

ՀՏԴ 53.02Ֆիզիկա**Կարեն ԱՐԱՄՅԱՆ**

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի պրոֆեսոր, ֆ.մ.գ.թ.

E-mail: k_aramyan@rambler.ru

Անուշ ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի ասիստենտ

E-mail: anushkamanukyan1996@gmail.com

ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԻ ԿԱՊԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ-ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏ

Հոդվածում դիտարկված է ֆիզիկայում հայտնի պահպանման օրենքների կապը տարածության-ժամանակի համաչափությունների հետ, մասնավորապես՝ տարածության և ժամանակի համասեռության և տարածության իզոտրոպության հետ։ Նյութը կարող է օգտակար լինել դպրոցում, ֆիզիկայի խորացված ուսումնասիրության ժամանակ։

Բանալի բառեր՝ համաչափություն, ինվարիանտություն, Լագրանժի ֆունկցիա, պահպանման օրենքներ, տարածության-ժամանակի համասեռություն, տարածության իզոտրոպություն։

К. Арамян, А. Манукян

СВЯЗЬ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ С СИММЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА- ВРЕМЕНИ

В работе рассмотрена связь известных в физике законов сохранения с симметрией пространства-времени, в частности, с однородностью пространства-времени и изотропностью пространства.

Может быть полезна при углубленном изучении физики в школе.

Ключевые слова: Симметрия, инвариантность, функция Лагранжа, законы сохранения, однородность пространства-времени, изотропия пространства.

K. Aramyan, A. Manukyan

CONNECTION OF CONSERVATION LAWS WITH SPACE-TIME SYMMETRY

The paper considers the connection between the conservation laws known in physics and the symmetry of space-time, in particular, with the homogeneity of space-time and the isotropy of space.

It can be useful for in-depth study of physics at school.

Key words: Symmetry, invariance, Lagrange function, conservation laws, homogeneity of space-time, isotropy of space.

Մենք ապրում ենք բավականին համաչափ աշխարհում: Երբեմն հաճելի է խախտել կատարյալ համաչափությունը, և դա տալիս է որոշակի աշխուժություն, բայց ոչ՝ քաոս: Բավականին համաչափ են կենդանիները, բույսերը, ամբողջովին համաչափ են բյուրեղները, գրեթե իդեալական՝ գնդաձև մոլորակները: Ասվածից հետո այն պնդումը, որ բնության բոլոր օրենքները որոշվում են աշխարհի համաչափությամբ, կարող է թվալ ոչ այնքան ֆանտաստիկ:

Բնության մեջ, ինչպես մարդկանց մոտ, գոյություն ունի երկու տեսակի օրենք: Նրանցից մեկը նման է հրահանգների: Այն ասում է, թե ինչ պիտի տեղի ունենա որոշ պայմանների դեպքում: Երկրորդ տեսակի օրենքը՝ այսպես կոչված պահպանման օրենքները, հիշեցնում են քրեական օրենսգիրքը: Նրանք նկարագրում են այն, ինչ պիտի տեղի ունենա. մնացածը՝ ըստ մեր հայեցողության: Օրինակ, նյութի և էներգիայի պահպանման օրենքները պնդում են, որ ցանկացած պրոցեսում այդ մեծությունները պետք է պահպանվեն, իսկ թե ինչպես, օրենքի համար կարևոր չէ:

Պահպանման օրենքներն այդքան էլ շատ չեն: Եվ դա բնական է: Ի վերջո, բնությունն ըստ երևույթի օժտված է համաչափության ոչ այնքան նշանակալի քանակով: Սակայն այդ մի քանի օրենքները, որոնք համարժեք են երկրաչափական աքսիոմներին, հանդիսանում են այն հիմքը, որի վրա հենվում են մյուս բոլոր օրենքները, ինչպես թեորեմներ: Պահպանման օրենքները արտահայտում են ժամանակակից գիտության հիմնական դրույթները:

Բնության օրենքների շարքում գերակշռող դեր են կատարում պահպանման օրենքները: Կարևոր օրենքներ են հանդիսանում նյութի և էներգիայի, շարժման քանակի (իմպուլսի) և շարժման քանակի մոմենտի պահպանման օրենքները: Բացի ընդհանուր պահպանման օրենքներից, գոյություն ունեն պահպանման օրենքներ, որոնք ճիշտ են երևույթների և համակարգերի սահմանափակ դասի համար:

Թեև ինվարիանտության դասական սկզբունքները ձևավորվում են անմիջապես դիտարկումների տերմիններով, դրանք քիչ են օգտագործում ապագան կռահելու համար: Առավել հաճախ դրանք ծառայում են որևէ տեսության կամ բնության օրենքների ստուգման համար: Այդպիսի ստուգումների դեպքում անհրաժեշտ է համոզվել, որ ենթադրվող օրենքի կամ նոր տեսության հետևանքները համապատասխանում են այս կամ այն ինվարիանտության սկզբունքին:

Բնության օրենքները դժվար կլինեն որոշել, եթե նրանք չլինեին ինվարիանտ ժամանակի տեղաշարժի և տարածության նկատմամբ: Ոչ պակաս դժվարություններ կառաջանային այն դեպքում, եթե բնության օրենքները օժտված չլինեին պտույտների նկատմամբ: Այնուամենայնիվ պտույտների նկատմամբ ինվարիանտությունը ուղիղ փորձով ստուգելը ծայրահեղ դժվար է. թվում է, թե վերև, ներքև, կող ուղղությունների միջև գոյություն ունի ակնհայտ տարբերություն: Հակառակ դրան՝ Նյուտոնյան գրավիտացիայի տեսությունը և շարժման հավասարումները օժտված են պտույտների նկատմամբ ինվարիանտությամբ [1]:

Մինչ այժմ խոսում էինք դասական համաչափությունների մասին: Ներկայումս ֆիզիկայում հանդիպող ինվարիանտությունները միակը չեն: Նոր ինվարիանտությունները իրենցից ներկայացնում են փոխազդեցությունների առանձին տեսակների ինվարիանտություններ:

Փոխազդեցություններից յուրաքանչյուրը ինվարիանտ է իր խմբի նկատմամբ: Ուժեղ փոխազդեցությունը ինվարիանտ է SU խմբի նկատմամբ. էլեկտրամագնիսականը՝ տրամաչափային ձևափոխությունների խմբի նկատմամբ, թույլ փոխազդեցությունները՝ մի քանի ավելի բարդ խմբերի նկատմամբ: Գրավիտացիոն փոխազդեցությունը համարում ենք ինվարիանտ կոորդինատների ձևափոխությունների ընդհանուր խմբերի նկատմամբ: Յուրաքանչյուր դեպքում համաչափության խումբը հավելյալ հիպոթեզի քիչ քանակության օգնությամբ թույլ է տալիս գտնել համապատասխան փոխազդեցության տեսքը:

Նյուտերի թեորեմը [2]

Թեորեմ. Թող տրված է G_r վերջավոր խմբի անվերջ փոքր ձևափոխություն.

$$\left. \begin{aligned} t^* &= t + \sum_{a=1}^r \varepsilon_a \xi_0^a(t, q, \dot{q}), \\ q_i^*(t^*) &= q_i(t) + \sum_{a=1}^r \varepsilon_a \xi_i^a(t, q, \dot{q}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} : \quad (1)$$

Եթե L ազդանժի L և L_1 ֆունկցիաները բավարարում են

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L_1(t^*, q^*, \dot{q}^*) dt^* \quad (2)$$

պայմանին (1) ձևափոխության նկատմամբ և, բացի այդ, թույլ են տալիս ստանալ շարժման նույն հավասարումները, ապա գոյություն ունեն L ազդանժի տեսքի r անկախ զծային հավասարումների առաջին ինտեգրալներ.

$$L \xi_0^a + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\xi}_i^a + \lambda^a = C^a \quad (a = 1, 2, \dots, r),$$

որտեղ՝

$$\bar{\xi}_i^a = \xi_i^a - \dot{q}_i \xi_0^a:$$

Օրինակ. Ազատության առաջին աստիճանով տատանողական համակարգը շարժվում է դիմադրությամբ միջավայրում: Ենթադրվում է, որ դիմադրության ուժը ուղիղ համեմատական է արագության առաջին աստիճանին՝ $\bar{F} = -\beta \bar{v}$, որտեղ β -ն դիմադրության գործակիցն է: Համակարգի շարժման հավասարումը.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \beta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}: \quad (3)$$

Կինետիկ էներգիան՝ $T = (1/2)m\dot{x}^2$, պոտենցիալ էներգիան՝ $\Pi = (1/2)cx^2$, c -ն՝ առաձգականության գործակիցը:

Այդ դեպքում գոյություն ունի դիմադրության ոչ պոտենցիալային ուժ, սակայն Լագրանժի ֆունկցիան կարելի է արտածել հետևյալ կերպ. (3)-ի երկու կողմերը բազմապատկենք $\mu(t) = e^{\beta t}$ -ով և ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$\mu \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \mu \beta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} (\mu T - \mu \Pi) = 0:$$

Քանի որ

$$\mu \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \mu \beta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mu T - \mu \Pi),$$

ապա նշանակելով $L = \mu(T - \Pi)$, (3) հավասարումից կստանանք շարժման Լագրանժի՝

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

հավասարումը:

Այսպիսով, ոչ պոտենցիալային ուժի ազդեցությունը հաշվի ենք առնում $L = T - \Pi$, Լագրանժի ֆունկցիան փոխարինելով այլ ֆունկցիայով.

$$L = \mu(T - \Pi) = e^{\beta t} \left((1/2)m\dot{x}^2 - (1/2)cx^2 \right):$$

Նշանակելով՝ $2n = \beta$, $k^2 = c/m$, L -ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$L = (1/2)(\dot{x}^2 - k^2 x^2) e^{3nt}:$$

Համակարգի շարժման հավասարումը ունի $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ տեսքը:

Դիտարկենք $t^* = t + \varepsilon$, $x^* = x - \varepsilon n x$ ձևափոխությունը:

Հաշվի առնելով, որ $\Delta t = \varepsilon$, $\Delta x = -\varepsilon n x$, $\Delta \dot{x} = -\varepsilon n \dot{x}$, և տեղադրելով այդ արտահայտությունները

$$\frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (\Delta t) = -\frac{d}{dt} (\Delta \lambda)$$

հավասարման մեջ, կստանանք.

$$-\frac{d}{dt} (\Delta \lambda) = 0, \text{ այսինքն } \Delta \lambda = \text{const}:$$

$$\Delta C = L\Delta t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \Delta \lambda \quad (4)$$

(4) բանաձևից կստանանք.

$$\left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k^2 x^2 + nx\dot{x} \right] e^{2nt} = C$$

առաջին ինտեգրալը:

Այն խաղում է նույն դերը, ինչ և էներգիայի ինտեգրալը կոնսերվատիվ համակարգերի համար:

Էներգիայի պահպանման օրենք

Շարժման ընթացքում մեխանիկական համակարգի q_i և $\dot{q}_i (i = 1, 2, \dots, s) 2s$ ընդհանրացված կոորդինատները և նրանց ժամանակային ածանցյալները ժամանակի ընթացքում փոփոխվում են: Սակայն գոյություն ունեն այդ մեծությունների այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք շարժման ընթացքում պահպանում են հաստատուն արժեքներ՝ կախված սկզբնական պայմաններից: Այդ ֆունկցիաները անվանում են *շարժման ինտեգրալներ*:

Շարժման անկախ ինտեգրալների թիվը s ազատության աստիճանով փակ մեխանիկական համակարգի համար հավասար է $2s - 1$: Դա ակնհայտ է հետևյալ պարզ դատողություններից: Շարժման հավասարումների լուծումը պարունակում է $2s$ կամայական հաստատուններ: [3] Քանի որ փակ համակարգի շարժման հավասարումները բացահայտ ժամանակը չեն պարունակում, ապա ժամանակի հաշվարկման սկզբի ընտրությունը կամայական է, և հավասարման լուծումների կամայական հաստատուններից մեկը միշտ կարող է ընտրվել ժամանակի t_0 ադիտիվ հաստատունի տեսքով: $2s$ ֆունկցիաներից արտաքստելով $t + t_0$ -ն.

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \end{aligned}$$

մենք կարտահայտենք $2s - 1$ կամայական հաստատունները $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$ ֆունկցիաների տեսքով՝ q_i և $\dot{q}_i$ -ից, որոնք էլ կլինեն շարժման ինտեգրալները:

Սակայն մեխանիկայում ոչ բոլոր շարժման ինտեգրալներն են կատարում հավասարապես հիմնարար դեր: Նրանց մեջ կան մի քանիսը, որոնց հաստատուն լինելը ունի բավականին խոր ծագում՝ կապված ժամանակի և տարածության հիմնական բնութագրերի հետ՝ դրանց համասեռության և իզոտրոպության: Այս, ինչպես ասում են, պահպանվող մեծություններն, ունեն ադիտիվության կարևոր հատկություն. համակարգի համար դրանց արժեքը հավասար է կազմող մասնիկներին համապատասխանող արժեքների գումարին:

Հենց ադիտիվության հատկությունն է համապատասխան մեծություններին տալիս կարևոր մեխանիկական դեր: Օրինակ՝ էներգիան, որ երկու

մարմիններ փոխազդում են միմյանց հետ որոշակի ժամանակի ընթացքում: Քանի որ ինչպես փոխազդեցությունից առաջ, այնպես էլ հետո ամբողջ համակարգի աղիտիվ ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը հավասար է այդ երկու մարմինների համար առանձին-առանձին վերցրած արժեքների գումարին, ապա այդ մեծությունների պահպանման օրենքները անմիջապես հնարավորություն են տալիս մի շարք եզրակացություններ կատարել փոխազդեցությունից հետո մարմինների վիճակի մասին, եթե հայտնի են նրանց վիճակները փոխազդեցությունից առաջ:

Սկսենք այն պահպանման օրենքից, որն առաջանում է *ժամանակի համասեռության* հետ կապված:

Այդ համասեռության պատճառով փակ համակարգի *Լ* ագրանժի ֆունկցիան բացահայտ կախված չէ ժամանակից: Հետևաբար, *Լ* ագրանժի ֆունկցիայի լրիվ ածանցյալը ըստ ժամանակի կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \varepsilon \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(եթե *L*-ը կախված լիներ ժամանակից, հավասարման աջ մասում կավելացնեինք $\frac{dL}{dt}$ անդամը): *Լ* ագրանժի ֆունկցիայում $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ ածանցյալները փոխարինելով *Լ* ագրանժի հավասարման համաձայն՝ $\frac{dL}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ -ով, կստանանք.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right),$$

կամ

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0:$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \text{const} \quad (5)$$

մեծությունը փակ համակարգի շարժման ընթացքում կմնա անփոփոխ, այսինքն՝ հանդիսանում է նրա շարժման ինտեգրալներից մեկը: Այդ մեծությունը անվանում են *համակարգի էներգիա*: *Էներգիայի* աղիտիվությունը ակնհայտորեն հետևում է *Լ* ագրանժի ֆունկցիայի աղիտիվությունից:

Էներգիայի պահպանման օրենքը ճիշտ է ոչ միայն փակ համակարգերի համար, այլ նաև այնպիսի համակարգերի, որոնք գտնվում են հաստատուն (այսինքն ժամանակից անկախ) արտաքին դաշտում. բերված արտածման մեջ *Լ* ագրանժի ֆունկցիայի միակ օգտագործված հատկությունը ժամանակից ակնհայտ կախվածության բացակայությունն է, որը տեղի ունի նաև այս

դեպքում: Մեխանիկական համակարգերը, որոնց էներգիաները պահպանվում են, երբեմն անվանում են *կոնսերվատիվ*:

Փակ (կամ հաստատուն դաշտում գտնվող) համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը [3].

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

որտեղ՝ T -ն արագությունների քառակուսային ֆունկցիա է (կինետիկ էներգիան): Նրա նկատմամբ կիրառելով համասեռ ֆունկցիաների համար Էյլերի հայտնի թեորեմը՝ կստանանք.

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T:$$

Այս արժեքը տեղադրելով հետևյալ առնչության մեջ՝

$$\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \text{const},$$

կգտնենք.

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q), \quad (6)$$

դեկարտյան կոորդինատներում՝

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(r_1, r_2, \dots): \quad (7)$$

Այսպիսով, համակարգի էներգիան կարող է ներկայացվել երկու տարբեր անդամների գումարի տեսքով. կինետիկ էներգիայի՝ կախված արագությունից, և պոտենցիալ էներգիայի՝ կախված միայն մասնիկի կոորդինատից:

Իմպուլսի պահպանման օրենքը

Մյուս պահպանման օրենքը առաջանում է *տարածության համասեռության* հետ կապված:

Այդ համասեռության պատճառով փակ համակարգի մեխանիկական հատկությունները որպես ամբողջություն տարածությունում չեն փոխվում համակարգի ցանկացած զուգահեռ տեղափոխության դեպքում: Դրանով պայմանավորված դիտարկենք ε անվերջ փոքր տեղափոխություն և պահանջենք, որ Լագրանժի ֆունկցիան մնա անփոփոխ:

Զուգահեռ տեղափոխությունը նշանակում է այնպիսի ձևափոխություն, որի դեպքում համակարգի բոլոր կետերը տեղափոխվում են նույն հաստիքի չափով, այսինքն՝ նրանց շառավիղ-վեկտորը $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \varepsilon$: L ֆունկցիայի փոփոխությունը կոորդինատների անվերջ փոքր փոփոխության արդյունքում կլինի՝

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

որտեղ գումարումը տեղի է ունենում համակարգի բոլոր նյութական կետերով: ε -ի կամայական լինելու հետևանքով $\delta L = 0$ պահանջը համարժեք է հետևյալին.

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0: \quad (8)$$

Լագրանժի հավասարումները հաշվի առնելով՝ այստեղից կստանանք.

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0:$$

Այսպիսով, մենք հանգում ենք այն եզրակացության, որ փակ մեխանիկական համակարգերում

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (9)$$

վեկտորական մեծությունը շարժման ընթացքում մնում է անփոփոխ: $\mathbf{P}$ վեկտորը անվանում են համակարգի իմպուլս[3]: Դիֆերենցելով Լագրանժի ֆունկցիան [1]՝ կգտնենք, որ իմպուլսը հետևյալ կերպ է արտահայտվում կետերի արագությունների միջոցով.

$$\mathbf{p} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a: \quad (10)$$

Իմպուլսի ադիտիվությունն ակնհայտ է: Ավելին, ի տարբերություն էներգիայի, համակարգի իմպուլսը հավասար է առանձին մասնիկների իմպուլսների գումարին.

$$\mathbf{P}_a = m_a \mathbf{v}_a,$$

անկախ նրանց միջև փոխազդեցության անտեսման հնարավորությունից:

Իմպուլսի վեկտորի բոլոր երեք բաղադրիչների պահպանման օրենքը տեղի ունի միայն արտաքին դաշտի բացակայության դեպքում: Մակայն իմպուլսի առանձին բաղադրիչները կարող են պահպանվել նաև դաշտի առկայության դեպքում, եթե պոտենցիալ էներգիան կախված չէ որևէ դեկարտյան կոորդինատից:

(8) հավասարումը ունի պարզ ֆիզիկական իմաստ: $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ ածանցյալը հանդիսանում է $\mathbf{F}_a$ ուժը, որը ազդում է a -րդ մասնիկի վրա: Այսպիսով, (8) հավասարումը նշանակում է, որ այն ուժերի գումարը, որոնք ազդում են փակ համակարգի մասնիկների վրա, հավասար է զրոյի.

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0: \quad (11)$$

Մասնակի դեպքում, երկու նյութական կետերից կազմված համակարգի համար $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$: Առաջին մասնիկի վրա երկրորդի կողմից ազդող ուժը հավասար է մեծությամբ, բայց հակառակ ուղղված առաջինի կողմից երկրորդ մարմնի վրա ազդող ուժին: Այս պնդումը հայտնի է որպես ազդեցության և հակազդեցության ուժերի հավասարության օրենք (Նյուտոնի III օրենք):

Եթե շարժումը նկարագրվում է q_i ընդհանրացված կոորդինատներով, ապա Լագրանժի ֆունկցիայի ածանցյալները՝ արտահայտված ընդհանրացված արագություններով՝

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (12)$$

անվանում են *ընդհանրացված իմպուլսներ*, իսկ

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (13)$$

ածանցյալներն անվանում են *ընդհանրացված ուժեր*: Այդ նշանակումներում Լագրանժի հավասարումն ունի հետևյալ տեսք.

$$\dot{p}_i = F_i: \quad (14)$$

Դեկարտյան կոորդինատներում ընդհանրացված իմպուլսները համընկնում են $\mathbf{p}_a$ վեկտորի բաղադրիչների հետ: Ընդհանուր դեպքում p_i մեծությունները հանդիսանում են $\dot{q}_i$ ընդհանրացված արագությունների գծային համասեռ ֆունկցիաներ, որոնք ընդհանրապես չեն բերվում զանգվածի և արագության արտադրյալներին:

2.4 Իմպուլսի մոմենտ

Անցնենք այն պահպանման օրենքի դիտարկմանը, որի ծագումը կապված է տարածության իզոտրոպության հետ:

Այդ իզոտրոպությունը նշանակում է, որ փակ համակարգի մեխանիկական հատկությունները չեն փոփոխվում համակարգի՝ որպես ամբողջության տարածության մեջ ցանկացած պտույտի դեպքում: Դրա հետ կապված՝ դիտարկենք համակարգի անվերջ փոքր պտույտը և պահանջենք, որ դրա հետ նրա Լագրանժի ֆունկցիան չփոխվի:

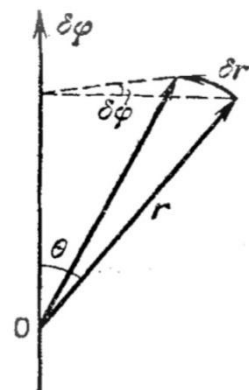
Դիտարկենք անվերջ փոքր պտույտի $\delta\varphi$ վեկտորը, որի բացարձակ մեծությունը հավասար է $\delta\varphi$ պտտման անկյանը, իսկ ուղղությունը համընկնում է պտտման առանցքի հետ (այն էլ այնպես, որ պտտման ուղղությունը ենթարկվում է պտուտակի օրենքին):

Սկզբից գտնենք, թե ինչի է հավասար շառավիղ-վեկտորի աճը այդ պտույտի դեպքում: Շառավիղ-վեկտորի վերջի տեղափոխությունը անկյան հետ կապված է հետևյալ առնչությամբ.

$$|\delta \mathbf{r}| = r \sin \theta \cdot \delta \varphi \quad (15)$$

(նկ. 1): $\delta \mathbf{r}$ վեկտորի ուղղությունը ուղղահայաց է այն հարթությանը, որն անցնում է $\mathbf{r}$ և $\delta \varphi$ վեկտորներով: Այստեղից պարզ է, որ

$$\delta \mathbf{r} = [\delta \varphi \cdot \mathbf{v}]: \quad (16)$$



Նկ.1

Տեղադրելով այդ արտահայտությունները պտտման ընթացքում Լագրանժի ֆունկցիայի անփոփոխ լինելու պայմանի մեջ՝

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0$$

ածանցյալները փոխարինելով $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$, $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \dot{\mathbf{p}}_a$, կստանանք.

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v}_a]) = 0:$$

Կատարելով արտադրիչների ցիկլային տեղափոխություն և $\delta \boldsymbol{\varphi}$ -ին դուրս հանելով գումարի նշանի տակից՝ կստանանք.

$$\delta \boldsymbol{\varphi} \sum_a ([\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a \mathbf{p}_a]) = \delta \boldsymbol{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0:$$

Հաշվի առնելով $\delta \boldsymbol{\varphi}$ -ի կամայական լինելը՝ այստեղից կստանանք.

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0:$$

Հանգում ենք այն եզրակացությանը, որ փակ համակարգի շարժման ժամանակ պահպանվում է

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] \quad (17)$$

վեկտորական մեծությունը, որը անվանում են համակարգի *իմպուլսի մոմենտ* (կամ պարզապես *մոմենտ*): Այդ մեծության ադիտիվությունն ակնհայտ է, ավելին՝ ինչպես իմպուլսը, այն կախված չէ մասնիկների միջև փոխազդեության առկայությունից կամ բացակայությունից:

Դրանով սպառվում են շարժման ադիտիվ ինտեգրալները: Այսպիսով, ցանկացած փակ համակարգ ունի ընդամենը յոթ այդպիսի ինտեգրալ՝ էներգիայի և իմպուլսի, ինչպես նաև իմպուլսի մոմենտի վեկտորների երեքական բաղադրիչները:

Քանի որ մոմենտի սահմանման մեջ մտնում են մասնիկի շառավիղ-վեկտորները, ապա նրա արժեքը ընդհանրապես կախված է կոորդինատների սկզբնակետի ընտրությունից: Նույն կետի՝ $\mathbf{a}$ հեռավորության վրա գտնվող սկզբնակետերի նկատմամբ տարած $\mathbf{r}_a$ և $\mathbf{r}'_a$ շառավիղ-վեկտորները կապված են $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ հավասարությամբ: Այդ պատճառով ունենք.

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a \mathbf{p}_a] + \mathbf{a} \sum_a \mathbf{p}_a$$

կամ

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{a} \mathbf{P}]: \quad (18)$$

Այս բանաձևից երևում է, որ միայն այն դեպքում, երբ համակարգը որպես ամբողջություն գտնվում է դադարի վիճակում (այսինքն $\mathbf{P} = 0$), նրա մոմենտը կախված չէ կոորդինատների սկզբնակետի ընտրությունից:

Չնայած, որ մոմենտի բոլոր երեք բաղադրիչների պահպանման օրենքները տեղի ունեն միայն փակ համակարգի համար, ավելի սահմանափակ տեսքով այդ օրենքը կարող է տեղի ունենալ նաև արտաքին դաշտում գտնվող համակարգերի համար: Վերևում նկարագրվածից պարզ է, որ միշտ պահպանվում է մոմենտի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որի նկատմամբ այդ դաշտը համաչափ է, և, հետևաբար, համակարգի մեխանիկական հատկությունները չեն փոխվում այդ առանցքի շուրջը ցանկացած պտույտ կատարելիս, դրա հետ մեկտեղ մոմենտը պետք է որոշված լինի ինչ-որ կետի (կոորդինատների սկզբնակետ) նկատմամբ, որը գտնվում է այդ առանցքի վրա:

Այդ տեսակի առավել կարևոր դեպք է հանդիսանում կենտրոնական համաչափությամբ օժտված դաշտը, այսինքն՝ դաշտ, որում պոտենցիալ էներգիան կախված է տարածությունում եղած որոշ կետից (կենտրոնից) եղած հեռավորությունից: Ակնհայտ է, որ այդպիսի դաշտում շարժման ընթացքում պահպանվում է մոմենտի պրոյեկցիան կենտրոնով անցնող ցանկացած առանցքի վրա: Այլ կերպ ասած, պահպանվում է $\mathbf{M}$ մոմենտի վեկտորը ոչ թե տարածության կամայական կետի նկատմամբ, այլ դաշտի կենտրոնի նկատմամբ:

Այլ օրինակ է հանդիսանում z առանցքի երկայնքով համասեռ դաշտը, որում պահպանվում է մոմենտի M_z պրոյեկցիան, ավելին՝ կոորդինատների սկզբնակետը կարող է ընտրվել կամայական կերպ:

Նշենք, որ մոմենտի պրոյեկցիան ինչ-որ առանցքի վրա (անվանենք այն z) կարող է որոշվել ածանցելով Լագրանժի ֆունկցիան.

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \quad (19)$$

որտեղ φ կոորդինատը հանդիսանում է z առանցքի շուրջ պտտման անկյունը: Դա արդեն ակնհայտ է վերևում ներկայացրած մոմենտի պահպանման օրենքի բնույթից, բայց դրանում կարելի է համոզվել նաև ուղիղ հաշվարկներով: r, φ, z գլանաձև կոորդինատներում ունենք (տեղադրելով $x_a = r_a \cos \varphi_a, y_a = r_a \sin \varphi_a$)

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a: \quad (20)$$

Այդու կողմից՝ Լագրանժի ֆունկցիաները այդ փոփոխություններում ունի հետևյալ տեսքը.

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{\mathbf{r}}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U:$$

Այն տեղադրելով (19)-ում կստանանք նույն (20) արտահայտությունը [3]:

Գրականություն

1. **Вигнер Ю.**, Этюды о симметрии./Пер. с англ., М., «Мир»,
 2. https://scask.ru/p_book_oam.php?id=64
 3. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.**, Теоретическая физика, Т1 Механика, М., «Наука», 1965.-204с.
-

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրՊՀ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնը: