO = \ell \cos \frac{\alpha}{2} :$$

Օգտագործելով խնդրի պայմանը՝ կստանանք՝

$$\ell + \ell \cos \frac{\alpha}{2} = m :$$

Որտեղից կգտնվի, երկրորդ պարամետրը.

$$\ell = \frac{m}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} :$$

Այնուհետև, հերթականությամբ որոշում ենք՝

$$h = \ell \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}}, \quad r = \ell \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \frac{2m \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = m \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{6} m^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} \right) \cos \frac{\alpha}{2} :$$

Խնդիր 2: Գտնել ℓ կոնի առանցքային հատույթի գագաթի մոտ անկյունը, եթե կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսի հարաբերությունը հիմքի մակերեսին հավասար է 3-ի:

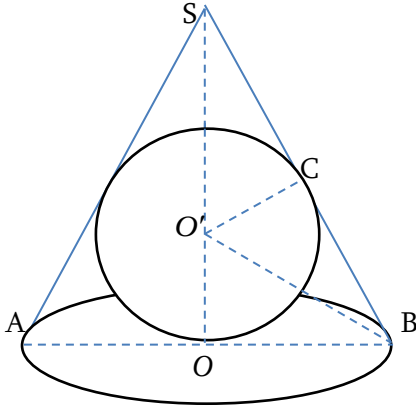
Լուծում: Տվյալ դեպքում կոնի որոշության համար անհայտ են պարամետրերից երկուսն էլ, և, քանի որ պահանջվում է որոշել առանցքային հատույթի գագաթի մոտ անկյունը, նպատակահարմար է պարամետրերից մեկը ընդունել հենց պահանջվող մեծությունը, այսինքն՝ α -ն, իսկ մյուսի՝ փոխարեն՝ r -ը, քանի որ այն մասնակցում է միաժամանակ հիմքի և լրիվ մակերևույթի մակերեսների բանաձևերում: Այնուհետև, հերթականությամբ կունենանք՝

$$S_h = \pi r^2, \quad \ell = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad S_\ell = S_h + S_k = \pi r^2 + \pi r \ell = \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) :$$

$$\frac{S_\ell}{S_h} = \frac{\pi r^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)}{\pi r^2} = 1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 3 :$$

Որտեղից կգտնենք $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, և ուրեմն՝ $\alpha = 60^\circ$:

Դիտարկված եղանակը որոշ հարաբերակցությունների ցուցադրմամբ կարող է օտագործվել նաև կոնի և գնդի համադրությունների հետ կապված խնդիրների լուծման ժամանակ: Բավական է իմանալ կապը կոնի պարամետրերի և գնդի շառավղի միջև: Կոնի մեջ ներդրված գնդի դեպքում խնդրի լուծումը հեշտությամբ իրագործվում է հետևյալ հեշտ ապացուցվող պնդումների օգտագործման միջոցով՝



1. Կոնի մեջ ներգծած գնդի շառավիղը
($r_n = OO' = O'C$) հավասար է կոնի առանցքային հատույթին ներգծած շրջանագծի շառավղին (նկար 2)
2. $\triangle SO'C$ նման է $\triangle SOB$ -ին:

Նկար 2:

$\triangle OO'B$ -ից և 2-րդ պնդումից կատանանք՝

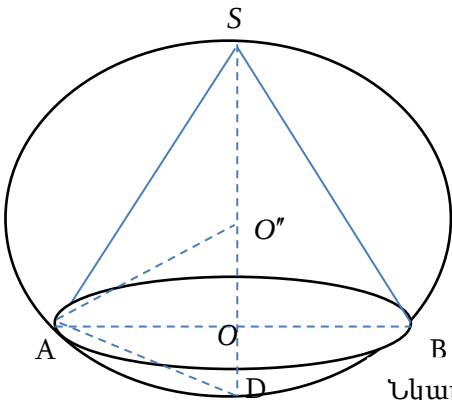
$$\bullet \quad r_n = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right), \quad (1)$$

$$\bullet \quad r_n = \frac{rh}{r + \ell}, \quad \left(r = \frac{S}{p} \right), \quad (2)$$

$$\bullet \quad \frac{r_n}{\ell} = \frac{r}{h - r_n} : \quad (3)$$

Այս բանաձևերը կապ են ստեղծում կոնի պարամետրերի և ներգծած գնդի շառավղի միջև:

Կոնի և նրան արտագծած գնդի համադրության դեպքում բավական է հենվել հետևյալ երկու պնդումների և նրանցից հետևող բանաձևերի վրա՝



Նկար 3:

1. Կոնին արտագծած գնդի շառավիղը
($r_a = AO'' = SO'' = O''D$) հավասար է նրա առանցքային հատույթի շուրջ արտագծած շրջանագծի շառավղին (նկար 3)
2. $\triangle SAD$ -ն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

ΔSAB -ից օգտագործելով սինուսների թեորեմը և $\ell^2 = 2r_a h$ բանաձևը՝ կստանանք

$$\bullet \quad r_a = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{\ell}{2 \sin \varphi}, \quad (4)$$

$$\bullet \quad r_a = \frac{\ell^2}{2h} : \quad (5)$$

ΔSAD -ից կունենանք՝ $AO^2 = SO \cdot OD$, $SA^2 = SD \cdot SO$ կամ

$$\bullet \quad r^2 = (2r_a - h)h : \quad (6)$$

Այս բանաձևերը կապ են ստեղծում կոնի պարամետրերի և արտագծած գնդի շառավղի միջև:

(1)-(6) առնչությունների օգտագործումը սկզբում շարադրված մեթոդի հետ թույլ կտան հաջողությամբ և ռացիոնալ ձևով լուծել կոնի վերաբերյալ բազմաթիվ տարբեր խնդիրներ: Ցուցադրենք այն հետևյալ խնդրի վրա:

Խնդիր 3: Կոնի բարձրության և հիմքի շառավղի հարաբերությունը հավասար է k : Որոշել կոնին ներգծած և արտագծած գնդերի ծավալների հարաբերությունը:

Լուծում: Այստեղ կոնի որոշության համար պարամետրերից ոչ մեկն էլ հայտնի չէ: Քանի որ մեզ հայտնի է կոնի բարձրության և հիմքի շառավղի հարաբերությունը, ապա նպատակահամար է մտցնել r և h -ը: Համաձայն խնդրի պայմանի՝ ունենք՝

$$\frac{h}{r} = k \quad \text{կամ} \quad h = kr:$$

Քանի որ գնդի ծավալն արտահայտվում է նրա շառավղի միջոցով, ապա մեզ անհրաժեշտ է որոշել կոնին ներգծած և արտագծած գնդերի շառավղիները: (1) բանաձևից ունենք՝

$$r_n = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} :$$

ΔSAO -ից (տես նկար 2)՝

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{r} = k :$$

Օգտվելով $\operatorname{tg} \varphi = k = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$ բանաձևից դժվար չէ գտնել, որ

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1+k^2}-1}{k} :$$

Հետևաբար,

$$r_n = r \cdot \frac{\sqrt{1+k^2} - 1}{k} :$$

Արտագծած գնդի շառավիղը որոշելու համար տվյալ դեպքում հարմար է օգտվել (6) բանաձևից, որտեղից կգտնենք՝

$$r_a = \frac{r^2 + h^2}{2h} = \frac{r^2 + k^2 r^2}{2kr} = \frac{r(1+k^2)}{2k} :$$

Այսպիսով՝ կարող ենք ստանալ պահանջվող արժեքը՝

$$\frac{V_n}{V_a} = \frac{\left(r \frac{\sqrt{1+k^2} - 1}{k} \right)^3}{\left(\frac{r(1+k^2)}{2k} \right)^3} = 8 \left(\frac{\sqrt{1+k^2} - 1}{1+k^2} \right)^3 :$$

Գրականություն

1. Ս.Է. Հակոբյան: Երկրաչափություն 11: Երևան, Տիգրան Մեծ, 2010, -136 էջ:
2. Л. С. Атанасян и другие. Геометрия 10-11. –М.:, 2013, -255 стр.

Հոդվածը տպագրության է նրաշխարհում ԵՊՀ ֆունկցիոնալ ամբիոնի և դիֆերենցիալ հավասարումների ամբիոնի պրոֆեսոր, ֆ.մ.գ.դ. Տ.Ն.Հարությունյանը: