

ՀՏԴ 512Մաթեմատիկա

Ռոբերտ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարան, մաթեմատիկայի ամբիոնի դասախոս
E-mail: rharutyunyan@shushitech.am

Լիանա ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

ԱրՊՀ, մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի դոցենտ
E-mail: liana_abrahamyan@mail.ru

Վալյա ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարան, մաթեմատիկայի ամբիոնի դասախոս
E-mail: valyavardanmyan@mail.ru

ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ

Հոդվածում կառուցման խնդիրների մի քանի հետաքրքիր օրինակների վրա դիտարկվում են դրանց լուծման փուլերը: Բերված խնդիրները լուծվել են կամ կարկինի /քանոնի միջոցով, կամ էլ դրանց համակցությամբ:

Բանալի բառեր՝ կառուցման խնդիր, լուծում, կառուցում, կարկին, քանոն:

Р. Арутюнян, Л.Абрамян, В.Варданян

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В МАТЕМАТИКЕ

В статье, на некоторых интересных задачах на построение, рассматриваются этапы их решений. Приведенные задачи решаются либо с помощью циркуля (линейки), либо же в их комбинации.

Ключевые слова: Задача на построение, решение, построение, циркуль, линейка.

R.Harutyunyan, L.Abrahamyan, V.Vardadnyan

CONSTRUCTION TASKS IN MATHEMATICS

In the article, the stages of solution of some interesting construction problems are considered. The problems are solved either using a divider (ruler), or in their combination.

Key words: construction task, solution, construction, divider, ruler.

Ներածություն

Կառուցման խնդիրները երկրաչափության զարգացմանը մեծ նպաստ են բերել: Այս խնդիրների նկատմամբ հետաքրքրությունը պայմանավորված է ոչ

միայն դրանց գեղեցկությամբ և լուծման մեթոդների ինքնատիպությամբ, այլև կիրառական մեծ նշանակությամբ: Շինարարական նախագծերը, ճարտարապետությունը մեծապես հիմնված են կառուցման խնդիրների վրա: Դժվար է գերազնահատել կառուցման խնդիրների դերը դպրոցի աշակերտների մաթեմատիկական զարգացման գործընթացում:

Ընդունված է համարել, որ հին ժամանակներում հույները երկրաչափական կառուցումներն իրականացրել են միայն կարկինի և քանոնի օգնությամբ, բայց իրականում դա այդպես չէր: Սակայն միայն կարկինի և քանոնի միջոցով կառուցումները համարվում էին ավելի նրբագեղ և արժեքավոր:

Դ.Պոյայն իր «Մաթեմատիկական հայտնագործություն» մենագրության առաջին գլուխը ամբողջությամբ նվիրել է կառուցման խնդիրներին՝ համարելով, որ դրանք լավագույնս օգտակար կլինեն խնդիրները լուծել սովորելու համար:

Կառուցման խնդիրները և նրանց լուծումները պարզունակ չեն: Գոյություն չունեն պատրաստի ալգորիթմներ այդ խնդիրների լուծման համար: Յուրաքանչյուր այդպիսի խնդրի լուծման համար պահանջվում է առանձնակի մոտեցում, և հենց այդ պատճառով էլ բոլորովին էլ հեշտ չէ սովորել լուծել կառուցման խնդիրները: Սակայն այդ խնդիրները տալիս են յուրահատուկ հենք սովորողներին ստեղծագործական որոնումների համար՝ ներգրավելով նրանց ենթագիտակցությունը և ինտուիցիան:

Դրանք զարգացնում են նաև անհատի այնպիսի հատկանիշներ, ինչպիսիք են ուշադրությունը, նախաձեռնողականությունը, նպատակասլացությունը, ստեղծագործականությունը, կարգապահությունը, աշխատասիրությունը:

Հոդվածի նպատակը ոչ միայն կառուցման խնդիրների լուծման ուսուցումն է, այլ այդ խնդիրների լուծումների վերլուծությունը:

Հուսով ենք, որ ներկայացվող խնդիրներն իրենց լուծումներով հետաքրքրություն կառաջացնեն ընթերցողի մոտ, ինչն էլ կնպաստի նշված բնագավառի նկատմամբ հետաքրքրության աճին:

1. Կառուցման խնդիրների լուծման փուլերը

Կառուցման խնդիրը խնդիր է, որտեղ պահանջվում է կառուցել երկրաչափական օբյեկտ՝ օգտվելով միայն երկու գործիքից՝ կարկինից և քանոնից: Որոշ խնդիրներում լուծումները պահանջվում է գտնել այդ գործիքներից միայն մեկի միջոցով:

Այդ խնդիրների լուծման իմաստը չի կայանում «ձեռքերով» համապատասխան կառուցումներ կատարելու, այլ լուծման ալգորիթմ գտնելու մեջ, այսինքն խնդրի լուծման նկարագրության մեջ արդեն հայտնի, ստանդարտ կառուցումների հաջորդականության տրման մեջ:

Կառուցման խնդիրները լուծելու համար անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ քայլերը [1-3]՝

1. **Վերլուծություն:** Խնդրի լուծման այս փուլում ենթադրվում է, որ խնդիրը լուծված է, կատարվում է երկրաչափական պատկերի գծագիրը, և փորձ է արվում գտնել խնդրի պայմանների և փնտրվող տարրերի այնպիսի կապեր, որոնք թույլ են տալիս կիրառել հայտնի կառուցումները:

2. **Կառուցում:** Գտնելով վերլուծության արդյունքում կառուցման գործընթացը՝ անհրաժեշտ է այն իրականացնել մանրակրկիտ՝ նկարագրելով կառուցման ուրվագիծը (սխեման):

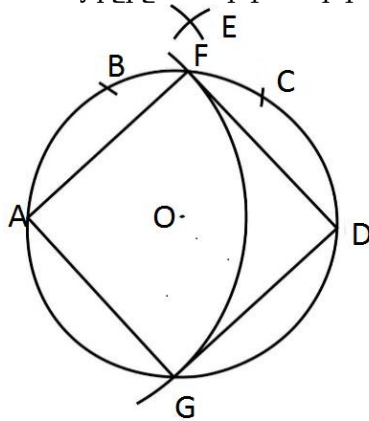
3. **Ապացուցում:** Լուծման այս մասում անհրաժեշտ է ապացուցել, որ կառուցման ուրվագիծը իսկապես բավարարում է խնդրի բոլոր պայմանների պահանջներին:

4. **Հետազոտում:** Հետազոտությունից պետք է հետևի՝ արդյո՞ք միշտ է հնարավոր կառուցումը և քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

2. Միայն կարկինի միջոցով կառուցման խնդիրների օրինակներ

Խնդիր 1. (Նապոլեոնի խնդիրը [3]): Օգտվելով միայն կարկինից՝ տրված կենտրոնով շրջանագիծը բաժանել չորս համընկնող (կոնգրուենտ) աղեղների:

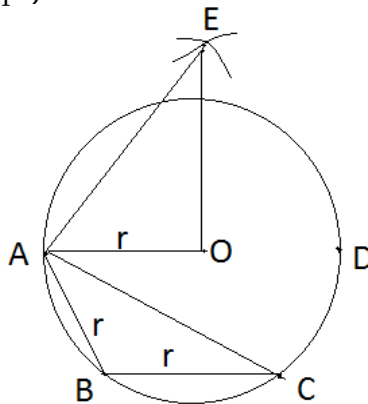
Լուծում: 1. **Վերլուծություն:** Շրջանագիծը բաժանել չորս համընկնող աղեղների նշանակում է այդ շրջանագծին ներգծել քառակուսի:



Նկ.1

Նկ.1-ում պատկերված է խնդրի նրբագեղ լուծումը, որը ներկայացրել է իտալացի մաթեմատիկոս Մասկերոնին: Ներգծված քառակուսու գագաթները գտնվում համար բավական է տանել 6 աղեղ: Շրջանագծի կամայական A կետից շրջանագծի շառավղով նշենք B կետը: Այդ նույն շառավղով B կետից նշենք C կետը և C կետից նշենք D կետը: A և D կետերից՝ որպես շրջանագծերի կենտրոններից, $|AC|$ շառավղով տանենք աղեղներ, որոնք կհատվեն E կետում: A կետից՝ որպես կենտրոնից, $|OE|$ շառավղով տանենք աղեղ, որը կհատվի շրջանագծի հետ G և F կետերում: A, F, D, G կետերը կհանդիսանան տրված շրջանագծին ներգծված քառակուսու գագաթները:

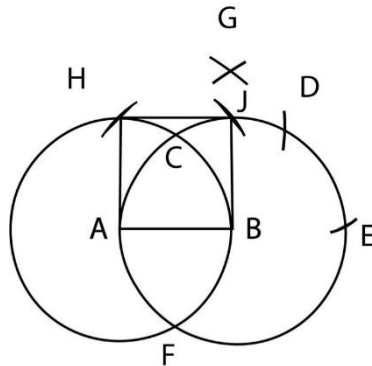
Այդ հատվածը ստանալու համար նկատենք, որ $AC = r\sqrt{3}$, իսկ $OE = \sqrt{AE^2 - AO^2} = r\sqrt{2}$ (նկ.3):



3. *Ապացուցում:* ABC եռանկյունուց $AC = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = r\sqrt{3}$ և $\triangle AOE$ -ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, քանի որ $\triangle AED$ -ն հավասարասրուն է, հետևաբար, EO -ն և միջնագիծ է, և բարձրություն:

Խնդիր 2: Տրված են քառակուսու երկու կից գագաթները: Պահանջվում է կառուցել մյուս երկու գագաթները՝ օգտվելով միայն կարկինից:

2. *Կառուցում*: Որպես կենտրոն ընդունելով տրված A և B կետերը՝ $|AB|$ շառավղով տանենք երկու շրջանագիծ (նկ.4):



ۛۛ.4

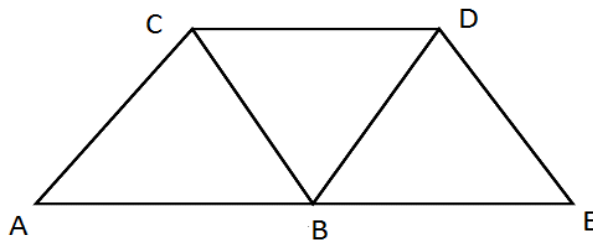
Նույն շառավղով կառուցենք D և E կետերը: $|CF|$ շառավղով A և E կետերից տանենք երկու աղեղ, որոնք կհատվեն G կետում: $|BG|$ շառավղով A և E կետերից տանելով երկու աղեղ՝ կստանանք J և H կետերը, որոնք էլ կլինեն փնտրվող գազաթները:

3. *Ապացուցում:* Նկ.4-ից դժվար չէ տեսնել, որ $CF = \sqrt{3}AB$ և $BG = \sqrt{2}AB$: $\triangle AJB$ -ից կստանանք, որ $JB \perp AB$ -ին և $AH \perp AB$, այսինքն H -ը և J -ն փնտրվող զագաթներն են:

4. *Հետազոտում:* Քանի որ H և J գազաթները որոշվում են միաբժեքորեն, հետևաբար, խնդրի լուծումը կլինի միակեր:

Խնդիր 3: Տրված է AB հատվածը: Օգտվելով միայն կարկինից՝ կառուցել այդ հատվածից երկու անգամ մեծ հատված:

Լուծում: Ստորև բերված նկարում ներկայացվում է խնորրի լուծումը՝



٧٤.5

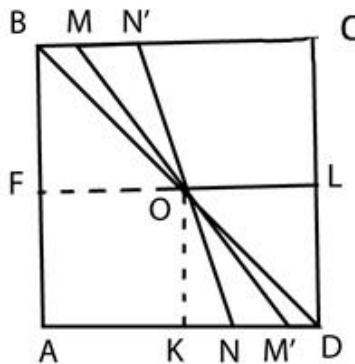
AB հատվածի A և B ծայրակետերում $|AB|$ շառավղով տանելով երկու աղեղ՝ կստանանք C կետը՝ $AB = AC = CB$: CB հատվածի C և B ծայրակետերից $|CB|$ շառավղով տանելով երկու աղեղ՝ կստանանք D կետը՝ $CB = CD = BD$: Նման եղանակով DB հատվածի ծայրակետերից տանելով աղեղներ՝ կստանանք E կետը: Ակնհայտ է, որ $AE = 2AB$:

Այստեղ, հաշվի առնելով լուծման պարզությունը, վերլուծության բոլոր փուլերը
չեն տրվել:

3. Քանոնի և կարկինի միջոցով կառուցման խնդրի օրինակ

Խնդիր 4: Կառուցել քառակուսի, եթե տրված են նրա O կենտրոնը և M ու N կետերը՝ ընկած նրա գուգահեռ կողմերի վրա:

Լուծում: 1. *Վերլուծություն:* Ենթադրենք խնդիրը լուծված է և $ABCD$ -ն փնտրվող քառակուսին է, O կետը նրա կենտրոնն է, իսկ M -ը և N -ը ընկած են BC և AD կողմերի վրա, համապատասխանաբար (նկ. 6):



Նկ.6

Քանի որ O -ն $ABCD$ քառակուսու համաչափության կենտրոնն է, ուստի O կետի նկատմամբ M կետի համաչափ M' կետն ընկած կլինի քառակուսու AD կողմի վրա, իսկ N' կետը՝ BC կողմի վրա: M և N' կետերը կորոշեն BC կետերով անցնող ուղիղը, իսկ N և M' կետերը՝ AD -ով անցնող ուղիղը: Կառուցելով BC և AD ուղիղները՝ դժվար չի լինի կառուցել $ABCD$ քառակուսու գագաթները: Եթե O կետից ուղղահայացներ իջեցնենք նրանց վրա, ապա կստանանք OK -ն՝ ուղղահայաց AD -ին, և OP -ն՝ BC -ին:

2. *Կառուցում:* Կառուցենք O կետի նկատմամբ M կետին համաչափ M' կետը, ինչն անելու համար միացնենք M կետը O կետին և MO ուղղի վրա տեղադրենք $OM = OM'$: Նման ձևով կկառուցենք N' կետը: M, N' և N, M' կետերով տանենք ուղիղներ: Ինչպես հայտնի է՝ կարկինի և քանոնի միջոցով դժվար չէ O կետից իջեցնել ուղղահայաց NM' կետերով անցնող ուղղի վրա, թող նրա հիմքը K կետն է: Հանգունորեն O կետից իջեցնենք ուղղահայաց BC -ի վրա, թող դա P կետն է: Բայց $\triangle AOD$ -ից $AK=OK$ և $OP=BP$, այսինքն, K կետից AD ուղղի վրա տեղադրելով OK հատվածի չափ աղեղներ, կստանանք քառակուսու A և D գագաթները և նմանակերպ P կետից կարկինին տալով OP բացվածք՝ կստանանք քառակուսու փնտրվող գագաթներից B -ն և C -ն:

3. *Ապացուցում:* Եթե O կետից իջեցնենք OP ուղղահայացը BC -ի վրա, ապա դժվար չէ տեսնել, որ $OP = OK$, բայց ըստ կառուցման՝ $OK=OP=AK=BP$: Ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ 90° -ի պտույտի դեպքում AB -ն կընկնի BC -ի, BC -ն՝ CD -ի և CD -ն՝ DA -ի վրա: Այսպիսով, $ABCD$ -ն քառակուսի է:

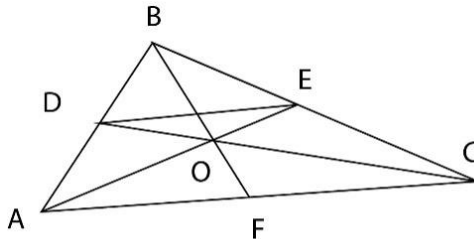
4. *Հետազոտում:* Եթե M, N, O կետերն ընկած չեն մի ուղղի վրա, ապա խնդիրն ունի միակ լուծումը: Եթե M, N, O կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա (M -ը և N -ը համաչափ են O -ի նկատմամբ), ապա խնդիրը կունենա անթիվ բազմությամբ

լուծումներ, քանի որ M և N կետերով կարելի է տանել անթիվ բազմությամբ զուգահեռներ:

4. Միայն քանոնի միջոցով կառուցման խնդրի օրինակ

Խնդիր 5: Տրված են կամայական եռանկյուն և նրա միջին գծերից մեկը: Միայն քանոնի օգնությամբ գտնել այդ եռանկյան տրված միջին գծին զուգահեռ կողմի միջնակետը:

Լուծում: Դիցուք տրված է կամայական ABC եռանկյունը և նրա DE միջին գիծը: Կառուցելով AE և DC միջնագծերը և օգտվելով եռանկյան միջնագծերը մի կետում հատվելու հատկությունից՝ BO հատվածի շարունակությամբ ստացված F կետը կլինի փնտրվողը (նկ.7):



Նկ.7

Այստեղ, հաշվի առնելով լուծման պարզությունը, վերլուծության բոլոր փուլերը ևս չեն տրվել:

Գրականություն

1. Блинков А.Д., Блинков Ю.А., Геометрические задачи на построение, М.МЦНМО, 2010.
2. Лозанцкий Э.Д., Математика, поступающим в вузы, Киев, «Вища школа», 1976.
3. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л., Внеклассная работа по математике в 6-8 классах, М.«Просвещение», 1977.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: