

ՀՏԴ 517.3:378

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Գայանե ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ.

E-mail: gay.petrosian@gmail.com

Դիանա ԱՎԱՆԵՍՅԱՆ

ԱրՊՀ «Մաթեմատիկա» ՄԿԾ-ի / կուրսի մագիստրանտ

ԱՌԱՋԻՆ ՍԵՌԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ

ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԼԱՊԼԱՍԻ

ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ

Մաթեմատիկայիում հաճախ անհրաժեշտ է լինում հաշվել այնպիսի անիսկական ինտեգրալներ, որոնց արժեքները հաշվելու համար կամ կիրառվում են մաթեմատիկական անալիզից հայտնի աշխատատար մեթոդներ, կամ կատարվում են մոտավոր հաշվարկներ: Նման ինտեգրալների արժեքները հաշվելու համար երբեմն ավելի հարմար է կիրառել Լապլասի ձևափոխությունը: Հոդվածում ներկայացված է առաջին սերի անիսկական ինտեգրալների հաշվումը Լապլասի ձևափոխության միջոցով: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ և ցույց է տրված, որ այդ մեթոդը որոշ դեպքերում առավել արդյունավետ է: *Բանալի բառեր՝* ինտեգրալի հաշվում, անիսկական ինտեգրալ, Լապլասի ձևափոխություն:

Г.Петросян, Д.Аванесян

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В математике часто бывает необходимо вычислить несобственные интегралы, в процессе которого либо применяются трудоемкие методы математического анализа, либо делают приближенные расчеты. Для вычисления подобных интегралов иногда более удобно пользоваться интегральным преобразованием Лапласа. В работе представлено вычисление несобственных интегралов первого рода с применением преобразования Лапласа. Рассмотрены конкретные примеры и показано, что в некоторых случаях этот метод более эффективен.

Ключевые слова: вычисление интеграла, несобственный интеграл, преобразование Лапласа.

G.Petrosyan, D.Avanesyan

CALCULATING IMPROPER INTEGRALS OF FIRST KIND WITH APPLYING LAPLAS' TRANSFORMATION

Often in mathematics values of improper integrals are calculating by using mathematical *laborious* methods. Also doing approximate calculations. Sometimes for calculating improper integrals can be solved by applying integral transformation of Laplas.

In this article presented calculating of improper integrals of first kind using Laplas' transformation. Considered concret examples and it is shown that in some cases this method is more effective.

Key words: calculating of integral, improper integral, Laplas' transformation.

1. Լապլասի ձևափոխությունը և նրա որոշ հատկություններ: Դիցուք $f(t)$ -ն $t(0 \leq t < +\infty)$ իրական փոփոխականից կախված ֆունկցիա է և Լեբեգի իմաստով ինտեգրելի է ցանկացած $(0, A)$ միջակայքում, իսկ p -ն կոմպլեքս թիվ է՝ $p = a + ib$: Այդ դեպքում

$$f^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = L[f(t)] \quad (1.1)$$

արտահայտությունն անվանում են Լապլասի ինտեգրալ, իսկ $f^*(p)$ -ն՝ Լապլասի ձևափոխություն [2-4]:

Լապլասի ձևափոխությունն օժտված է մի շարք հատկություններով: Բերենք դրանցից մի քանիսը [2-4].

1. Գծայնության հատկությունը: Դիցուք

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(t),$$

որտեղ c_k ցանկացած (կոմպլեքս) հաստատուններ են: Այդ դեպքում

$$L[f(t)] = L\left[\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n c_k L[f_k(t)] = \sum_{k=1}^n c_k f_k^*(p): \quad (1.2)$$

Օգտվելով (1.2)-ից կստանանք.

$$L\left[\frac{d}{d\lambda} f(t, \lambda)\right] = L\left[\frac{f(t, \lambda + d\lambda) - f(t, \lambda)}{d\lambda}\right] = \frac{f^*(p, \lambda + d\lambda) - f^*(p, \lambda)}{d\lambda} \\ = \frac{d}{d\lambda} f^*(p, \lambda): \quad (1.3)$$

$$L\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(t, \lambda) d\lambda\right] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L[f(t, \lambda)] d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f^*(p, \lambda) d\lambda: \quad (1.4)$$

2. Ածանցյալի Լապլասի ձևափոխությունը: $f(t)$ ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալի Լապլասի ձևափոխությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n f^*(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad (1.5)$$

որտեղ n -ը ամբողջ, դրական թիվ է:

3. **Լապլասի ձևափոխության դիֆերենցումը:** Ցանկացած ամբողջ, դրական n թվի համար տեղի ունի.

$$\frac{d^n f^*(p)}{dp^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-pt} dt = (-1)^n L[t^n f(t)]: \quad (1.6)$$

4. **Ինտեգրալի Լապլասի ձևափոխությունը:** Ցանկացած ամբողջ, դրական n թվի համար տեղի ունի.

$$L \left[\int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \right] = \frac{f^*(p)}{p^n}: \quad (1.7)$$

5. **Լապլասի ձևափոխության ինտեգրումը:** Եթե $\int_p^\infty f^*(q) dq$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա այն հանդիսանում է $\frac{f(t)}{t}$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխությունը: Այսինքն, տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$\int_p^\infty f^*(q) dq = L \left[\frac{f(t)}{t} \right]: \quad (1.8)$$

2. Լապլասի ձևափոխությունը որոշ տարրական ֆունկցիաների համար: t^n ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots): \quad (2.1)$$

Օգտվելով $\cos t$ և $\sin t$ ֆունկցիաների Մակլորենի վերլուծությունից [5]՝

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

և (2.4)-ից, կստանանք.

$$\begin{aligned} L(\cos t) &= L[t^0] - L\left[\frac{t^2}{2!}\right] + L\left[\frac{t^4}{4!}\right] - \dots = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^7} + \dots = \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) \\ &= \frac{p}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Նման ձևով կարելի է գտնել $\sin t$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխությունը: Այսպիսով.

$$L(\cos t) = \frac{p}{p^2 + 1}, \quad L(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1}: \quad (2.2)$$

3. Ինտեգրալների հաշվումը Լապլասի ձևափոխության կիրառմամբ: Որոշ դեպքերում Լապլասի ձևափոխության կիրառությունը կարող է հանդիսանալ առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալների հաշվման համար այլընտրանքային և բավականին ռացիոնալ մեթոդ: Բերենք մի քանի ինտեգրալների հաշվման օրինակներ:

1. Հաշվել

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin tu}{1+u^2} du \quad (3.1)$$

անիսկական ինտեգրալը [2]:

Լուծում: Այս անիսկական ինտեգրալի արժեքը մասերով ինտեգրման կամ փոփոխականի փոխարինման մեթոդով հաշվելու դեպքում կհանդիպենք դժվարությունների: Քանի որ ընդհանրապես ֆունկցիան ինտեգրելի է Լեբեգի իմաստով, (3.1)-ի արժեքը հաշվելու համար կարելի է օգտվել Լապլասի ձևափոխությունից:

Օգտնելով (2.2) բանաձևերից՝ $\sin tu$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխության համար կունենանք.

$$L(\sin ut) = \frac{u}{u^2 + p^2}:$$

Հետևաբար՝

$$L(u \sin tu) = \frac{u^2}{u^2 + p^2},$$

և (3.1) ինտեգրալի վրա կիրառելով Լապլասի ձևափոխությունը՝, կստանանք.

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^{\infty} \frac{u \sin tu}{1+u^2} du \right] &= \int_0^{\infty} L \left(\frac{u \sin tu}{1+u^2} \right) du = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} L(u \sin tu) du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{u^2}{u^2 + p^2} du \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{p^2}{(p^2 - 1)(u^2 + p^2)} - \frac{1}{(p^2 - 1)(u^2 + 1)} \right) du \\ &= \frac{p}{p^2 - 1} \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg \frac{u}{p} \Big|_0^A - \frac{1}{p^2 - 1} \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg u \Big|_0^A \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2(p + 1)}: \end{aligned}$$

Համաձայն Լապլասի ձևափոխությունների աղյուսակի $\frac{\pi}{2(p+1)}$ -ը հանդիսանում է $\frac{\pi}{2} e^{-t}$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխությունը [2]՝

$$\frac{\pi}{2(p + 1)} = L \left[\frac{\pi}{2} e^{-t} \right]:$$

Հետևաբար՝

$$L \left[\int_0^{\infty} \frac{u \sin tu}{1+u^2} du \right] = L \left[\frac{\pi}{2} e^{-t} \right]:$$

Այսպիսով, (3.1) ինտեգրալի համար կստանանք.

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin tu}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-t}: \quad (3.2)$$

2. Հաշվել

$$\int_0^{\infty} \frac{u^2 \cos tu}{1 + u^2} du \quad (3.3)$$

անիսկական ինտեգրալը:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ

$$L(\cos ut) = \frac{p}{p^2 + u^2},$$

(3.3) ինտեգրալի վրա կիրառենք Լապլասի ձևափոխությունը.

$$\begin{aligned} L\left[\int_0^{\infty} \frac{u^2 \cos tu}{1 + u^2} du\right] &= \int_0^{\infty} L\left[\frac{u^2 \cos tu}{1 + u^2}\right] du = \int_0^{\infty} \frac{u^2 p}{(p^2 + u^2)(1 + u^2)} du \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{p^3}{(p^2 - 1)(p^2 + u^2)} - \frac{p}{(p^2 - 1)(1 + u^2)}\right) du = \\ &= \frac{p^2}{p^2 - 1} \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg \frac{u}{p} \Big|_0^A + \frac{p}{1 - p^2} \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg u \Big|_0^A \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{p^2}{p^2 - 1} + \frac{p}{1 - p^2}\right) = \frac{\pi p}{2(p + 1)}. \end{aligned}$$

Քանի որ

$$\frac{\pi p}{2(p + 1)} = L\left[\frac{\pi}{2}(\delta(t) - e^{-t})\right],$$

որտեղ $\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$ [2], ապա

$$L\left[\int_0^{\infty} \frac{u^2 \cos tu}{1 + u^2} du\right] = L\left[\frac{\pi}{2}(\delta(t) - e^{-t})\right]:$$

Հետևաբար՝

$$\int_0^{\infty} \frac{u^2 \cos tu}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{2}(\delta(t) - e^{-t}): \quad (3.4)$$

Ակնհայտ է, որ այս անիսկական ինտեգրալի արժեքը հաշվելու համար ընտրված է ռացիոնալ մեթոդ:

3. Հաշվել

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ut}{u} du \quad (3.5)$$

անիսկական ինտեգրալը [6]:

Հուժուժ: Այս ինտեգրալի արժեքը կարելի է հաշվել տարբեր մեթոդներով: Օրինակ՝ ինտեգրալը շարքի գումարի տեսքով ներկայացնելու միջոցով, ինտեգրալային գումարների օգնությամբ, ըստ t պարամետրի դիֆերենցելու եղանակով, որպես պարամետրից կախված ինտեգրալ՝ ինտեգրալի նշանի տակ ինտեգրում կատարելով: Սակայն նշված մեթոդները բավականին աշխատատար են:

(3.5) ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ չէ, հետևաբար չի ինտեգրվում Լեբեգի իմաստով: Քանի որ

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin ut}{u}$$

սահմանը գոյություն ունի, ապա դիտարկվող ինտեգրալը Լապլասի ձևափոխության միջոցով կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin ut}{u} du \right] &= L \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin ut}{u} du \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin ut}{u} du \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} L \left[\frac{\sin ut}{u} \right] du = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{p^2 + u^2} du = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2 + u^2} du = \frac{1}{p} \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg \frac{u}{p} \Big|_0^A = \frac{\pi}{2p} \\ &= L \left[\frac{\pi}{2} \right]: \end{aligned}$$

Հետևաբար՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ut}{u} du = \frac{\pi}{2}: \quad (3.6)$$

(3.5) ինտեգրալի արժեքը հաշվելիս կարելի է օգտվել նաև (1.8) բանաձևից.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin ut}{u} du &= \lim_{p \rightarrow 0} \int_p^{\infty} e^{-pt} \frac{\sin ut}{u} du = \lim_{p \rightarrow 0} L \left[\frac{\sin ut}{u} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \int_p^{\infty} L[\sin ut] dq \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \int_p^{\infty} \frac{u}{q^2 + u^2} dq = u \int_0^{\infty} \frac{1}{q^2 + u^2} dq = \frac{\pi}{2}: \end{aligned}$$

Մասնավորապես, $t = 1$ դեպքում ստացվում է

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Դիրիխլեի հայտնի ինտեգրալը [6]:

Համեմատելով (3.5) ինտեգրալի արժեքը հաշվելու այստեղ ներկայացված եղանակը վերը նշված եղանակների հետ՝ կարելի է եզրակացնել, որ այս կերպ կատարված հաշվարկներն ավելի պարզ են և արագ:

Գրականություն

1. **Демидович Б.П.**, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 1968. 472с.
2. **Диткин В.А.**, Прудников А.В., Интегральные преобразования и операционные исчисления. М.; 1961. 524с.
3. **Диткин В.А.**, Обобщенное преобразование Лапласа. Инж-физ. журн. 1. N11. 1958.
4. **Князев П.Н.**, Интегральные преобразования. Едиториал УРСС. 2004.
5. **Фихтенгольц Г.М.**, Основы математического анализа. Том I. 2003. 680с.
6. **Фихтенгольц Г.М.**, Основы математического анализа. Том II. 1970. 800с.
7. **Фихтенгольц Г.М.**, Основы математического анализа. Том III. 1966. 656с.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: