

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 66

МАЙ, 2023

ВЫПУСК 2

DOI: 10.54503/0571-7132-2023.66.2-301

## ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПОЛИТРОП В ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ. II. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЭМДЕНА И ПРОФИЛЕЙ ПЛОТНОСТИ В ЗАМКНУТОМ ВИДЕ

Г.А.САИЯН

Поступила 19 декабря 2022

Принята к печати 22 мая 2023

Представлены аналитические приближения точных решений нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры второго рода для классических газовых политроп в замкнутой форме. Это уравнение рассматривается в качестве интегрального эквивалента дифференциального уравнения Лейна-Эмдена с граничными условиями, описывающего известные политропные модели в рамках задачи Коши. С помощью линейного приближения этого интегрального уравнения и общих эвристических соображений физического характера, а также с помощью графического моделирования и варьирования параметров аппроксимирующих функций, получены приближенные выражения функций Эмдена и безразмерной плотности в замкнутом виде со среднеквадратичной точностью от  $\sim 10^{-4}$  до нескольких процентов для серии значений показателя политропы  $n$ , представляющих практический интерес ( $n = 0.5, 3, 4, 6, \infty$ ). Полученное нами ранее приближение пространственной плотности изотермической модели сравнивается с псевдоизотермическим законом, описывающим распределение плотности темной материи вокруг спиральных галактик и используемым разными авторами для исследования их кривых вращения.

**Ключевые слова:** *политропы:уравнение Лейна-Эмдена:нелинейное интегральное  
уравнение типа Вольтерры второго рода:функция Эмдена*

**1. Введение.** Как известно, для политроп с показателями  $n \neq 0, 1, 5$  не существует точных решений уравнения Лейна-Эмдена (далее - ЛЭ-уравнение) в замкнутом виде [1-3]. Однако это не исключает возможности поиска приближенных решений такого типа. Ввиду сложности проблемы, аналитические или полуаналитические подходы могут здесь сочетаться с интуитивными предположениями о возможном функциональном виде приближенных решений. Существует множество методов получения аналитических приближений функций Эмдена: разложения в степенные ряды [1-6], метод вспомогательных функций [7], Паде-аппроксимации [8], полиномы Адомяна [9-11], ортогональные полиномы [12,13] и полиномы Бернштейна [14] и т.д. В настоящей работе мы не стремились к продолжению этой традиции, а также не пытались найти какие-то новые итерационные процедуры взамен известных [15] для получения максимально высокой точности приближения. Как правило, они

приводят к усложнению аппроксимирующих функций и неизвестно, в какой степени могут представлять интерес с физической точки зрения, хотя с их помощью достигается высокая степень приближения. Нас интересовали приближения функций Эмдена в виде простых (элементарных) функций или их комбинаций (пусть даже с незначительным ущербом для точности приближения), имеющих, по возможности, компактный вид, как, например, в [16], которые, как мы надеемся, могли бы упростить расчеты физических характеристик политроп в аналитическом плане или в плане удобства их применения в процессе численного интегрирования. В дальнейшем, в качестве оценки близости точной и аппроксимирующей функций, будет использоваться среднеквадратичное приближение  $\sigma$ , определяемое по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sum_1^N \frac{[y_i - f_i]^2}{N}}, \quad (1)$$

где  $y_i$  - точное значение функции Эмдена (или пространственной плотности) в  $i$ -й точке, полученное численным интегрированием,  $f_i$  - значение аппроксимирующей ее функции в той же точке,  $N$  - число точек, выбранных для вычисления. Во всех графиках, приводимых ниже, используются значения  $y_i$ , полученные в [17]. Важно заметить, что некоторые политропные модели допускают не одно близкое по точности приближение к функции Эмдена и пространственной плотности в замкнутой форме.

В разделе 1 нашей работы [18]<sup>1</sup> было представлено нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерры второго рода в качестве эквивалента дифференциального ЛЭ-уравнения с граничными условиями в рамках решения задачи Коши. Здесь мы пользуемся термином "нелинейное интегральное уравнение" и в дальнейшем будем говорить о решениях применительно к нему. Далее, необходимо иметь в виду, что предлагаемые в работе аппроксимации функций Эмдена и пространственной плотности политроп в замкнутой форме не обязательно вытекают непосредственно из этого уравнения или его линейного приближения, но некоторые могут быть обоснованы с его помощью либо аналитически, либо численно. На графиках функций, представленных в тексте, профили плотности и функции Эмдена приводятся практически в том же порядке, что и в тексте. Точки на графиках, соответствующих точным решениям ЛЭ-уравнения, полученным в [17], используются здесь в качестве стандарта сравнения для оценки точности наших приближений.

*2. Приближенные аналитические решения.* Упомянутое выше нелинейное интегральное уравнение в рамках классической теории сферических газовых политроп имеет вид:

---

*В работе [18] в формуле (33) вместо степени " $\beta$ " должно быть " $\omega$ "*

$$\theta(\xi) = 1 - \int_0^\xi \theta^n(x)x(1-x/\xi)dx. \quad (2)$$

Оно справедливо для показателей политропы  $n < \infty$  при граничных условиях

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (3)$$

В случае изотермической сферы аналогом уравнения (1) является уравнение

$$\psi(\xi) = \int_0^\xi e^{-\psi(x)}(1-x/\xi)dx \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0. \quad (5)$$

В приведенных выше уравнениях  $\theta(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  являются функциями Эмдена для каждого случая соответственно, т.е., безразмерными гравитационными потенциалами указанных политроп.

Помимо условий, наложенных на функцию Эмдена в рамках задачи Коши, можно также наложить и дополнительные естественные требования, которым должны удовлетворять эти функции, вытекающие из физических соображений - это четность относительно переменной  $\xi$ , существование у нее точки перегиба при  $n \geq 1$ , конечность массы политропы, зависящая от  $n$ .

В качестве первого шага преобразуем исходное нелинейное интегральное уравнение (2) в многомерное интегральное уравнение с участием интегралов повышающейся кратности, как это показано в [18]. Если ввести обозначение  $\tau(\xi) = \theta^n(\xi)$ , то уравнение (2), после возвведения его обеих частей в  $n$ -ю степень, можно записать в виде:

$$\tau(\xi) = 1 - n \int_0^\xi \tau(x)x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx + n(n-1) \int_0^\xi \tau(x)x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \int_0^x \tau(x')x' \left(1 - \frac{x'}{x}\right) dx' \dots \quad (6)$$

Здесь первое приближение дает линейное интегральное уравнение типа Вольтерры второго рода, зависящее от показателя политропы как от параметра. Его решением является сферическая функция Бесселя нулевого порядка  $j_0(\sqrt{n}\xi)$ . Однако графическое сравнение приближения к точной функции Эмдена, полученной методом численного интегрирования [17], показывает, что в качестве начального приближения к ней удобнее брать функцию  $j_0(\lambda\xi/\sqrt{n})$ , где  $n > 1$ , а  $\lambda$  - некоторое положительное число порядка единицы [19]. Сопоставление графика точной функции Эмдена со сферической функцией Бесселя показывает, что для получения более удачного аналитического приближения в замкнутой форме, необходимо умножить эту функцию Бесселя на некоторый корректирующий фактор меньше единицы, который, исходя из необходимости сохранения четности функции Эмдена, также должен

быть четной функцией, возможно, зависящей от свободного параметра (или параметров). Выбор этого фактора зависит, вообще говоря, от показателя политропы.

**2.1. Случай  $n = 0.5$ .** Этот показатель близок к области значений ( $0.5 < n < 1.0$ ), которые, как считается [20], приближенно соответствуют уравнению состояния ультрапрелиativистского вырожденного нейтронного газа в нейтронных звездах, хотя точное уравнение состояния вещества при столь высоких плотностях, порядка ядерной и выше, неизвестно (см., например, [21]) из-за неуверенности в описании взаимодействия между нейтронами (кроме того, в ультрапрелиativистском случае, вместо барионной плотности, как в обычной теории политроп, в уравнениях состояния присутствует плотность энергии). Уравнение (2) при  $n = 0.5$  примет вид:

$$\theta(\xi) = 1 - \int_0^\xi \theta^{1/2}(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx. \quad (7)$$

Вводя, как было указано выше, подстановку  $\tau(x) = \theta^{1/2}(x)$ , можно привести уравнение к виду

$$\tau(\xi) = \left[ 1 - \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \right]^{1/2} \quad (8)$$

или

$$\tau^2(x) = 1 - \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx. \quad (9)$$

При таком преобразовании нелинейность из подынтегральной части выносится в левую часть уравнения. Однако оно не поддается решению в замкнутом виде. Для нахождения его приближенного решения, с учетом того, что функция Эмдена не превышает единицу, формально разложим правую часть уравнения (8) в ряд Тейлора по степеням интеграла как переменной, что аналогично разложению бинома Ньютона с полуцелой степенью (см. также уравнение (6) и уравнения (53)-(55) в разделе 1 [18]):

$$\tau(\xi) = 1 - \frac{1}{2} \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx - \frac{1}{4} \int_0^\xi \tau(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx \int_0^x \tau(x') x' \left(1 - \frac{x'}{x}\right) dx' \dots \quad (10)$$

Ограничивавшись первыми двумя членами разложения в (10), получим линейное интегральное уравнение Вольтерры, решением которого является функция  $\tau(\xi) = j_0(\xi/\sqrt{2})$  или, ввиду приближенности,  $\theta(\xi) \approx (j_0(\xi/\sqrt{2}))^2$ . Напомним, что  $\tau(\xi)$  представляет собой безразмерную плотность распределения (профиль плотности). Она очень хорошо описывается приведенной сферической функцией Бесселя вплоть до расстояний  $\xi \approx 2$  при радиусе политропы

$\xi_1 = 2.75269805$ . Графическое моделирование показывает, что вклад отброшенных членов разложения (9) может быть учтен простым возведением функции Бесселя в некоторую степень, зависящую от четной степени  $\xi$ , а именно, в степень  $1 + \xi^6/319$ . Как степень, так и знаменатель рассматривались в качестве параметров, которые варьировались вплоть до достижения минимального значения  $\sigma$ :

$$\tau(\xi) = \left(j_0\left(\xi/\sqrt{2}\right)\right)^{1+\xi^6/319}. \quad (11)$$

Оно очень хорошо описывает профиль плотности политропы ( $\sigma \approx 8.9382 \cdot 10^{-3}$ ) вплоть до значения  $\xi = 2.6$ , т.е., практически, во всей области ее определения, за исключением концевой части. Для функции Эмдена, после возведения (11) в квадрат, приближение имеет вид:

$$\theta(\xi) = \left(j_0\left(\xi/\sqrt{2}\right)\right)^{2(1+\xi^6/319)}. \quad (12)$$

Точность этой аппроксимации вплоть до значения  $\xi = 2.6$  составляет  $\sigma = 1.278 \cdot 10^{-2}$ , что чуть хуже, чем для плотности. Такие расхождения естественны для представленных функций, поскольку они не являются точными решениями интересующих нас уравнений. Возможно слабое улучшение значения  $\sigma$  (до  $1.264 \cdot 10^{-2}$ ) путем замены степени 6 на 6.04 в (11) и (12), которое представлено ниже графически.

Можно, однако, подобрать более удачную функцию во всей области определения, исходя из некоторых наводящих соображений, без строгого математического обоснования. Предположим, что ввиду близости показателей политроп  $n=0$  и  $n=0.5$ , безразмерная плотность, как и функция Эмдена, при  $n=0.5$  должна содержать такое же квадратичное выражение, как функция Эмдена для несжимаемой жидкости  $1 - \xi^2/6$ , но в более обобщенном виде:

$$\theta^{1/2}(\xi) = \tau(\xi) = \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)^\omega, \quad (13)$$

где  $\xi_0$  и  $\omega$  - свободные параметры, определяемые путем графического моделирования. Вариации этих параметров дают минимальное значение  $\sigma \approx 8.41478 \cdot 10^{-3}$  при  $\xi_0 = 2.75269805$  (радиусе политропы) и  $\omega = 0.5874$ , что близко к значению показателя политропы. Таким образом, получаем

$$\theta^{1/2}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)^{0.5874}. \quad (14)$$

Этот результат можно улучшить, если заменить постоянную степень 0.5874 на переменную в виде четной функции  $\xi$ , исходя из требования симметрии функции Эмдена. Проверка показывает, что наиболее приемлемой является функция четвертой степени  $D - E\xi^4$ , где коэффициенты  $D$  и  $E$  подбираются

так, чтобы обеспечить максимальную степень приближения к искомой точной функции. Так, для профиля плотности находим:

$$\theta^{1/2}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)^{0.629 - 0.001405\xi^4} \quad (15)$$

при  $\sigma \approx 1.69 \cdot 10^{-3}$ , тогда как для функции Эмдена  $\sigma \approx 1.173164 \cdot 10^{-3}$  при  $D = 1.2618$  и  $E = 0.00281$ . Таким образом, мы имеем:

$$\theta(\xi) = \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)^{1.2618 - 0.00281\xi^4}. \quad (16)$$

Заметим, что (16) является почти точным квадратом (15), как и должно быть в идеале, а численное интегрирование уравнения (7), после подстановки в него плотности (15), дает приближение к функции Эмдена, отличающееся от (16) на  $\sigma \approx 10^{-4} - 10^{-3}$ . Заметим, что квадрат функции (14) приближает функцию Эмдена с  $\sigma = 7.8669 \cdot 10^{-3}$ .

Выражение (14) удобно для выполнения прямого интегрирования в (7) и получения еще одного приближенного аналитического выражения функции Эмдена этой модели, весьма близкого к (16). Вычисление дает:

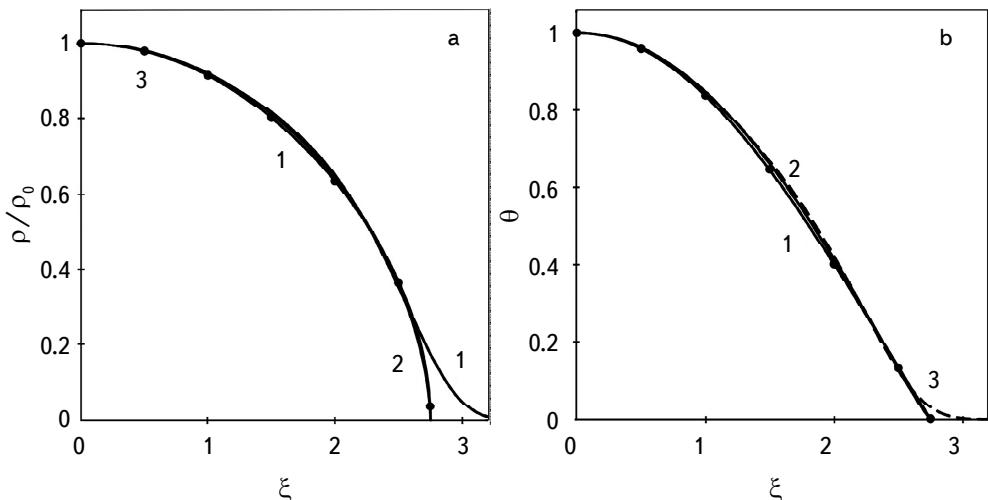


Рис.1. а) Профиль плотности полигропы с  $n = 0.5$ . Кривая 1 (с хвостиком) задана формулой (11), а 3 - формулой (15). Кривая (2) описывает профиль плотности (14), которая визуально почти неотличима от функции 3. б) Приближение функции Эмдена полигропы с  $n = 0.5$ . Сплошные кривые представляют аппроксимирующие функции. Кривая 1 описывается формулой (16), а пунктирная кривая 3 - формулой (12). Кривая 2 является квадратом (14) и располагается между (1) и (3). Она визуально почти неотличима от (16) и (17), которая здесь не представлена.

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi_0^2}{2(\omega+1)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right)^{\omega+1} \right] + \frac{\xi_0^3}{2\xi} B\left(\frac{\xi^2}{\xi_0^2}; \frac{3}{2}, \omega+1\right), \quad (17)$$

где  $B\left(\frac{\xi^2}{\xi_0^2}; \frac{3}{2}, \omega+1\right)$  - неполная бета-функция, определяемая интегралом [22]:

$$B(z; x, y) = \int_0^z t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0. \quad (18)$$

При указанных выше значениях  $\omega = 0.5874$  и  $\xi_0 = 2.75269805$ , полученное приближение к функции Эмдена обращается в нуль при  $\xi \approx 2.73867051$  (с точностью  $\sim 10^{-7}$ ), т.е., охватывает практически всю область определения реальной функции Эмдена. При этом отклонение от точной функции на этом интервале составляет  $\sigma \approx 3.48167 \cdot 10^{-3}$ . Графики функций (11), (12) и (14)-(16) представлены на рис.1а, б. Функции (16) и (17) различаются на  $\sim 10^{-4}-10^{-3}$  в зависимости от точки внутри области определения.

**2.2. Случай  $n = 1.5$  и  $n = 2.0$ .** Первый случай относится к вырожденному нерелятивистскому электронному газу в маломассивных белых карликах. Приближенные выражения функции Эмдена для этих политроп, содержащие сферическую функцию Бесселя нулевого порядка, приведены в [19], поэтому мы на них останавливаться не будем. Заметим лишь, что они отличаются высокой степенью приближения. При  $n = 1.5$ ,  $\sigma = 8.087 \cdot 10^{-3}$ , а при  $n = 2$ ,  $\sigma = 4.12321 \cdot 10^{-3}$  при найденных значениях параметров функций.

На примере политропы с  $n=2$  мы продемонстрируем один метод нахождения последовательных приближений решения уравнения (2), который является частным случаем процедуры, изложенной в *Примечании 1* [18] на примере уравнения Фредгольма 2-го рода. Она дает возможность построения итерированных ядер и ряда Неймана, с помощью которого можно получить резольвентную функцию, а значит, и решение линейного интегрального уравнения. В то же время он позволяет представить решение политропного уравнения в виде ряда по возрастающим степеням  $\xi$ .

Уравнение (1) при  $n=2$  имеет вид

$$\theta(\xi) = 1 - \int_0^\xi \theta^2(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx. \quad (19)$$

Вместо функции  $\theta(x)$  в подынтегральном выражении в (19) подставим всю правую часть этого уравнения (назовем эту подстановку "матрёшкой"). Будем иметь:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = & 1 - \int_0^{\xi} \left( 1 - \int_0^x \theta^2(x') x' \left( 1 - \frac{x'}{x} \right) dx' \right)^2 x \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) dx = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \\ & 2 \int_0^{\xi} x \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) dx \int_0^x \theta^2(x') x' \left( 1 - \frac{x'}{x} \right) dx' - \int_0^{\xi} x \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) \left[ \int_0^x \theta^2(x') x' \left( 1 - \frac{x'}{\xi} \right) dx' \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Повторяя эту процедуру несколько раз, получим следующее разложение  $\theta(\xi)$  по степеням переменной  $\xi$  вплоть до первых четырех членов

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{60} - \frac{11\xi^6}{7560} + \dots, \quad (21)$$

что с точностью до членов порядка  $\xi^6$  совпадает с последовательными приближениями Пикара и с разложением  $\theta(\xi)$  в ряд Тейлора для малых значений  $\xi$  (см. также [9,10] относительно применения метода декомпозиции Адомяна для решения ЛЭ-уравнения)

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} - \frac{n(8n-5)\xi^6}{15120} + \frac{n(122n^2-183n+70)}{3265920} \xi^8 \dots \quad (22)$$

при  $n = 2$ .

**2.3. Случай  $n = 3$ .** Как известно, такая политропная модель применяется для описания звезд главной последовательности и хорошо согласуется со стандартной моделью Эддингтона [23]. Кроме того, она описывает состояние вырожденного релятивистского электронного газа в белых карликах. Для этого случая было предложено весьма хорошее приближение функции Эмдена в виде гиперболического секанса [16]:

$$\theta\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{e^{\xi/\sqrt{3}} + e^{-\xi/\sqrt{3}}}. \quad (23)$$

Среднеквадратичная оценка аппроксимации составляет  $\sigma = 1.70619 \cdot 10^{-2}$ . Если бы это решение было точным, то в качестве распределения плотности нужно было бы брать функцию  $(\theta(\xi/\sqrt{3}))^3$ . Проверка показывает, что последняя функция близка к точному профилю плотности политропы на величину  $\sigma = 1.00954 \cdot 10^{-2}$ . Ее можно несколько улучшить, если рассматривать переменную степень вида  $3 - dx^2$ , где  $d$  - свободный параметр. Варьируя  $d$ , можно добиться минимального отклонения приближения от точного распределения плотности, полученного методом численного интегрирования. Оно имеет следующий вид (при  $\sigma = 9.1326 \cdot 10^{-3}$ ):

$$\frac{\rho(\xi)}{\rho_0} = \left[ \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) \right]^{3-0.0176\xi^2}. \quad (24)$$

Однако функция типа (24) не удобна для аналитических расчетов. С этой точки зрения гораздо более подходящим приближением плотности оказывается функция  $\exp(-q\xi^2)$ , где коэффициент  $q$  находится так же, как и параметры ранее обсуждаемых функций. Минимум  $\sigma$  достигается при значении  $1.70252 \cdot 10^{-2}$  для  $q=0.427$ , что несколько хуже приведенного выше значения для функции (24). Графически функции  $\exp(-0.427\xi^2)$  и (24) очень близки друг к другу (см. рис.2а). Новое приближение функции Эмдена можно получить, если подставить  $\exp(-q\xi^2)$  в уравнение (2) и произвести необходимое интегрирование. После некоторых преобразований получим выражение:

$$\theta(\xi) = 1 - \int_0^\xi e^{-qx^2} x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx = 1 - \frac{1}{2q} \left(1 - e^{-q\xi^2}\right) - \frac{1}{2\xi q \sqrt{q}} \gamma\left(\frac{3}{2}, q\xi^2\right) = 1 - \frac{1}{2q} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi \sqrt{q}} \operatorname{erf}(\sqrt{q}\xi)\right], \quad (25)$$

где  $\gamma(3/2, z^2)$  - нижняя неполная гамма-функция, а  $\operatorname{erf}(z)$  - функция ошибок. При этих преобразованиях использовались следующие соотношения для данных функций [23]:

$$\gamma(s+1, x) = s\gamma(s, x) - x^s e^{-x}, \quad \gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}). \quad (26)$$

При  $q = 0.427$  аппроксимация (25) функции Эмдена с точностью  $\sigma = 3.21205 \cdot 10^{-2}$  согласуется с поведением (23). Максимальное среднеквадратичное отклонение функций (23) и (25) во всей области определения функции Эмдена ( $0 \leq \xi \leq 6.8968486$ ) составляет  $3.5486 \cdot 10^{-2}$ .

Заметим, что радиальное распределение массы (отношение массы, заключенной в объеме с радиусом  $\xi$  к полной массе политропы), численно рассчитанное по откорректированной функции (24), хорошо согласуется со стандартной моделью Солнца [24]. По этим расчетам получается, что почти 95% массы Солнца сосредоточено в объеме, занимающем примерно 22% объема звезды, что приводит к значению средней для этого объема плотности в  $6.204 \text{ г}/\text{см}^3$ , типичной для металлов.

В рамках описываемого подхода, как и в случае с  $n=1.5$ , приближенное выражение для функции Эмдена можно было бы искать, используя сферическую функцию Бесселя  $j_0(\lambda\xi/\sqrt{3})$ , помноженную на корректирующий фактор с квадратным членом (см. [19]). Однако найденные приближения уступают по точности полученным выше и мы их рассматривать не будем.

Графическое моделирование с помощью различных элементарных функций показывает однако, что при  $3.5 \leq \xi \leq 6.8968486$  более точным, чем (23) и (25), оказывается приближение:

$$\theta(\xi) = \frac{4.87}{x^2} \left( 1 - \frac{x^2}{6.8968486^2} \right)^{0.948765}. \quad (27)$$

Приближения (23) и (27) сшиваются в точке  $\xi = 4.27325$  и дают среднеквадратичное отклонение от функции Эмдена во всей области определения на уровне одного процента  $\sigma = 1.09537 \cdot 10^{-2}$ . Их комбинация может быть представлена в виде

$$\theta(\xi) = \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) H(4.27325 - \xi) + \frac{4.87}{x^2} \left( 1 - \frac{x^2}{6.8968486^2} \right)^{0.948765} H(\xi - 4.27325), \quad (28)$$

где  $H(x)$  - единичная функция Хевисайда:  $H(x > 0) = 1$ ,  $H(x \leq 0) = 0$ . Графики функций (23)-(25), (27) представлены на рис.2а, б.

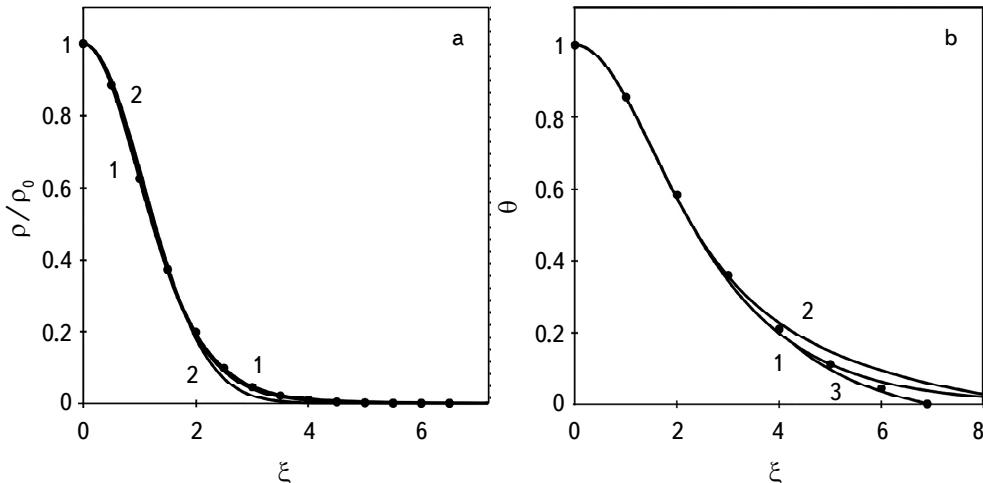


Рис.2. а) Приближение профиля плотности политропы с  $n = 3$ . Кривые, определяемые формулами (23) в кубической степени и (24), практически сливаются в (1) и ложатся на точки, соответствующие точным решениям ЛЭ-уравнения. Самая нижняя кривая (2) описывается формулой  $\exp(-0.427x^2)$ . б) Приближение функции Эмдена политропы с  $n = 3$ . Графики 1-3 обрываются на расстоянии  $\xi = 6.8968486$ . Функция (1) описывается формулой (23), 2 - формулой (25) и 3 - функцией (27) при  $\xi \geq 4.27325$ . Функции 1 и 3 сшиваются в точке  $\xi = 4.27325$  и образуют как бы единую кривую, описываемую формулой (28).

**2.4. Случай  $n = 4.0$  и  $n = 6.0$ .** Хотя эти политропные модели не ассоциируются с какими-либо известными конкретными астрофизическими объектами, тем не менее, нельзя исключать возможности их применения в будущем в рамках композитных политропных моделей, относящихся к классу уже знакомых объектов или систем.

Для нахождения приближения плотности пространственного распределения в них будем исходить из распределения плотности в модели Пламмера-

Шустера:

$$\theta^5(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}}, \quad (29)$$

т.е., политропы с  $n = 5$ , в качестве исходного приближения. Для этого рассмотрим некоторую условную политропную модель с  $n = 5(1 + \varepsilon)$ , где параметр  $|\varepsilon| < 1$ . Разложим функцию плотности пространственного распределения  $\theta^{5(1+\varepsilon)}(\xi)$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , ограничившись первыми четырьмя членами разложения. Похожий метод уже применялся в [25] к ЛЭ-уравнению в предположении, что данный параметр является существенно малой величиной по сравнению с показателем самой политропы, а еще ранее такая идея была предложена в работе [26], в которой предлагались новые приближенные аналитические решения ЛЭ-уравнения. Разложение имеет вид:

$$\theta^{5(1+\varepsilon)}(\xi) = \theta^5(\xi) \left[ 1 + 5\varepsilon \ln \theta(\xi) + \left( \frac{5^2}{2!} \right) \varepsilon^2 (\ln \theta(\xi))^2 + \left( \frac{5^3}{3!} \right) \varepsilon^3 (\ln \theta(\xi))^3 \right] \quad (30)$$

или, используя представление (29),

$$\theta^{5(1+\varepsilon)}(\xi) \approx \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}} \left[ 1 - \left( \frac{5}{2} \right) \varepsilon \ln \left( 1 + \xi^2/3 \right) + \left( \frac{5^2}{8} \right) \varepsilon^2 \ln^2 \left( 1 + \xi^2/3 \right) - \left( \frac{5^3}{48} \right) \varepsilon^3 \ln^3 \left( 1 + \xi^2/3 \right) \dots \right]. \quad (31)$$

При  $n = 4$ ,  $\varepsilon = -1/5$ , а при  $n = 6$ ,  $\varepsilon = 1/5$ . Подставляя указанные значения параметра  $\varepsilon$  в приведенное выше разложение, получим:

$$\theta^4(\xi) \approx \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \xi^2/3 \right) + \frac{1}{8} \ln^2 \left( 1 + \xi^2/3 \right) + \frac{1}{48} \ln^3 \left( 1 + \xi^2/3 \right) \dots \right], \quad (32)$$

$$\theta^6(\xi) \approx \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \xi^2/3 \right) + \frac{1}{8} \ln^2 \left( 1 + \xi^2/3 \right) - \frac{1}{48} \ln^3 \left( 1 + \xi^2/3 \right) \dots \right]. \quad (33)$$

Приведенные разложения достаточно близки к точным функциям пространственной плотности для указанных политропных моделей. Однако проверка показывает, что лучшего приближения можно достичь, если сохранить три члена разложения в квадратных скобках приведенных выражений, а вклад опущенных членов учесть путем возвведения этих скобок в некоторую степень, зависящую от  $\xi$ . Графическое моделирование показывает, что эта степень хорошо аппроксимируется экспоненциальной функцией от  $\xi^2$ , зависящей от параметра, подлежащего определению с помощью минимизации среднеквадратичной ошибки аппроксимации. Так, для политропы  $n=4$  получаем плотность распределения в виде:

$$\theta^4(\xi) \approx \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{5/2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \xi^2/3 \right) + \frac{1}{8} \ln^2 \left( 1 + \xi^2/3 \right) \right]^{\exp(-0.158\xi^2)}, \quad (34)$$

при  $\sigma = 6.351853 \cdot 10^{-4}$ . Для политропы  $n=6$  наилучшее приближение имеет вид:

$$\theta^6(\xi) \approx \frac{1}{(1+\xi^2/3)^{5/2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \xi^2/3\right) + \frac{1}{8} \ln^2\left(1 + \xi^2/3\right) \right]^{\exp(-0.197\xi^2)} \quad (35)$$

с  $\sigma = 1.1980887 \cdot 10^{-3}$ . Соответствующие им графики представлены на рис.3а.

В случае подстановки приведенных профилей плотности в уравнение (2), для получения приближений функций Эмдена указанных политропных моделей возникают громоздкие выражения, о практической пользе которых говорить не приходится. Проще всего вычислить корни 4-й и 6-й степени от (34) и (35) (как если бы они были точными решениями уравнения (2)), которые, как оказалось, обеспечивают степень приближения к точным функциям Эмдена на уровне нескольких процентов и менее процента (при  $n=4$ ,  $\sigma = 3.556 \cdot 10^{-2}$  во всей области определения, а при  $0 \leq \xi \leq 7.0$ ,  $\sigma = 9.3927 \cdot 10^{-3}$ , что охватывает основную область концентрации всей массы политропы). Соответственно, для  $n=6$  точность приближения на выбранном интервале расстояний  $0 \leq \xi \leq 16$  составляет  $\sigma = 1.594 \cdot 10^{-2}$ , в то время как в диапазоне  $0 \leq \xi \leq 8.0$ ,  $\sigma = 1.044 \cdot 10^{-3}$ . Эти данные указывают на некоторое расхождение между точными функциями Эмдена и их приближениями в хвостовой части, что можно увидеть на рис.3б, где точки, как было сказано выше, соответствуют точным решениям, полученным в [17] путем численного интегрирования ЛЭ-уравнения. Ожидать такой же точности приближений для функций Эмдена, как это имеет место для безразмерных профилей плотности, конечно, нельзя, поскольку речь идет о приближенных выражениях в замкнутом виде, а не точных решениях.

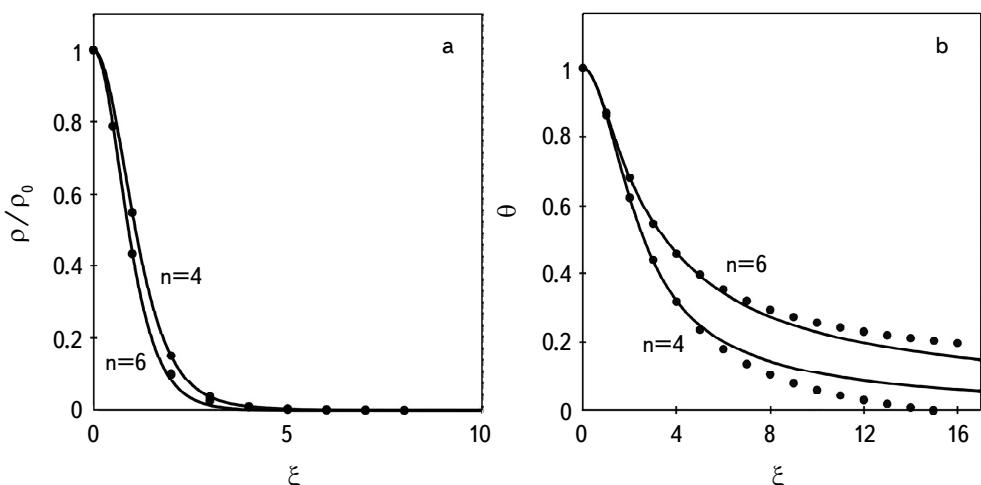


Рис.3. а) Приближение профилей плотности политроп с  $n = 4$  и  $n = 6$ . б) Приближение функций Эмдена политроп с  $n = 4$  и  $n = 6$ .

2.5. Случай  $n = \infty$ . Этот случай соответствует изотермической модели, которая описывается уравнением (3) с граничными условиями (4). Он подробно исследовался Чандрасекаром [2]. При малых значениях аргумента экспонента в (3) может быть приближенно заменена на 1, и тогда мы получаем поведение функции Эмдена  $\psi(\xi) = \xi^2/6$  в окрестности центра. Для плотности это дает  $\rho = e^{-\psi(x)} \approx 1 - \xi^2/6$ , что характерно для всех политропных моделей. Поведение функции Эмдена в этой модели при малых  $\xi$  можно уточнить, если произвести замену

$$e^{-\psi(x)} \approx 1 - \psi(x), \quad (36)$$

что позволяет свести (3) к неоднородному линейному интегральному уравнению

$$\psi(\xi) = \frac{\xi^2}{6} - \int_0^\xi \psi(x) x \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx, \quad (37)$$

решение которого находится элементарно:

$$\psi(\xi) = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\xi} - 1 \approx \frac{\xi^2}{6}. \quad (38)$$

Аналитическое приближение функции Эмдена для изотермической сферы в замкнутом виде было предложено и детально описано нами в работе [19]. Приближение пространственной плотности имеет вид:

$$e^{-\psi(\xi)} \approx \varrho(\xi)/\rho_0 = \left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right)^{-\beta(\xi)}, \quad (39)$$

$$\beta(\xi) = \frac{1 + \xi^2/4}{3 + \xi^2/4}. \quad (40)$$

Если представить, что спиральные галактики погружены в изотермическое гало, то при данном профиле плотности получается кривая вращения (см. [19]) с постоянной скоростью орбитального движения  $v$  на больших расстояниях от центра. Здесь  $v$  - безразмерная величина, равная  $V/V_0$ ,  $V$  - орбитальная скорость,  $V_0$  - некоторая постоянная скорость, определяемая ниже. На малых расстояниях скорости растут линейно ( $v \sim \xi$ ), что полностью соответствует наблюдаемой в этих галактиках картине. Полученная с помощью (39) теоретическая кривая вращения сохраняет линейность на большем расстоянии от центра галактики, чем аналогичная кривая, выводимая из псевдоизотермического закона [27,28]:

$$\rho(r)/\varrho_0 = \frac{1}{1 + (r/R_c)^2}, \quad (41)$$

(где  $\varrho_0$  - центральная плотность,  $r$  - расстояние от центра системы, а  $R_c$  - радиус ее ядра), используемого при описании распределения холодной темной материи в гало галактик в качестве альтернативы модели Наварро-Фрэнка-

Уайта [29,30]:

$$\rho(r)/\rho_0 = \frac{1}{(r/R_s)(1+r/R_s)^2}, \quad (42)$$

имеющей особенность в центре. Здесь  $\rho_0$  и масштабный радиус  $R_s$  - параметры, зависящие от гало. В псевдоизотермической модели асимптотическая скорость  $V_\infty$  на кривой вращения стремится к значению  $V_0 = \sqrt{4\pi G \rho_c} R_c$ . В нашей модели  $V_\infty = \sqrt{2} V_0$ , а максимум кривой вращения  $V_m \approx 1.55 V_0$ . Сравнение (39) и (41) представлено на рис.4а. На рис.4б показаны кривые вращения нашей модели и псевдоизотермической модели, где в качестве безразмерного расстояния используется величина  $r/R_c$ .

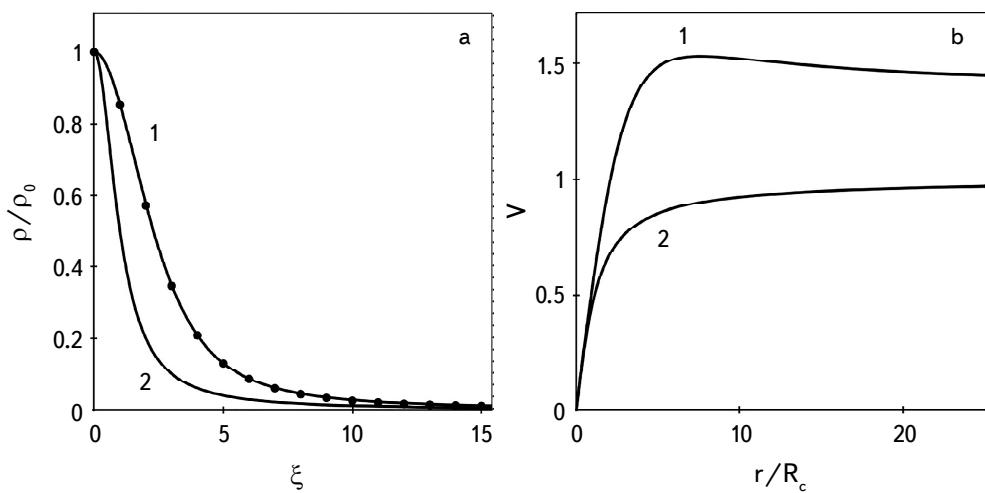


Рис.4. а) Сравнение нашего профиля плотности изотермической сферы (1) с псевдоизотермическим профилем (2). б) Кривая вращения (1) соответствует нашему приближению изотермического профиля плотности, (2) - псевдоизотермическому закону.

Вопрос о том, могут ли предложенные нами приближение профиля плотности изотермической сферы и теоретическая кривая вращения стать альтернативами уже существующим моделям с точки зрения понимания особенностей спиральных галактик, требует отдельного анализа с применением наблюдательного материала.

**3. Выводы и обсуждение.** В настоящей работе приведены приближения функций Эмдена и профиля безразмерной плотности для разных политропных моделей с показателями политропы  $n = 0.5, 3, 4, 6, \infty$ . Эти приближения отличаются достаточно высокой точностью (от  $10^{-4}$  до  $10^{-2}$ ) и представлены в замкнутом виде, состоящем из элементарных функций. Для

нахождения и обоснования некоторых из них использовалось нелинейное интегральное уравнение (2). При этом из наложенных ранее на искомые функции Эмдена условий физического характера (четность относительно своей переменной, наличие точки перегиба при  $n > 1$ , конечность массы для определенных  $n$ ), здесь использовалось только условие четности и, косвенно, второе условие. Рассмотренные значения показателя политропы (вместе с теми, что обсуждались в [19]) охватывают достаточно обширный класс астрофизических объектов, для которых полученные приближения могут оказаться, как мы надеемся, практически полезными как с физической, так и вычислительной точек зрения.

Кадровое агентство, Келли Сервисис, Канзас Сити, США  
e-mail: grigori\_saiyan@hotmail.com

## THEORY OF CLASSICAL GAS POLYTROPES IN THE INTEGRAL REPRESENTATION. II. ANALYTIC APPROXIMATIONS TO EMDEN FUNCTIONS AND DENSITY PROFILES IN A CLOSED FORM

G.A.SAIYAN

Analytic approximations in closed forms to exact solutions of the nonlinear integral Volterra type equation of the second kind are presented. This equation is considered as the integral equivalent of the Lane-Emden differential equation with boundary conditions, which describes known polytropic models within the Cauchy problem. By means of a linear approximation to this integral equation and general heuristic considerations of a physical nature, as well as by means of graphical modeling and variation of the parameters of the approximating functions, approximate expressions of the Emden functions and dimensionless density are obtained in a closed form with a mean square accuracy from  $\sim 10^{-4}$  to a few percents for a series of values of the polytropic index  $n$  of practical interest ( $n = 0.5, 3, 4, 6, \infty$ ). The earlier obtained approximation to the spatial density of the isothermal model is compared with the pseudo isothermal law, which describes the distribution of the density of dark matter around spiral galaxies and is used by various authors to study their rotation curves.

**Keywords:** *polytropes: Lane-Emden equation: Volterra type nonlinear integral equation of the second kind: Emden function*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *V.R.Emden*, Gaskugeln, Leipzig, 1907.
2. *S.Chandrasekhar*, An Introduction to the Study of Stellar Structure. University Chicago Press. USA, 2022.
3. *G.P.Horedt*, Polytropes. Applications in Physics and Astrophysics and Related Fields, Kluwer Academic Publishers, 2004.
4. *L.W.Roxburgh, L.M.Stockman*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **303**, 466, 1999.
5. *C.Hunter*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **328**, 839, 2001.
6. *M.J.Nouh*, New Astron., **9**(6), 467, 2004.
7. *V.Marinca, N.Herisanu, B.Marinca*, Optimal auxiliary Functions Method for Nonlinear Dynamical Systems, p.355, 2021.
8. *G.P.Horedt*, Astron. Astrophys., **172**, 359, 1987.
9. *G.Adomian*, Solving Frontier Problems in Physics. The Decomposition Method. Kluwer Academic Publishers, 1993.
10. *S.S.Motsa, S.Shateyi*, Mathematical Problems in Engineering, doi:10.1155/2012/614796, 2012.
11. *J.A.Sanchez Cano*, ISRN Applied Mathematics, Volume 2011. doi:10.5402/2011/709753.
12. *K.Parand, A.Taghavi, M.Shanini*, Acta Physica Polonica B, **40**, 1749, 2009.
13. *K.T.Elgindy, H.M.Refath*, Applied Numerical Mathematics, **128**, Issue C, 98, 2018.
14. *N.Kumar, R.K.Pandey, C.Cattani*, ISRN Astronomy and Astrophysics, 2011. doi: 10.5402/2011/351747.
15. *F.K.Liu*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **281**, 1197, 1996.
16. *M.Beech*, Astrophys. Space. Sci., **132**, 393, 1987.
17. *G.P.Horedt*, Astrophys. Space Sci., **126**, 357, 1986.
18. Г.А.Саян, Астрофизика, **66**, 151, 2023.
19. Г.А.Саян, Сообщения БАО, **68**, 509, 2021.
20. Lecture 7.14.pdf. [https://www.ucolick.org/~woosley/ay112-114/lectures/lecture\\_7.124.pdf](https://www.ucolick.org/~woosley/ay112-114/lectures/lecture_7.124.pdf)
21. *K.Hebeler, J.M.Latimer, C.J.Pethick et al.*, Astrophys. J., **773**, 11, 2013.
22. Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Трансцендентные функции I. Изд. М., Наука, 1973.
23. Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Трансцендентные функции II. Изд. М., Наука, 1974.
24. *V.Dhilon*, Solving the Lane-Emden equation. University of Sheffield. 2012. [http://www.vikdhillon.staff.shef.ac.uk/teaching/phy213/phy213\\_le.htm](http://www.vikdhillon.staff.shef.ac.uk/teaching/phy213/phy213_le.htm).
25. *M.V.Medvedev, G.Rybicki*, Astrophys. J., **555**, 863, 2001.
26. *Z.F.Seidov, R.K.Kuzakhmedov*, Astron. Zh., **55**, 1250, 1978.
27. *W.J.G. de Blok, F.Walter, E.Brinks et al.*, Astron. J., **136**, 2648, 2008.
28. *Se-H.Oh, W.J.G. de Blok, F.Walter et al.*, Astron. J., **136**, 2761, 2008.
29. *J.F.Navarro, C.S.Frenk, C.D.M.White*, Astrophys. J., **462**, 563, 1996.
30. *J.F.Navarro, C.S.Frenk, C.D.M.White*, Astrophys. J., **490**, 493, 1997.