

ՀՏԴ 513.813

Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

Ֆ.մ.գ.թ., ԱրՊՀ-ի մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի դոցենտ
e-mail Gurgen250612@mail.ru

Կարինե ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

ԱրՊՀ-ի մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի դոցենտի պաշտ.
e-mail marutyankarine58@mail.ru

ՉՈՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՈՐՈՇ ՆՇԱՆԱՎՈՐ ԳԾԵՐ

Հոդվածում դիտարկված են հարթության վրա չորրորդ աստիճանի նշանավոր գծերը, որոնք իրենց հատկություններով տարբերվում են մեզ հայտնի գծերից և իրենց ուրվագծերով բնորոշում բնության մեջ գոյություն ունեցող մարմիններ: Այդպիսի նշանավոր գծերից են՝ Բեռնուլիի լեմնիսկատը և Կասսինի ձվաձիրները, կանխոդա Նիկոմեդա և Պասկալի խիտունջը, կարդիոիդան, կապպա, վարդեր: Արտածված են այդ կորերի հավասարումները ուղղանկյուն դեկարտյան և բևեռային կոորդինատական համակարգերում:

Բանալի բառեր՝ Չորրորդ աստիճանի գիծ, Բեռնուլիի լեմնիսկատը, Կասսինի ձվաձիրները, կանխոդա, Պասկալի խիտունջը, կարդիոիդա Նիկոմեդա, կապպա, վարդեր, հանրահաշվական գծեր:

Г.Налбандян

О НЕКОТОРЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

В статье рассмотрены замечательные линии четвертой степени на плоскости, которые своими свойствами отличаются от известных нам линий и своими траекториями определяют фигуры, существующие в природе. Такими замечательными линиями являются - лемниската Бернулли и овал Кассини, конхоида Никомеда и улитка Паскаля, кардиоида, каппа, розы. Выводятся уравнения этих кривых в прямоугольной декартовой системе координат и в полярной координатной системе.

Ключевые слова: линия четвертой степени, лемниската Бернуля, овал Кассини, конхоида Никомеда, улитка Паскаля, кардиоида, каппа, розы, алгебраическая линия.

G. Nalbandyan

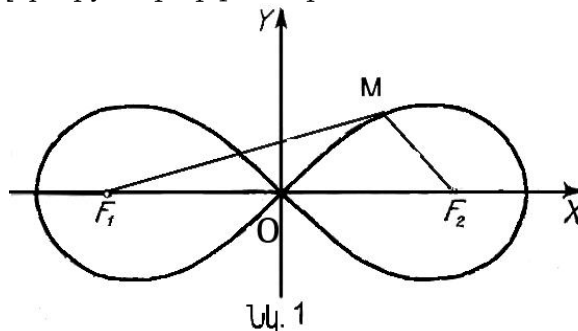
SOME WONDERFUL LINES OF THE FOURTH DEGREE

Considered wonderful lines of the fourth degree on the plane, which differ in their properties from those known to us, and by their outlines they identify bodies that exist in nature. Among which significant features are the lemniscate of Bernoulli and ovals of Cassini, the cardioids of Nicomedia and the parachoid of Pascal, cardio, kappa, roses. Equations of these curves are produced in both the rectangular coordinate system and the polar coordinatesystem.

Key words: fourth degree line, lemniscate of Bernoulli, ovals of Cassini, parotid, parachoid of Pascal, kappa, roses and asteroid curves, algebraic lines.

Հոդվածում ընդգրկված են ոչ բուհական ծրագրով ուսումնասիրվող գծեր, որոնք բնութագրվում են չորրորդ աստիճանի հավասարումով, բայց հանդիսանում են հարթ գծեր: Այլ կերպ ասած հարթության վրա գոյություն ունեն որոշ հայտնի գծեր, որոնց հավասարումները չորրորդ աստիճանի են և իրենց տեսքերով բնորոշում են բնության մեջ գոյություն ունեցող մարմիններ և հենց այդ մարմինների անուններով կոչվում են այդ գծերը: Թեման հրատապ է այն իմաստով, որ հետաքրքրություն կառաջացնի ուսումնասիրելով առանձնակի ուրվագծեր: [1], [2], [3] դասագրքերում այս գծերի մասին շարադրանքը կատարված են տարբեր հերթականությամբ, բայց նպատակահարմար է նշված հերթականությունը, որն ավելի մատչելի է ուսանողների համար:

1. Բեռնուլիի լեմնիսկատ են անվանում հարթության այն կետերի ամբողջությունը, որոնց համար հարթության երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն մեծություն է և հավասար է տված երկու կետերի միջև եղած հեռավորության կեսի քառակուսուն:



Կոորդինատական համակարգը ընտրենք հետևյալ կերպ. կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք F_1F_2 հատվածի O միջնակետը: Որպես աբսցիսների առանցք ընտրենք F_1 և F_2 կետերով անցնող ուղիղը: Նրա վրա նշենք դրական ուղղությունը՝ F_1 -ից դեպի F_2 : Օրդինատների առանցքը ուղղենք F_1F_2 հատվածի միջնուղղահայացով: Այդ դեպքում կունենանք $F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$: Բեռնուլիի լեմնիսկատի սահմանման համաձայն՝

$$|F_1M| \times |F_2M| = a^2 \quad (1)$$

Տեղադրելով $|F_1M| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $|F_2M| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ արժեքները, և կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ՝ կստանանք՝

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

լեմնիսկատի հավասարումը, իսկ լեմնիսկատի հավասարումը բևեռային կոորդինատական համակարգում կլինի՝

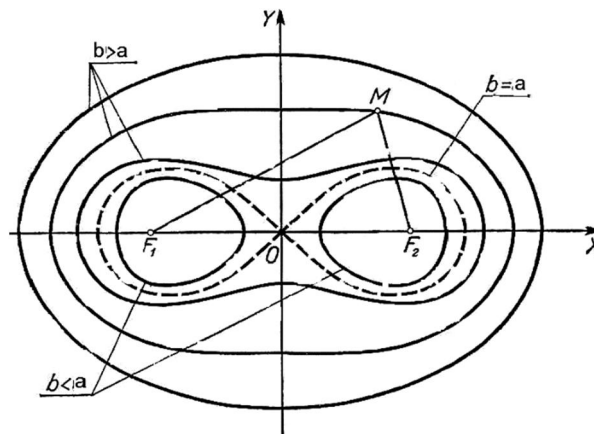
$$r^2 = 2a^2 \cos 2j :$$

2. Աստղագետ Ժան Դոմինիկ Կասսինի (1625-1712) ուսումնասիրելով երկրի ուղեծիրը, այդ ընթացքում հայտնաբերել է այդ գծերը: *Կասսինի ձվածիրներ* անվանում են հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց համար հարթության երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն մեծություն է: Հաշվի առնելով վերևում կոորդինատական համակարգի մուծման մեթոդը՝ $F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$, և նշանակելով b^2 -ով այդ հաստատուն մեծությունը՝ կստանանք

$$|F_1M| \times |F_2M| = b^2 :$$

Կատարելով նմանատիպ դատողություններ՝ կստանանք Կասսինի ձվածիրների հավասարումը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում՝

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4 : \quad (2)$$



Նկ. 2

Անցնելով բևեռային կոորդինատներին, $x = r \cos j$, $y = r \sin j$ կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ՝ կստանանք

$$r = a \sqrt{\cos 2j \pm \sqrt{\cos^2 2j + \frac{b^4}{a^4} - 1}} \quad (3)$$

Տարբերվում են Կասսինի ձվածիրների երեք հիմնական ձևեր՝ կախված a և b

պարամետրերից՝ $b > a$, $b = a$, $b < a$, [1], [2], [4]:

1) Եթե $b > a$, ապա (3) հավասարման մեջ ներսի արմատից առաջ պետք է

վերցնել պլյուս նշանը, հակառակ դեպքում բացարձակ արժեքի համար ենթաարմատատակ արտահայտությունը առաջին արմատի համար կլինի բացասական:

2) Եթե $b = a$, ապա (3) հավասարումը կընդունի այսպիսի տեսք.

$$r = a \sqrt{2 \cos 2j},$$

հետևաբար՝ Բեռնուլիի լեմնիսկատը հանդիսանում է Կասսինի ձվածիրի մասնավոր դեպքը:

3) Եթե $b < a$, ներմուծելով նոր a պարամետր և նշանակելով $\frac{b^2}{a^2} = \sin 2\alpha$;

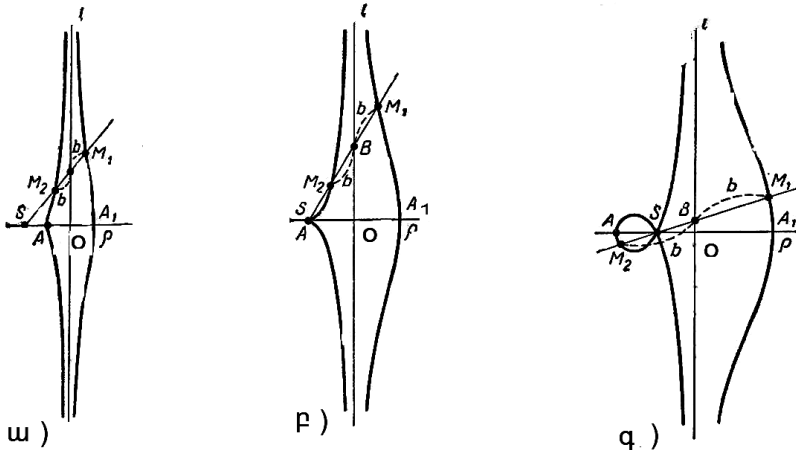
(3) հավասարումից կստանանք.

$$r = a \sqrt{\cos 2j \pm \sqrt{\cos^2 2j - \cos^2 2\alpha}}:$$

Այս ձևով կարելի է հետևել Կասսինի ձվածրի փոփոխությանը (նույն ֆիքսված F_1 և F_2 կետերով)՝ կախված b պարամետրի փոփոխությունից: Ձվածիրը այդ դեպքում կազմված կլինի երկու փակ գծերից, որոնք չափսերով մեծանում են, երբ b -ն աճում է (նկ.2): Ընդ որում, եթե $b = a$, ապա այդ փակ գծերը միաձուլվում և

որոշում են Բեռնուլիի լեմնիսկատը, իսկ b պարամետրի հետագա մեծացման դեպքում ձվածիրը իրենից ներկայացնում է փակ գիծ:

3. Հարթությունում ֆիքսենք l ուղիղը և O կետը, O կետի հեռավորությունը այդ ուղիղից $|OS| = a$: Տանենք SB ճառագայթը, որը հատում է l ուղիղը B կետում: Ճառագայթի վրա B կետի երկու կողմից տեղադրենք BM_1 և BM_2 հատվածները, այնպես, որ $|BM_1| = |BM_2| = b$, որտեղ b տված թիվն է:



Նկ. 3

Քանի որ $|SB| = \frac{a}{\sin j}$, ապա $r_1 = \frac{a}{\sin j} + b$, $r_2 = \frac{a}{\sin j} - b$:

Այս բանաձևերը կարելի է միացնել և գրել

$$r = \frac{a}{\sin j} \pm b:$$

Այստեղ պլյուս նշանը վերին ճյուղի համար է, իսկ մինուս նշանը՝ ստորին: Կանխոիդի բանաձևը կախված է a և b պարամետրերի փոխհարաբերությունից: Եթե $b = a$ և $b > a$, ապա գիծը համապատասխանում է նկ. 3-ում բ)-ին և գ)-ին:

Այժմ կազմենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կանխոիդի հավասարումը [3], [4]: $M(x, y)$ կետից տանենք ուղղահայաց աբսցիսների առանցքին և առանցքի հետ հատման կետը նշանակենք P -ով: Թող S կետը ուղղահայացի հատման կետն է LL_1 բազիսային ուղղի հետ: OMP և KMS եռանկյունների նմանությունից կունենանք

$$|OM| : |MK| = |MP| : |MS|:$$

Տեղադրելով $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|MK| = b$, $|MP| = y$, $|MS| = y - a$ արժեքները և կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ՝ կստանանք

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 - b^2 y^2 = 0: \quad (4)$$

Ստացված հավասարումը ամբողջովին սահմանում է կանխտիդան, որը հանդիսանում է չորրորդ աստիճանի հավասարում:

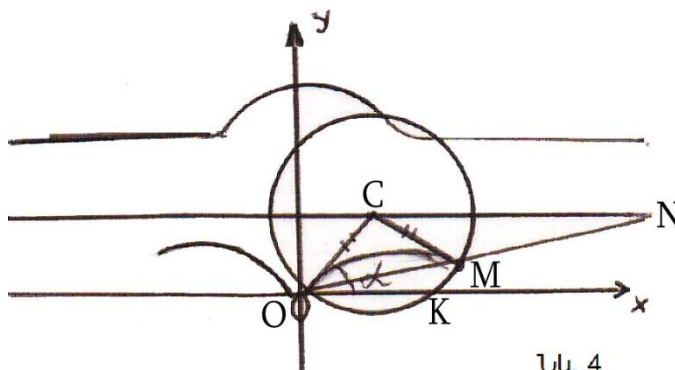
Նշենք, որ բազիսային LL_1 ուղիղը հանդիսանում է կանխտիդի համար ասիմպտոտ:

Իրոք

$$\lim_{j \rightarrow 0} MS = \lim_{j \rightarrow 0} (MP - SP) = \lim_{j \rightarrow 0} y - a = \lim_{j \rightarrow 0} r \sin j - a =$$

$$= \lim_{j \rightarrow 0} \frac{a}{a \sin j} \pm b \frac{\ddot{\sin j}}{\dot{\sin j}} - a = \lim_{j \rightarrow 0} (a \pm b \sin j) - a = 0:$$

Դիցուք պետք է a անկյունը բաժանել երեք հավասար մասերի: Մի կողմի վրա տված անկյունից մինչև նրա O գագաթը տեղադրենք $|OC| = b$ հատվածը:



U4. 4

Դիտարկենք b շառավղով և C կենտրոնով շրջանագիծը: C կետով տանենք զուգահեռ մյուս կողմին: Ընդունենք այդ ուղիղը որպես բազիս, իսկ O կետը կանխորոշի

և շրջանագծի հատման կետ (նկ.4): Այս գիծը կոչվում է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Էթեն

Պատկեր (1588-1651) անունով: Յույց տանք, որ MOK անկյունը հավասար է $(1/3)a$:

Քանի որ $OC = CM = MN - l$, ապա CMN և OCM եռանկյուններից կստանանք.

$$\angle MCN = \angle MNC, \angle COM = \angle CMO, \angle CMO = 2\angle CNM, \angle CNM = \angle MOK :$$

Ուրեմն

$$a = \mathfrak{D}COK = \mathfrak{D}COM + \mathfrak{D}MOK = 3\mathfrak{D}MOK :$$

Հետևաբար՝

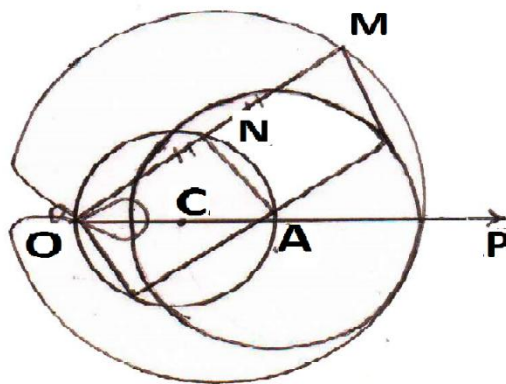
$$\exists MOK = (1/3)a :$$

4. Դիտարկենք r շառավղով և C կենտրոնով շրջանագիծ: Նրա վրա ընտրենք O կետը: Պատկերացնենք, որ O կետի շուրջը պտտվում է OM ճառագայթը: Նրա ամեն մի դիրքը շարունակենք մինչև N կետը՝ ճառագայթի և շրջանագծի հատման կետը, $|NM| = l$, որտեղ l -ը տված դրական թիվ է: Ճառագայթի պտտումից 0 -ից 180° անկյան տակ կստանանք M կետերի ամբողջություն: Ճառագայթի հետագա պտտումը 180° -ից 360° անկյան տակ, շարունակելով l հատվածի երկարությունը ճառագայթի ուղղությամբ, կստանանք, որ $|NM_1| = l$, այսինքն՝ կստանանք M_1 կետը: M և M_1 կետերի ամբողջությանը անվանում են Պասկալի խիտունջ [1], [2], [3]:

Նշենք, որ կանխտիդի և Պասկալի խիտունջի կառուցումները նմանատիպ են, տարբերությունը այն է, որ կանխտիդի բազիսը հանդիսանում է ուղիղ, իսկ խիտունջի բազիսը

շրջանագիծ: Կազմենք Պասկալի խիտունջի հավասարումը բևեռային և ուղղանկյուն

դեկարտյան կոորդինատական համակարգերում:



Նկ. 5

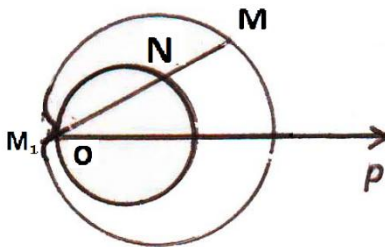
O կետը ընդունենք որպես բևեռ: Բևեռայնության առանցքը տեղափոխենք O կետից շրջանագծի կենտրոնը՝ C կետը (նկ. 5): Նույն ձևով վերցնում ենք աբցիսների առանցքը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում նույն O սկզբնակետով: M կետի բևեռային կոորդինատները նշանակենք r, j (որտեղ, $r = OM$ -ն ON ճառագայթի թեքումից աբցիսների առանցքի հետ ստացված անկյան մեծությունն է), իսկ նրա դեկարտյան կոորդինատները նշանակենք x, y :

Այնպես, որ եթե $r = |OM| = |ON| + |NM|$ և $|ON| = 2r \cos j$ (ստացված ONA եռանկյունուց) $|NM| = b$, ապա $r = 2r \cos j + b$: Կատարելով նմանատիպ

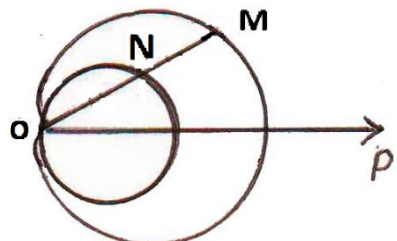
դատողություններ՝ այդպիսի $M_1(r, j)$ կետի համար կստանանք $r = 2r \cos j - b$:

Այս երկու բանաձևերը կարելի է միացնել և գրել.

$$r = 2r \cos j \pm b$$



Նկ. 6



Նկ. 7

Ստացանք Պասկալի խիսունջի հավասարումը բևեռային կոորդինատական համակարգում: Այժմ ստանանք հավասարումը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում: Դրա համար բավական է $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos j = x : \sqrt{x^2 + y^2}$ արժեքները տեղադրել և կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ, կստանանք՝

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0: \quad (5)$$

(5) հավասարումը Պասկալի խիսունջի հավասարումն է ուղղանկյուն դեկարտյան

կոորդինատական համակարգում: Քանի որ այս հավասարումը չորրորդ կարգի հանրահաշվական հավասարում է, ապա Պասկալի խիսունջը հանրահաշվական չորրորդ

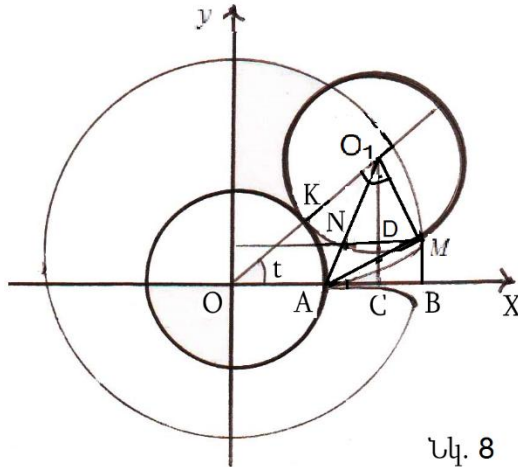
կարգի գիծ է: Այս գիծը համաչափ է Ox և Oy առանցքների նկատմամբ, քանի որ (5)

հավասարման մեջ x, y փոփոխականները մասնակցում են զույգ աստիճանով:

Նկ. 6-ում պատկերված է Պասկալի խիսունջը, երբ $b < 2r$: Այդ դեպքում կարդիոիդա կոչվում է այն գիծը, որը արտագծված է r շառավղով շրջանագծին M կետով: Պասկալի խիսունջի բանաձևը կախված է r և b պարամետրերի արժեքներից:

Եթե $b < 2r$, ապա գիծը ունի նկ. 6-ում պատկերված տեսքը, և O կետը այդ դեպքում կհանդիսանա հանգուցակետ: Նշենք, որ բևեռը մեկուսացված կլինի հատուկ կետերով, և կետը պատկանում է գծին, որովհետև նրա կոորդինատները բավարարում են (5) հավասարմանը: Եթե $b = 2r$, ապա գիծը կունենա նկ. 7-ում պատկերված տեսքը: Այդ դեպքում բևեռը կլինի հակադարձելի կետ՝ M կետին, որն գալարվում է նույն շառավղով շրջանագծի վրա [3], [6], [7]:

5. Դիտարկենք անշարժ r շառավղով և O կենտրոնով շրջանագիծը և նրա վրա առանց սահելով գլորվող մի ուրիշ շրջանագիծ r շառավղով և O_1 կենտրոնով:



Նկ. 8

Այդ M կետը ժամանակի ընթացքում փոխում է իր դիրքը, սկզբում նա գտնվում էր OA ճառագայթի վրա, իսկ M կետը համընկնում էր A կետի հետ և այդ նույն կետում շրջանագծերը շոշափում են իրար (նկ.8): Շառավղիներով կազմված MO_1K անկյունը նշանակենք t -ով: Եթե գալարումը կկատարվի առանց սահման, ապա համապատասխան AK և KM աղեղները կլինեն հավասար՝ $rt = rt_1$, որտեղից կստանանք $t = t_1$, որտեղ $t_1 = \angle MO_1K$:

Կազմենք կարդիոիդի հավասարումը տարբեր կոորդինատական համակարգերում: Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգը ընտրենք այնպես, ինչպես պատկերված է նկ. 8-ում: Նշանակենք M կետի կոորդինատները X, Y -ով, այդ դեպքում

$$x = OB = OC + BC, \quad y = BM = CD = CO_1 - DO_1:$$

Նշենք, որ $OO_1 = 2r$, և $\angle O_1AC = 2t$, $\angle O_1MD = 2t$, որպես փոխուղղահայաց կողմերով

անկյուններ: Քանի որ

$$OC = 2r \cos t, \quad BC = r \cos 2t, \quad CO_1 = 2t \sin t, \quad DO_1 = r \sin 2t,$$

ապա

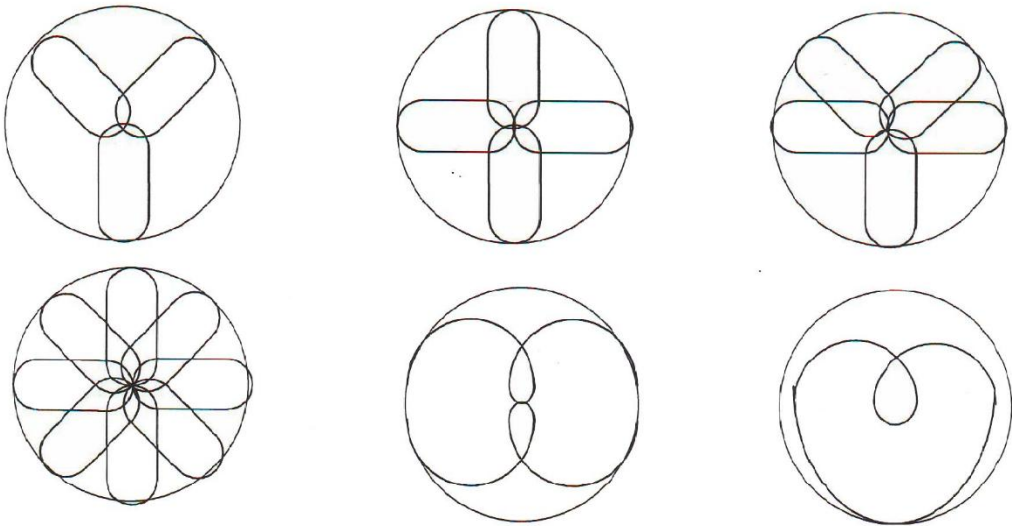
$$x = 2r \cos t + r \cos 2t, \quad y = 2r \sin t - r \sin 2t: \quad (6)$$

(6)-ը հանդիսանում է կարդիոիդի պարամետրական հավասարումը:

Այժմ ստանանք կարդիոիդի հավասարումը բևեռային կոորդինատական համակարգում: Որպես բևեռ ընտրենք A կետը (նկ.9), իսկ բևեռային առանցքը ուղղենք Ox առանցքի ուղղությամբ: Քանի որ AOO_1M հավասարակողմ սեղան է, ապա M կետի j բևեռային անկյունը

հավասարվում է շրջանագծի անկյանը, այսինքն՝ $j = t$: Տեղադրելով $y = r \sin j = r \sin t$ արժեքը (6) -ի երկրորդ հավասարման մեջ և կրճատելով $\sin j$ -ով՝ կստանանք կարդիոդի հավասարումը բևեռային կոորդինատական համակարգում՝

$$r = 2r(1 - \cos j): \quad (7)$$



Նկ. 9

(7) հավասարման մեջ տեղադրելով $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos j = x : \sqrt{x^2 + y^2}$ արտահայտությունները և կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ, կստանանք որոնելի հավասարումը՝

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0: \quad (8)$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ կանխորդան բնութագրվում է չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումով:

6. Ինչպես հայտնի է հարթության կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները

բևեռային կոորդինատական համակարգում: Բավարարում են

$$r = a \operatorname{ctg} kj \quad (9)$$

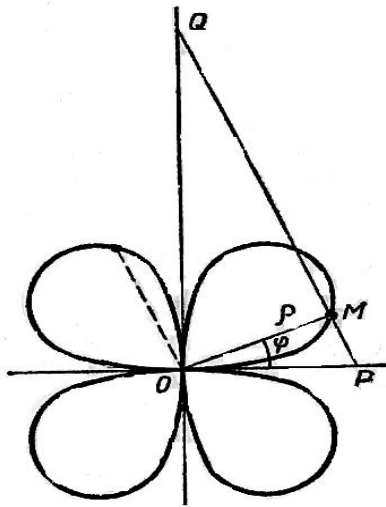
հավասարման, անվանում են *կյապպա* գիծ: Իսկ *վարդեր* կոչվում է հարթության այն

կետերի բազմությունը, որի կոորդինատները բևեռային կոորդինատական համակար-

գում: Բավարարում է

$$r = a \sin kj \quad \text{կամ} \quad r = a \cos kj \quad (10)$$

հավասարումները, որտեղ a -ն և k -ն հաստատուն դրական թվեր են (նկ.9):



Նկ. 10

Նշված գծագիրը համապատասխանում է $k = 4$ արժեքում: Այն անվանում են քառաթերթ *վարդ* (նկ.10): Քանի որ, $|\sin kj| \leq 1$ ապա (10) հավասարումից հետևում է, որ $r \in a$, հետևաբար՝ բոլոր գծերը գտնվում են a շառավղով շրջանագծի ներսում [1], [4], [6]:

Քանի որ, $\sin kj$ ֆունկցիան պարբերական է, ապա վարդը կազմված է հավասարամեծ թերթերից, որոնք համեմատական են a ամենամեծ շառավղին, իսկ այս թերթերի քանակը կախված է k թվից: Նշենք, որ կապական և վարդերը հանդիսանալով որպես հարթ գծեր, ևս բնութագրվում են չորրորդ աստիճանի հավասարումներով:

Գրականություն

1. Понарин Я.П., Элементарная геометрия, М., 2004, 312 с.
2. Атанасян Л.С., Геометрия, ч-1, М., 1973, 480 с.
3. Бакельман И.Я., Высшая геометрия, М., 1967, 368 с.
4. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии, ч-1, М-1973, 256 с.
5. Прасолов В.В., Задачи по геометрии, в 2-х ч.-М, Наука, 1986, 326 с.
6. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Элементарная геометрия, М., 1966, 366 с.
7. Яглом И.М., Геометрические преобразования, М., 1956, ч., 612 с.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: