

ՀՏԴ 517.91, 573

Մաթեմատիկա, կենսաբանություն

Նարինե ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի ասիստենտ, ֆ.մ.գ.թ.

E-mail: narine_sargsyan_2012@mail.ru

Մայա ԾԱՏՐՅԱՆ

ԱրՊՀ կենսաբանության և քիմիայի ամբիոնի դոցենտ, գ.գ.թ.

E – mail: maya_c@mail.ru

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԲՈՒՍԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Հոդվածում ուսումնասիրվում են դիֆերենցիալ հավասարումների օգնությամբ լուծվող կենդանի օրգանիզմներին վերաբերող խնդիրներ: Դիտարկվող բակտերիաների աճի, բազմացման, վիրուսների համաճարակի, բույսերի տերևային մակերեսի աճի խնդիրների համար ստացված արդյունքները համապատասխանել են կենսաբանական հայտնի տվյալներին, որը հաստատում է դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառման արդյունավետությունը:

Բանալի բառեր՝ անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում, ինտեգրալ, բակտերիա, աճ, բազմացում, տերևային մակերես, համաճարակ:

Н. Саркисян, М.Цатурян

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ БАКТЕРИОЛОГИИ И БОТАНИКИ

В работе рассматриваются задачи, касаемых живых организмов и решаемых с помощью дифференциальных уравнений. Полученные результаты задач роста рассматриваемых бактерий, размножения, эпидемии вирусов, проблемы роста лиственной поверхности растений, соответствуют известным биологическим данным, которые подтверждают результативность использования дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, интеграл, бактерия, рост, размножение, лиственная поверхность, эпидемия.

N. S. Sargsyan, M.S. Tsaturyan

APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOME PROBLEMS OF BACTERIOLOGY AND IN BOTANY

The work is dedicated to the problems of living organisms solved by differential equations. The results obtained from the observed problems of bacterial growth, multiplication, virus epidemic, plant leaf surface growth corresponded to the biological data, which confirms the effectiveness of the application of differential equations.

Key words: differential equation, detachable variable, integral, bacteria, growth, multiplication, leaf surface, epidemic

Ներածություն: Արդի շրջանում կենսաբանությունը իրենից ներկայացնում է կյանքի, կենդանի օրգանիզմներում ընթացող երևույթների ուսումնասիրություն:

Մաթեմատիկան իր յուրահատուկ միջոցներով օգնում է շատ կենսաբանական խնդիրների լուծման հարցում:

Հոդվածում դիտարկվող խնդիրները լուծվում են դիֆերենցիալ հավասարումների օգնությամբ: Տալով մեթոդական կարևորություն և՛ մաթեմատիկական, և՛ կենսաբանական կողմին՝ վեր է հանվում մաթեմատիկայի և կենսաբանության կապը, զուգահեռներ են անց կացվում կենսաբանական և մաթեմատիկական լուծումների միջև:

Կենսաբանություն մասնագիտությամբ սովորողների մոտ *դիֆերենցիալ հաշիվ* բաժնի տեսական մասի ուսումնասիրումը կհամադրվի մասնագիտական հետաքրքիր խնդիրների լուծմամբ, որը ցույց կտա դիֆերենցիալ հավասարումների կարևորությունը:

Կենդանի օրգանիզմներին վերաբերող մի շարք խնդիրների լուծումներում փնտրվող, այս կամ այն էվոլյուցիոն երևույթն արտահայտող մեծության կախվածությունը տարբեր պարամետրերից միշտ չէ, որ որոշվում է միարժեքորեն: Բայց կա հնարավորություն որոշելու փնտրվող մեծությունների և նրանց փոփոխության արագության կախվածությունը, այսինքն՝ գտնելու հավասարում, որտեղ անհայտ ֆունկցիան դիֆերենցիալ ֆունկցիան է: Դիֆերենցիալ հավասարումների վրա հիմնված մոդելները կիրառվում են մի շարք այնպիսի պոպուլյացիաների դինամիկայի նկարագրության համար, որոնցում առանձնյակների ծնելիությունը և մահացությունը անընդհատական երևույթներ են:

Բջջիների աճի վերաբերյալ կատարված հիմնարար հետազոտությունների հիման վրա կարելի է եզրակացնել, որ ցանկացած տեսակի պոպուլյացիայի բջջիների համար պոպուլյացիայի աճի

արագությանը ուղիղ համեմատական է պոպուլյացիայի քանակին : Օրինակ՝ միաբջջի օրգանիզմների բազմացումը տեղի է ունենում կիսման եղանակով, այսինքն՝ բջջից որոշակի ժամանակահատվածում կրկնապատկվում է:

Ավելի բարդ կազմավորված օրգանիզմների՝ բույսերի և կենդանիների բազմացումն ընթանում է ավելի բարդ օրենքով: Սակայն պարզագույն օրգանիզմների համար կարելի է ենթադրել, որ տեսակի բազմացման արագությունը ուղիղ համեմատական է տվյալ տեսակի առանձնյակների քանակին: Մաթեմատիկորեն այն կարելի է գրի առնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման միջոցով՝

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad (1)$$

որտեղ x -ը ժամանակից՝ իսկ r -ը, ընդհանուր առմամբ, կարող է լինել ֆունկցիա՝ կախված ինչպես t -ից, կախված ֆունկցիա է և բնութագրում է պոպուլյացիայի առանձնյակների քանակը, այնպես էլ ժամանակից կամ կախված լինել այլ արտաքին և ներքին գործոններից:

(1) օրենքը ձևակերպվել է Թ. Մալտուսի կողմից: Համաձայն (1)-ի, եթե համեմատականության գործակիցը՝ $r = const$, ապա պոպուլյացիայի առանձնյակների քանակը անսահմանափակ կաճի էքսպոնենցիալ օրենքով .

$$x = x_0 e^{rt} \quad x_0 = x \text{ } t$$

Շատ պոպուլյացիաներում գոյություն ունեն սահմանափակ գործոններ, որոնց պատճառով պոպուլյացիայի աճն ընդհատվում է:

Մալտուսի հետազոտությունները մեծ դեր են ունեցել կենսաբանության բնագավառում:

Այսպիսով, էքսպոնենցիալ օրենքը ճշմարիտ է միկրոօրգանիզմների պոպուլյացիաների աճի, բազմացման ու համաճարակի տարածման համար:

1.Բակտերիաների բազմացումը: Բակտերիաներն ունեն կենդանի օրգանիզմներին բնորոշ հատկություններ. աճում են, զարգանում են, նյութափոխանակություն են կատարում, բազմանում են և այլն: Ներկայումս բնութագրված է մոտ տասը հազար տեսակի բակտերիա, սակայն իրականում գոյություն ունեն միլիոնից ավելի տարբեր տեսակի բակտերիաներ: Ըստ տարբեր հաշվարկների՝ աշխարհում կա հինգ նոնիլլիոն (5×10^{30}) բակտերիա: Բակտերիաները կյանքի նախնական ձևերն են: Դրանք շատ փոքր են և տեսանելի են միայն մանրադիտակով:

Մի կաթիլ ջրում հանգիստ կարող են ապրել 40 միլիոն բակտերիաներ: 1 գրամ հողում կարող է լինել 300 հազարից մինչև 90 միլիոն բակտերիա:

Սովորաբար բակտերիաների երկարությունը չի անցնում մի քանի միկրոմետրից, և բակտերիաները լինում են տարբեր ձևերի: Դրանք տարածված են ամենուր՝ հողում, ջրում, օդում, բույսերի, կենդանիների և մարդկանց օրգանիզմներում: Դրանց կարելի է հանդիպել այնտեղ, որտեղ թվում է, թե կյանքի գոյության համար անհրաժեշտ պայմաններ չկան:

Բակտերիաները լինում են ցուպիկաձև, գնդաձև, ստորակետաձև, պարուրաձև:

Ցուպիկաձև բակտերիաների երկարությունը 1-8 մկմ է, լայնությունը՝ 0,5-2 մկմ, գնդաձևերի միջին տրամագիծը 0,5-1 մկմ է: Դրանք բավական ակտիվ կյանքով են ապրում: Երբ խոնավությունը, սնունդը, ջերմաստիճանը և այլ պայմանները բարենպաստ են, բակտերիաները շատ արագ աճում և բազմանում են /20 րոպեյն մեկ/:

Իրականում սննդարար միջավայրում բջիջների կիսման մեծ արագությունը դիտվում է շատ կարճ ժամանակ, որովհետև միջավայրի սննդարար նյութերն արագ սպառվում են, և կուտակվում են բակտերիաների վրա վնասակար ազդող փոխանակության արգասիքները:

Ախտածին բակտերիաների բազմացման արագությունն օրգանիզմում զգալիորեն փոքր է /40-45րոպե/, քան արհեստական սննդամիջավայրում [5]:

2. Համաճարակների տեսության վերաբերյալ խնդիրների լուծումը դիֆերենցիալ հավասարման կիրառմամբ: Դիտարկենք դիֆերենցիալ հավասարումների կազմումը և լուծումը համաճարակների տեսությունում այն պայմանով, որ ուսումնասիրվող համաճարակի տեսակն ունի երկարաժամկետ բնույթ [2]: Դիցուք վարակի փոխանցման գործընթացը շատ ավելի արագ է ընթանում, քան բուն հիվանդության ընթացքը: Եթե վարակված անձինք չեն մեկուսանում, ապա վարակը փոխանցում են առողջներին:

Ընդունենք, որ սկզբնական t պահին վարակված առանձնյակների թիվը a է, չվարակվածներինը՝ b : t ժամանակահատվածում վարակվածների թիվը նշանակենք $x(t)$, իսկ չվարակվածներինը՝ $y(t)$:

Դիտարկվող համաճարակի համար տեղի ունի

$$x + y = a + b \quad (2)$$

հավասարությունը, եթե համաճարակի կյանքի կարճ տևողությունը ժամանակի t պահին պատկանում է $[0, T]$ հատվածին:

Այսպիսի պայմաններում անհրաժեշտ է գտնել չվարակված առանձնյակների թվի փոփոխության օրենքը, որը ժամանակից կախված ֆունկցիա է՝ $y = f(t)$:

Քանի որ վարակը փոխանցվում է շփման միջոցով, ապա չվարակված առանձնյակների թիվը ժամանակի ընթացքում կնվազի և ուղիղ համեմատական կլինի վարակվածների և չվարակվածների հանդիպումների քանակին:

dt ժամանակահատվածի համար տեղի ունի

$$dy = -\beta xy dt$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղից կունենանք.

$$\frac{dy}{dt} = -\beta xy \quad (3)$$

որտեղ β -ն համեմատականության գործակիցն է: (2)-ից գտնելով x -ը և տեղադրելով (3)-ում՝ կստանանք անջատվող փոփոխականով դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y(a + b - y) \quad (4)$$

(4)-ը ինտեգրելով՝ կստանանք.

$$\frac{y}{a+b-y} = C e^{-\beta(a+b)t} \quad (5)$$

Օգտվելով $t = 0$ ժամանակահատվածից՝ $y = b$ սկզբնական պայմանից՝ (5)-ից կորոշենք C հաստատունը.

$$C = \frac{b}{a}$$

(5)-ում տեղադրելով C -ի արժեքը՝ կստանանք.

$$y = \frac{b(a+b)}{b + a e^{\beta(a+b)t}} \quad (6)$$

(6) բանաձևով արտահայտվում է չվարակված առանձնյակների թվի նվազման կախվածությունը ժամանակից:

Դիտարկենք կոնկրետ խնդիր:

Խնդիր 1: Համայնքում, որն ունի 100 բնակիչ, հայտնաբերվել է կորոնավիրուսի 1 դեպք: Որոշել չվարակված առանձնյակների թվի նվազման կախվածությունը $[0, 15]$ ժամանակահատվածում:

Լուծում: Նախ դիտարկենք ժամանակահատվածի առաջին 5 օրը:

Կորոնավիրուսի համաճարակի տարածման β գործակիցը 100 առանձնյակից կազմված պոպուլյացիայի համար մոտավորապես հավասար է $3 \cdot 10^{-3}$ վ⁻¹:

Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք (6) բանաձևից: Հաշվի առնելով, որ a , b , կստանանք.

$$y(t) = \frac{y_0}{\beta \cdot 100 \cdot 5} \approx$$

Կատարելով նմանատիպ հաշվարկներ ժամանակահատվածի 2-րդ և 3-րդ հնգօրյակների համար՝ համապատասխանաբար, կստանանք

$$y(t) = \frac{y_0}{\beta \cdot 100 \cdot 10} \approx$$

և

$$y(t) = \frac{y_0}{\beta \cdot 100 \cdot 15} \approx$$

96, 84 և 52 թվերը ցույց են տալիս 5, 10 և 15 օրեր անց գրանցված չվարակավածների քանակը:

Այսպիսով, կորոնավիրուսային համաճարակի դեպքում պոպուլյացիայի չվարակված առանձնյակների թվի փոփոխությունը $[0, 15]$ ժամանակահատվածում կարելի է ստանալ՝ կիրառելով անջատվող փոփոխականով դիֆերենցիալ հավասարում:

Պարզվում է, որ պոպուլյացիայի առանձնյակների թիվը 10 անգամ մեծանալու դեպքում β համեմատականության գործակիցը նվազում է 10 անգամ, այսինքն՝ առանձնյակների $a + b = m \cdot n$, $m, n \in \mathbb{N}$ թվի դեպքում β գործակիցը ընդունում է $\beta \cdot n^{-1}$ արժեքը:

3. Բակտերիաների բազմացման փոփոխությունը կախված ժամանակից: Ժամանակի ցանկացած պահի բակտերիաների բազմացման արագությունը ուղիղ համեմատական է բակտերիաների քանակին [1]: Եթե ժամանակի t պահին բակտերիաների քանակը նշանակենք $x(t)$ -ով, ապա

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

որտեղ k -ն համեմատականության գործակիցն է, որը կախված է ինչպես բակտերիայի տեսակից, այնպես էլ նրա բազմացման պայմաններից [3]:

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կունենանք.

$$x(t) = C e^{kt}: \quad (7)$$

(7)-ն արտահայտում է բակտերիաների քանակի կախվածությունը ժամանակից: Ենթադրենք, որ $t=0$ պահին $x = x_0$ Այս դեպքում $C = x_0$: Հետևաբար (7)-ից կստանանք.

$$x(t) = x_0 e^{kt}: \quad (8)$$

Բարենպաստ պայմաններում բակտերիաների քանակի աճը կատարվում է ժամանակից կախված էքսպոնենցիալ օրենքով:

Այսպիսով, էկոլոգիական պայթյունը ենթարկվում է բազմացման էքսպոնենցիալ օրենքին այն դեպքում, երբ կենսաբանական այս կամ այն տեսակը բարենպաստ պայմաններում, կարճ ժամանակում հասնում է մեծ քանակության:

Խնդիր 2 2 : Դիցուք փակ սենյակի 1մ³-ում կա 50 բակտերիա: Քանի՞ ժամ անց օդը կլինի աղտոտված բակտերիաների քանակը նորմայից շատ: Ընդունենք, որ օդն ըստ նորմի համարվում է մաքուր, եթե պարունակում է մինչև 2000 բակտերիա:

Լուծում: Ըստ խնդրի տվյալների՝ $x = x_0$ Հետևաբար, (8)

$$e^{kt} \Rightarrow kt = \ln :$$

Հաշվի առնելով, որ ախտածին բակտերիաների համար համեմատականության k գործակիցը հավասար է 1-ի, կունենանք.

$$t = \ln \Rightarrow t :$$

Ստացանք, որ 3,7 ժամ հետո սենյակի օդը կլինի աղտոտված:

Նման ձևով կարելի է որոշել որոշակի ժամանակամիջոցում կոնկրետ քանակությամբ բակտերիաների քանակի փոփոխությունը:

4. Բակտերիաների աճի փոփոխության կախվածությունը ժամանակից

Ցուպիկաձև բակտերիաների համար, որոնց բջիջների մակերեսի հարաբերությունը իր ծավալին մնում է անփոփոխ, l երկարությամբ բջջի աճման արագությունը՝ $\frac{dl}{dt}$ ուղիղ համեմատական է բջջի երկարությանը ժամանակի տվյալ պահին: Այսինքն՝

$$\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l, \quad (9)$$

որտեղ α -ն և β -ն բակտերիայի բջջի, համապատասխանաբար, սինթեզի և քայքայման հաստատուն բնութագրիչներն են: Ինտեգրելով (9) անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումը՝ կստանանք.

$$l = C e^{(\alpha - \beta)t}:$$

Ստացված ֆունկցիան բնութագրում է ցուպիկաձև բակտերիայի աճի կախվածությունը ժամանակից:

Դիտարկվող խնդրի այն լուծումը, որը բավարարում է $t = 0$ $l = l_0$ սկզբնական պայմանին, տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$l = l_0 e^{(\alpha - \beta)t}$$

Այսինքն՝ ցուպիկաձև բակտերիաների աճը ենթարկվում է էքսպոնենցիալ օրենքին:

Խնդիր 3. Քանի՞ թույլ անց ցուպիկաձև բակտերիայի երկարությունը բարենպաստ պայմաններում կհասնի մաքսիմալ երկարության:

Լուծում: Համաձայն մանրէաբանական տվյալների՝ ցուպիկաձև բակտերիայի երկարությունը 1-8 մկմ է, իսկ $\alpha - \beta$ p^{-1} : Հետևաբար, օգտվելով ցուպիկաձև բակտերիաների աճը բնութագրող ֆունկցիայից, կունենանք.

$$\cdot e^{0.1t} \Rightarrow t \approx p$$

Ստացված արդյունքը համընկնում է նախապես ունեցած կենսաբանական տվյալների հետ [3]:

Խնդիր 4 : Փիփերթի, շրջանաձև տեսք ունեցող, երիտասարդ տերևի տերևային մակերեսի աճման արագությունը ուղիղ համեմատական է ն՝ տերևի շառավղին, և՝ նրա վրա ընկնող արևի լույսի քանակին: Արևի լույսի քանակը ուղիղ համեմատական է ինչպես տերևային մակերեսին, այնպես էլ ճառագայթների անկման և տերևի ուղղահայացի կազմած անկյան կոսինուսին:

Որոշել տերևի s մակերեսի և t ժամանակի միջև եղած կախվածությունը, եթե առավոտյան ժամը 6-ին տերևային մակերեսը 25 սմ² է, իսկ նույն օրվա երեկոյան ժամը 6-ին՝ 36 սմ²: Ընդունել, որ ընկնող ճառագայթի և ուղղահայացի կազմած անկյունը ժամը 6-ին և 18-ին հավասար է 90°, իսկ կեսօրին՝ 0°:

Լուծում: Դիցուք $s = s(t)$ տերևի մակերեսն է ժամանակի t պահին: Եթե որպես ժամանակի սկզբնական պահ ընդունենք առավոտյան ժամը 6-ը, ապա s սմ², իսկ s սմ²: Տերևի աճի արագությունը որոշվում է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումից [1].

$$\frac{ds}{dt} = krQ \quad (10)$$

որտեղ k -ն համեմատականության գործակիցն է, r -ը՝ տերևի շառավիղը, իսկ Q -ն՝ տերևի վրա ընկնող լույսի քանակը:

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ արևի լույսի քանակը որոշվում է Q γs α բանաձևով, որտեղ γ -ն համեմատականության գործակիցն է և բնութագրում է միավոր մակերեսին ընկնող լույսի քանակը, α -ն ընկնող ճառագայթի և ուղղահայացի կազմած անկյունն է:

$\alpha = \alpha(t)$ անկյունը ժամանակից կախված գծային աճող ֆունկցիա է՝

$$\alpha = at + b$$

և բավարարում է

$$\alpha - \frac{\pi}{2} \alpha \quad \alpha \quad \frac{\pi}{2} :$$

պայմաններին: Հետևաբար կունենանք.

$$\alpha - \frac{\pi}{12} (t - \quad :$$

Այսպիսով.

$$Q = \gamma S - \frac{\pi}{12} (t - \quad :$$

Քանի որ փիփերթի տերևի շառավիղը որոշվում է $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ բանաձևով, ապա տեղադրելով Q -ի արժեքը (10)-ում՝ կստանանք.

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} - \frac{12K\gamma}{\pi\sqrt{\pi}} - \frac{\pi}{12} t - \frac{\pi}{12} t - \quad + C : \quad (11)$$

C և $K\gamma$ մեծությունների արժեքները կորոշվեն s , s պայմաններից.

$$C - \frac{11}{30}, K\gamma - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{360} :$$

Հաստատունների համար գտնված արժեքները տեղադրելով (11)-ում՝ կստանանք.

$$S - \frac{3600}{\left[11 - \sin \frac{\pi}{12} (t - 6) \right]^2} :$$

Ստացված բանաձևն արտահայտում է փիփերթի տերևային մակերեսի կախվածությունը ժամանակից:

Սույն հոդվածը ուսումնասմթողական օգնություն է ցուցաբերում և առաջացնում է հետաքրքրություն դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառմամբ կենսաբանական խնդիրների լուծման նկատմամբ: Դիտարկված պրոցեսները նկարագրող հայտնի դիֆերենցիալ հավասարումների միջոցով լուծված է չորս խնդիր՝ վեր հանելով կապը մաթեմատիկայի և կենդանի օրգանիզմներում ընթացող կենսական երևույթների միջև:

Գրականություն

1. **Амелькин В.В.**, Дифференциальные уравнения в приложениях. Москва., Наука 1987. 160 с.
2. **Гроссман С., Тернер Дж.**, Математика для биологов. Москва. Высшая Школа. 1983. 383 с.
3. **Гусев М. В., Минеева Л. А.**, Микробиология, М., Изд-во МГУ, 2004, 448 с.
4. **Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк А. М.**, Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: Москва. Изд-во 2-е, перераб.. 1989. 383 с.
5. Современная микробиология. Прокариоты: В 2-х томах / Под ред. **Й. Ленглера, Г. Дрекса, Г. Шлегеля, М.**, Мир, 2005.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.ս.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: