УДК 512
Математика

Георгий САAКЯН
доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ, к.ф.м.н.
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе определяется функционал, позволяющий при определенных условиях на коэффициенты двумерной линейной осциллирующей системы дифференциальных уравнений с знакопостоянными коэффициентами, найти число нулей компонент решений. Рассматриваются также некоторые свойства функционала.
Ключевые слова: *система линейных дифференциальных уравнений, осцилляция, нули компонент решений*

Գ. Սահակյան

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ԵՐԿՉԱՓ ՕՑԻԼՅԱՑՎՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉԻ ՄԱՍԻՆ

Այս աշխատանքում սահմանվում է ֆունկցիոնալ, որը հաստատուն նշաններով գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների օցիլյացվող համակարգի գործակիցների վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում թույլ է տալիս գտնել լուծման կոմպոնենտների զրոների քանակը: Դիտարկվում են նաև ֆունկցիոնալի որոշ հատկությունները:
Բանալի բառեր՝ *գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, օցիլյացիա, լուծումների կոմպոնենտների զրոները:*

G. Sahakyan

ABOUT ONE CHARACTERISTIC FOR A TWO-DIMENSIONAL OSCILLATING LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this work, a functional is determined that allows, under certain conditions on the coefficients of a two-dimensional linear oscillating system of differential equations with sign-constant coefficients, to find the number of zeros of the components of the solutions. Some properties of the functional are also considered.
Keywords. *system of linear differential equations, oscillation, zeros of the components of solutions*

Рассматривается двумерная линейная однородная система

$$\begin{cases} y_1' = p(t) y_2, \\ y_2' = r(t) y_1, \end{cases} \tag{1}$$

в предположении, что до $p, r \in C[a,b],\ p(t) > 0,\ r(t) < 0.$

Определение 1. Нетривиальное решение $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) назовем осциллирующим на $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0,\ t_i \in [a,b],\ i = 1,2.$ (см., например, [1]-[3]).

Определение 2. Система (1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае система (1) называется неосциллирующей.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема (см. [4]).

Теорема. *Пусть в системе* (1) $p, r \in C^2[a,b]$ *,*

$$P(t) = -\frac{p(t)}{r(t)},$$

1. $p'(t) \le 0,\ r'(t) \ge 0,$ $\qquad (p'(t) \ge 0,\ r'(t) \le 0),$
2. $P'(t) \ge 0$ $\qquad (P'(t) \le 0),$
3. $(\ln P(t))'' \ge 0,$

Тогда, если уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau) r(\tau)}\, d\tau = \pi k,\ k \in Z, \tag{2a}$$

и

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau) r(\tau)}\, d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \tag{2b}$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$*, то число нулей первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы* (1) *на* $[a,b]$ *совпадет с числом корней уравнения* (2a) ((2b)) *или будет отличаться на единицу.*

Мы предполагаем, что для рассматриваемой системы (1) выполняются условия теоремы. Введем в рассмотрение следующий функционал

$$f(p,r,a,b) = \left[\frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{-p(t) r(t)}\, dt \right], \tag{3}$$

где $[\,x\,]$ означает целую часть числа x. В случае сложного поинтегрального выражения вычисление функционала, очевидно, можно произвести, например, используя один из известных математических пакетов, таких, как MathCad, MatLab или воспользоваться одним из известных численных методов. Согласно утверждению теоремы и из соотношения (2a) следует, что значение этого функционала будет равно числу нулей (или на единицу больше - в случае наличия нулевого начального значения) первой компоненты решения системы на рассматриваемом отрезке. Число нулей второй компоненты при этом или совпадет со значением функционала или будет отличаться на единицу. Например, если рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1' = t y_2, \\ y_2' = -t^3 y_1, \end{cases} \tag{4}$$

на отрезке $[1,5]$, то значение функционала (3) при этом будет равно 13-и:

$$f(p,r,a,b) = \left[\frac{1}{\pi} \int_1^5 t^2 dt \right] = [13.157] = 13 .$$

В данном случае $p(t) = t,\ r(t) = -t^3,\quad a = 1,\ b = 5$. Ниже, на рисунке 1, приводится график частного решения системы (4) при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$ (здесь и всюду в дальнейшем на рисунках $y0$ соответствует компоненте y_1, а $y1$ соответствует компоненте y_2), построенный в среде Mathcad. Как видно из рисунка 1 в приведенном примере число нулей первой и второй компонент равно 13-и.

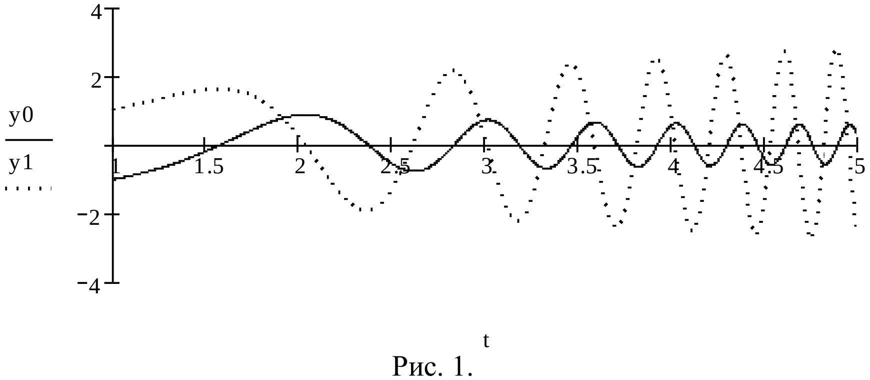

Рис. 1.

Рассмотрим теперь некоторые свойства функционала (3).

1. Непосредственно из определения (3) следует

$$f(p,r,a,b) = f(r,p,a,b) = f(pr,1,a,b) = f(-pr,-1,a,b) .$$

2. Если функции $p(t), r(t), p_1(t)$ и $r_1(t)$ удовлетворяют условиям теоремы, причем

$$p(t)r(t) = p_1(t)r_1(t) ,$$

то для частных решений этих систем с одинаковыми начальными значениями имеем

$$f(p,r,a,b) = f(p_1,r_1,a,b) .$$

Доказательство также следует из определения фукнционала f .

Например, если рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1' = t^4 y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases} \tag{5}$$

то, нетрудно проверить, что ее коэффициенты $p(t) = t^4,\ r(t) = -1$ удовлетворяют условиям теоремы, причем $t^4 \cdot (-1) = t \cdot (-t^3)$. На рисунке 2 приведен график частного решения этой системы на отрезке $[1,5]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$. Число нулей первой компоненты на этом отрезке, как и в случае системы (4), равно 13-и.

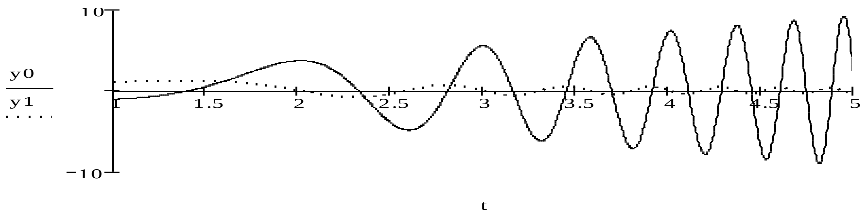

Рис.2

3. Для $\lambda > 0$

$$f(\lambda p, r, a, b) = f(p, \lambda r, a, b) = \left[\frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{-\lambda p(t) r(t)}\, dt \right] = \sqrt{\lambda} \left[\frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{-p(t) r(t)}\, dt \right] = \sqrt{\lambda}\, f(p, r, a, b) \cdot$$

Из этого свойства, в частности, следует, что при умножении одного из коэффициентов системы на $\lambda > 0$, число нулей соответствующей компоненты новой системы на рассматриваемом отрезке при этом увеличится в $\sqrt{\lambda}$ раз. Ниже приводится графическая интерпретация одного частного решения ($y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$) системы

$$\begin{cases} y_1' = t^4 y_2, \\ y_2' = -4 y_1, \end{cases} \tag{6}$$

на отрезке $[1,5]$. В данном случае $p(t) = t^4,\ r(t) = -4$. Как видно из рисунка 3, при одинаковых начальных условиях, число нулей первой компоненты системы (6) по сравнению с той же компонентой системы (5), увеличилось в два раза.

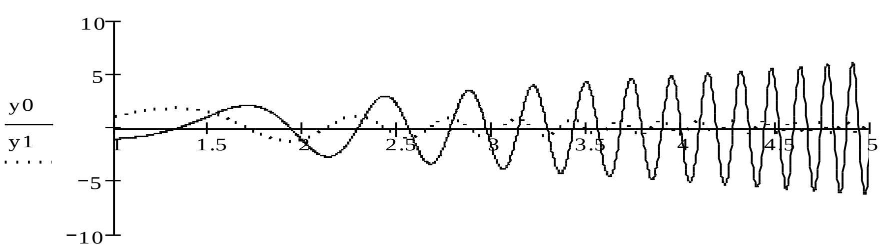

Рис. 3.

4. $$f(p+p_0,r,a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-\left(p(t)+p_0(t)\right)r(t)}dt\right]=\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p(t)r(t)-p_0(t)r(t)}dt\right]<$$

$$<\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p(t)r(t)}dt\right]+\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p_0(t)r(t)}dt\right]=f(p,r,a,b)+f(p_0,r,a,b).$$

Аналогично получим

$$f(p,r+r_0,a,b)<f(p,r,a,b)+f(p,r_0,a,b).$$

5. $$f(pp_0,r,a,b)=f(p,p_0r,a,b)\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p(t)p_0(t)r(t)}dt\right]=\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{p_0(t)}\sqrt{-p(t)p_0(t)r(t)}dt\right]\le$$

$$\le\max_{t\in[a,b]}\sqrt{p_0(t)}\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p(t)r(t)}dt\right]=\left\|\sqrt{p_0}\right\|f(p,r,a,b), \qquad (7)$$

где $\|p_0\|=\max\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{p_0(t)}$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда в системе (1)

$$p(t)=t^4,\ \ r(t)=-1,\ \ p_0(t)=-\ln(t+1).$$

Тогда будем иметь

$$f(p,p_0r,a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b t^2\sqrt{\ln(t+1)}dt\right]=16, \quad \|p_0\|=\ln 6=1.792,$$

(см., также рис. 4). Неравенство (7) в этом случае примет вид:

$$16<13\cdot 1.792=23.296.$$

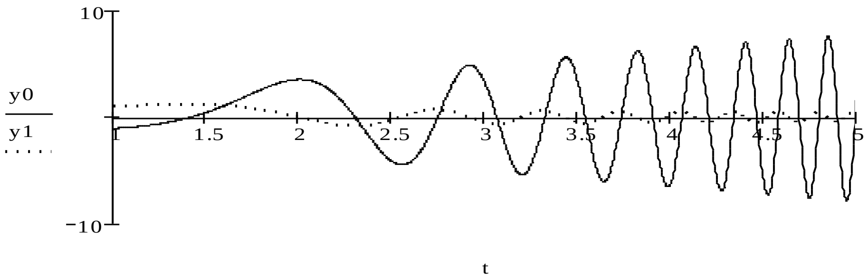

Рис. 4.

6. Если функция $p_0(t)$ сохраняет свой знак на отрезке $[a,b]$, то

$$f(p_0p,p_0r,a,b)\le\|p_0\|f(p,r,a,b).$$

Действительно, имеем

$$f(pp_0,p_0r,a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p(t)p_0^2(t)r(t)}dt\right]=\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b|p_0(t)|\sqrt{-p(t)r(t)}dt\right]\le$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]}|p_0(t)|\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{-p(t)r(t)}dt\right]=\|p_0\|f(p,r,a,b).$$

Литература

1. Lomtatidze A. and Partsvania N. *Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first linear ordinary differential equations*, Georgian Math. J., 6 (1999), № 3, pp. 285-298.

2. Polak L *Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimentional systems of linear ordinary differential equations*, Georgian Math. J., 11 (2004), № 1, pp. 137-154.

3. Саакян Г.Г. *Об осцилляционных свойствах решений некоторых систем однородных дифференциальных уравнений, Вестник ВГУ, серия физика, математика.* N2, 2010, стр. 139-141.

4. Саакян Г.Г. *Об осцилляционных свойствах некоторых двумерных линейных систем дифференциальных уравнений, Бюллетень науки и практики.* N1, 2017, стр. 8-18.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԵՊՀ ֆունկցիոնալ ամբիոնի և դիֆերենցիալ հավասարումների ամբիոնի պրոֆեսոր, ֆ.մ.գ.դ. Տ.Ն.Հարությունյանը: