

ՀՏԴ 514.7Մաթեմատիկա*Ռոբերտ ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ**Գորիսի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և ֆիզիկատեխնիկական գիտությունների ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ.**E-mail: rubmus49@gmail.com*

ՄԻՆՈՒՄՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Աշխատանքը վերաբերվում է էվկլիդեսյան երկրաչափության հայտնի սինուսների թեորեմային: Բերված է այդ թեորեմի ապացույցը, երբ տարածության Գաուսյան կորությունը հաստատուն է: Երբ այդ կորությունը հաստատուն դրական է, ապա տարածությունը սֆերայի մակերևույթ է, երբ բացասական է, ապա՝ տարածությունը պսևդոսֆերա է: Ցույց է տրված նաև, որ երբ տարածության կորությունը ձգտում է զրոյի, ապա այդ դեպքերը համընկնում են էվկլիդեսյան դեպքին:

Բանալի բառեր՝ մետրիկա, կորություն, բանաձև, սֆերա, սինուսների թեորեմ

Р. Мусаелян

ТЕОРЕМА СИНУСОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Работа посвящена известной в евклидовой геометрии теореме синусов. Приведена и доказана эта теорема в пространстве с постоянными гауссовыми кривизнами, когда кривизна положительная, то это пространство-поверхность сферы, радиуса R, а когда она отрицательна, то это пространство-псевдосфера. Показано также, что в предельном случае (когда кривизна стремится к нулю) они совпадают с евклидовым случаем.

Ключевые слова: метрика, кривизна, формула, сфера, теорема синусов.

R. Musayelyan

LAW OF SINES IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

The work is devoted to the well-known Law of Sines in Euclidean Geometry. This theorem is presented and proved in a space with constant Gaussian curvatures, when the curvature is positive, then this space is the surface of the sphere of the radius R, and when it is negative, then the space is a pseudo sphere. It was also shown that in the extreme case (when the curvature tends to zero) they coincide with the Euclidean case.

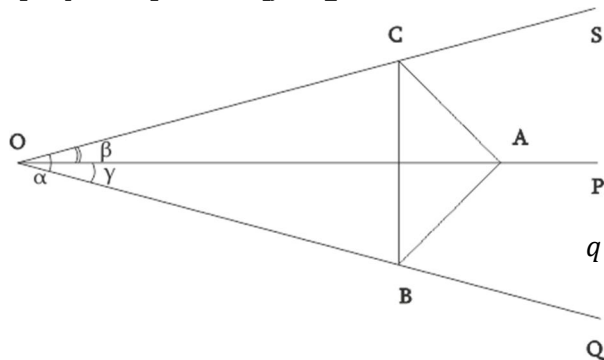
Key words: metric, curvature, formula, sphere, sine proposition.

Դպրոցական երկրաչափությունից հայտնի է սինուսների թեորեման՝

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (1)$$

որտեղ a, b, c -ն եռանկյան կողմերի երկարություններն են, իսկ A, B, C -ն՝ համապատասխանաբար նրանց դիմացի անկյունները:

Դիտարկենք O գագաթով եռանիստ անկյունը.



Եռանիստ անկյան գագաթի հարթ անկյունների համար կատարենք նշանակումներ՝ $\angle(s, q) = \alpha, \angle(s, p) = \beta, \angle(p, q) = \gamma$: Նշանակենք նաև $\angle A$ -ն p կողով, $\angle B$ -ն q կողով և $\angle C$ -ն s կողով երկնիստ անկյունները: Այդ դեպքում սինուսների թեորեման եռանիստ անկյան համար կգրվի այսպես՝

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}. \quad (2)$$

Ընթերցողն այս հավասարության տարրական, պարզագույն ապացույցը կարող է գտնել [1]-ում:

Այժմ ենթադրենք՝ O կենտրոնով սֆերան անցնում է եռանիստի կողերին պատկանող A, B, C կետերով, և թող՝ $OA = OB = OC = R$ սֆերայի շառավիղն է: Եռանիստի նիստերը սֆերայի մակերևույթի հետ հատվում են մեծ շրջանների շրջանագծերի աղեղներով: Այդ աղեղներով կազմված եռանկյունը $\triangle ABC$ -ն, կոչվում է *սֆերիկ եռանկյուն*: Սֆերիկ եռանկյան կողմերն արտահայտող աղեղների երկարությունները նշանակելով a, b, c և օգտագործելով դպրոցից հայտնի բանաձև՝ կստանանք՝ $\alpha = \frac{a}{R}, \beta = \frac{b}{R}$ և $\gamma = \frac{c}{R}$:

Այդպիսի ձևափոխություններից (2) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C}. \quad (3)$$

(3) բանաձևը կոչվում է *սինուսների թեորեմ* R շառավղով սֆերիկ եռանկյան համար:

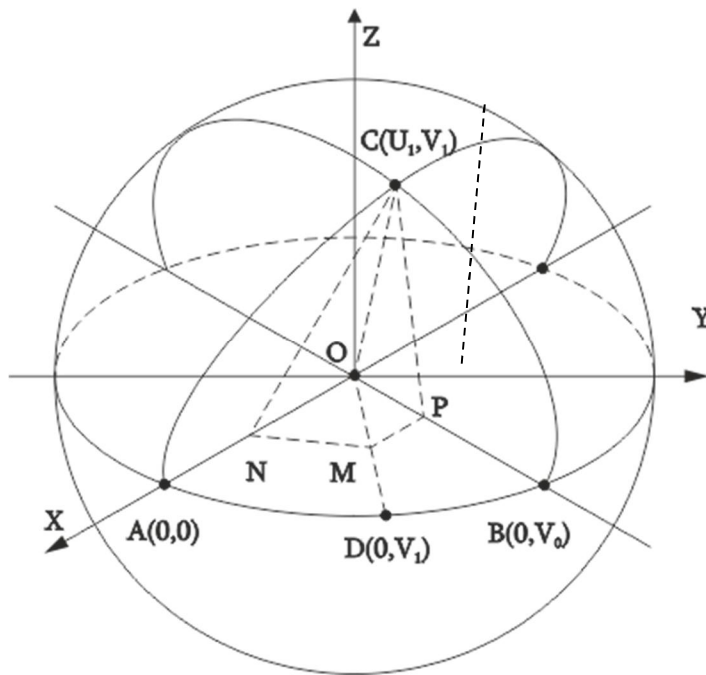
Դիֆերենցիալ երկրաչափության տեսանկյունից էվկլիդյան հարթությունը երկչափ մակերևույթ է, որի գաուսյան կորությունն իր յուրաքանչյուր կետում

հավասար է 0-ի, իսկ R շառավղով սֆերան՝ երկչափ մակերևույթ, որի գաուսյան կորությունն իր յուրաքանչյուր կետում հավասար է $\frac{1}{R^2}$ (տե՛ս [2]-ում):

Այժմ դիֆերենցիալ երկրաչափության մեթոդներով ներկայացնենք (3) բանաձևի այլ ապացույց:

Ապացույց: Դիտարկենք R շառավղով սֆերա և մտցնենք կոորդինատային համակարգ այնպես, որ կենտրոնը համընկնի սֆերայի կենտրոնին: Սֆերայի պարամետրական հավասարումները ներկայացնենք հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \cos v, & y &= R \cos u \sin v, & z &= R \sin u \\ D &= \{(u, v); -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi\}: \end{aligned} \quad (4)$$



Նշենք, որ կոորդինատային համակարգը միշտ կարելի է ընտրել այնպես, որ ABC եռանկյան գագաթները, (u, v) պարամետրերից կախված, լինեն այնպիսին, ինչպիսին գծագրում է: Նշենք նաև, որ u, v կոորդինատներն անվանում են *աշխարհագրական կոորդինատներ՝ երկայնության աստիճան և լայնության աստիճան*: Օրինակ՝ գծագրում $\angle COD = u_1, \angle AOD = v_1$: Պարզագույն հաշվարկով կստանանք՝

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \{-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u\} \\ \vec{r}_v &= \{-R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, 0\} \\ E = \vec{r}_u^2 &= R^2, F = \vec{r}_u \vec{r}_v = 0, G = R^2 \cos^2 u: \end{aligned}$$

Ուրեմն՝ (4) բանաձևերով տրված մակերևույթի (սֆերայի) առաջին քառակուսային ձևը կլինի՝

$$dS^2 = R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot dv^2: \quad (5)$$

Օգտագործելով միայն մակերևույթի I քառակուսային ձևը՝ կարելի է հաշվել կորի աղեղի երկարությունը, մակերևույթի կորերի կազմած անկյունը, մակերևույթի գաուսյան կորությունը իր յուրաքանչյուր կետում և այլն (տե՛ս [2]): ABC եռանկյան կողմերը՝ որպես տվյալ մակերևույթի (մեր դեպքում՝ սֆերայի) գեոդեզիական գծեր, ուղղի հատվածի դեր ունեն: Պատկերավոր ասած՝ գեոդեզիական գծերը նրանք են, որոնց յուրաքանչյուր կետում մակերևույթի (մեր դեպքում՝ սֆերայի) շոշափող հարթության վրա նրանց օրթոգոնալ պրոյեկցիան ուղիղ է (ուղղի հատված է):

AOC և XOY հարթությունների կազմած անկյունը՝ $\angle CNM$ -ն է, իսկ OPC և XOY -ինը՝ $\angle MPC$ -ն: Կստանանք՝

$$tg\angle CNM = \frac{CM}{NM} = \frac{R \sin u}{R \cos u \cdot \sin v} = \frac{tgu}{\sin v} = c = const:$$

Այս հավասարությունից կստանանք AC գծի հավասարումը՝

$$v = \arcsin\left(\frac{1}{c} tgu\right): \quad (6)$$

Ճիշտ նույն ձևով կստանանք BC գծի հավասարումը՝

$$v = \pm \arcsin\left(\frac{1}{c_1} tgu\right) + v_0, \quad (7)$$

որտեղ $c_1 = const = tg\angle MPC$:

Այժմ անդրադառնալով մետրիկային (այսինքն՝ (5) բանաձևին)՝ գտնենք AC -ի երկարությունը.

$$\begin{aligned} S_{\cup AC} &= \int_0^{u_1} \sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot \frac{du^2}{\cos^4 u (\sqrt{c^2 - tg^2 u})^2}} = \\ &= \dots = R \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + c^2}}{c} \cdot \sin u_1\right): \end{aligned} \quad (8)$$

Ճիշտ նույն ձևով կգտնենք BC աղեղի երկարությունը.

$$\begin{aligned} S_{\cup BC} &= \int_0^{u_1} \sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot \frac{du^2}{\cos^4 u (\sqrt{c_1^2 - tg^2 u})^2}} = \\ &= \dots = R \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + c_1^2}}{c_1} \cdot \sin u_1\right): \end{aligned} \quad (9)$$

Ինչ վերաբերում է AB աղեղին, ապա (5) բանաձևից կստանանք՝

$$S_{\cup AB} = \int_0^{v_0} \sqrt{0 + R^2 \cos^2 0} dv = Rv_0: \quad (10)$$

(6) և (7) բանաձևերից կստանանք՝

$$v_0 = \arcsin\left(\frac{1}{c} tgu_1\right) \mp \arcsin\left(\frac{1}{c_1} tgu_1\right):$$

Հաշվի առնելով, որ հետագայում մեզ պետք է լինելու $\sin v_0$ -ն, հաշվենք այն՝

$$\begin{aligned}\sin v_0 &= \sin \left(\arcsin \left(\frac{1}{c} t g u_1 \right) \mp \arcsin \left(\frac{1}{c_1} t g u_1 \right) \right) = \\ &= \dots = \frac{1}{c \cdot c_1} t g u_1 (\sqrt{\omega_1} \mp \sqrt{\omega}),\end{aligned}\quad (11)$$

որտեղ կատարված են նշանակումներ՝ $c_1^2 - t g^2 u_1 = \omega_1$ և $c^2 - t g^2 u_1 = \omega$:

Այժմ անդրադառնանք մակերևույթի ներքին երկրաչափության մեկ այլ հարցին՝ եռանկյան անկյունների գտնելուն: Երբ կոորդինատային համակարգն օրթոգոնալ է (ինչպես մեր դեպքում է), ապա մակերևույթի գծերի կազմած անկյան կոսինուսը որոշվում է.

$$\cos \varphi = \frac{E(u, v) du \delta u + G(u, v) dv \delta v}{\sqrt{E(u, v) du^2 + G(u, v) dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + G \delta v^2}}$$

բանաձևով (տե՛ս [2]), որտեղ E , G -ն առաջին քառակուսային ձևի գործակիցներ են: Օգտվելով այս բանաձևից, (6) և (7) բանաձևերից, որպես CA և CB գծերի հավասարումներից՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned}\cos(CA^{\wedge}CD) &= \frac{R^2 du \delta u + R^2 \cos^2 u_1 dv \delta v}{\sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u_1 \cdot dv^2} \sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u_1 \cdot \delta v^2}} = \\ &= \dots = \frac{1 \mp \sqrt{\omega_1} \cdot \sqrt{\omega} \cdot \cos^2 u_1}{\sqrt{1 + \omega \cdot \cos^2 u_1} \sqrt{1 + \omega_1 \cdot \cos^2 u_1}}.\end{aligned}$$

Դժվար չէ այժմ հաշվել նշված անկյան սինուսը: Այն կլինի՝

$$\begin{aligned}\sin(CA^{\wedge}CD) &= \sqrt{1 - \left(\frac{1 \mp \sqrt{\omega_1} \cdot \sqrt{\omega} \cdot \cos^2 u_1}{\sqrt{1 + \omega \cdot \cos^2 u_1} \sqrt{1 + \omega_1 \cdot \cos^2 u_1}} \right)^2} = \\ &= \dots = \frac{\sqrt{\omega_1} \mp \sqrt{\omega}}{\cos u_1 \sqrt{1 + c_1^2} \sqrt{1 + c^2}} = \sin C:\end{aligned}\quad (12)$$

Ճիշտ նույն դատողություններով ABC եռանկյան անկյան համար կստանանք՝

$$\begin{aligned}\cos(AC^{\wedge}AB) &= \frac{R^2 du \delta u + R^2 \cos^2 u \frac{du \delta v}{\cos^2 u \sqrt{\omega}}}{\sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot \frac{du^2}{\cos^2 u (\sqrt{\omega})^2}} \sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot \delta v^2}} = \\ &= \dots = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}:\end{aligned}$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք այն փաստից, որ անկյան զագաթը գտնվում է $A(0,0)$ կետում: Ուրեմն՝

$$\sin(AC^{\wedge}AB) = \sin A = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}:\quad (13)$$

Վարվելով ինչպես նախորդ դեպքում՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned}\cos(BC^{\wedge}BA) &= \frac{R^2 du \delta u + R^2 \cos^2 u \frac{du \delta v}{\cos^2 u \sqrt{\omega_1}}}{\sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot \frac{du^2}{\cos^2 u \sqrt{\omega_1}}} \sqrt{R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u \cdot \delta v^2}} =\end{aligned}$$

$$= \dots = \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2}}:$$

Այժմ դժվար չէ հաշվել այդ նույն անկյան սինուսը: Այն կլինի՝

$$\sin(BC^{\wedge}BA) = \sin B = \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} \quad (14)$$

Հիմա ավարտին հասցնենք (3) բանաձևի ապացույցը: Նախ՝ օգտվելով (9) և (13) բանաձևերից՝ կստանանք՝

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{1+C_1^2}}{C_1} \cdot \sin u_1}{\frac{C}{\sqrt{1+C^2}}} = \frac{\sqrt{1+C_1^2} \cdot \sqrt{1+C^2}}{C \cdot C_1} \cdot \sin u_1:$$

Ճիշտ նույն ձևով (8) և (14) բանաձևերից կստանանք՝

$$\frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{1+C^2}}{C} \cdot \sin u_1}{\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}} = \frac{\sqrt{1+C^2} \cdot \sqrt{1+C_1^2}}{C \cdot C_1} \cdot \sin u_1:$$

Այնուհետև օգտագործելով (10, (11)) և (12) բանաձևերը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C} &= \frac{1}{c \cdot c_1} \cdot \operatorname{tg} u_1(\sqrt{\omega_1} \mp \sqrt{\omega}) \cdot \frac{\cos u_1 \cdot \sqrt{1+c_1^2} \cdot \sqrt{1+c^2}}{\sqrt{\omega_1} \mp \sqrt{\omega}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+c_1^2} \cdot \sqrt{1+c^2}}{c \cdot c_1} \cdot \sin u_1: \end{aligned}$$

Այսպիսով, սֆերիկ եռանկյան համար սինուսների թեորեմի ապացույցը դիֆերենցիալ երկարաչափության կիրառմամբ ավարտվեց:

Այժմ ենթադրենք իրական, R շառավղով սֆերայի փոխարեն դիտարկվում է կեղծ սֆերա, որի շառավիղը ki է, որտեղ $i = \sqrt{-1}$: Եթե R շառավղով սֆերայի կորությունը $\frac{1}{R^2}$ է, ապա կեղծ սֆերայի կորությունը կլինի՝ $\frac{1}{(ki)^2} = -\frac{1}{k^2}$, որն էլ կոչվում է *հիպերբոլական հարթության* (այլ կերպ ասած՝ Լոբաչևսկու հարթության) *գաուսյան կորություն*: Եթե անդրադառնալու լինենք կոմպլեքս փոփոխականով անալիզում լայն կիրառություն ունեցող հայտնի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների և բնական հիմքով ցուցչային ֆունկցիայի կապին, ապա կստանանք՝

$$\sin \frac{\lambda}{ik} = \frac{1}{i} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{k}: \quad (15)$$

Դժվար չէ հասկանալ, որ եռանկյունաչափական և հիպերբոլական ֆունկցիաների կապն արտահայտող (15) բանաձևի կիրառությամբ (3) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} \frac{c}{k}}{\sin C}: \quad (16)$$

(16) բանաձևը սինուսների թեորեմն է Լոբաչևսկու հարթությունում գտնվող եռանկյան համար, ընդ որում՝ a, b, c -ն այդ գեոդեզիկ եռանկյան կողմերն են, իսկ A, B, C -ն՝ եռանկյան անկյունները:

Հարց է ծագում՝ կա՞րողոք կապ (3) և (1) կամ (16) և (1) բանաձևերի միջև, մեկից կարելի՞ է ստանալ մյուսը: Պարզվում է, որ (1) բանաձևը կարելի է ստանալ, օրինակ, (3) բանաձևից նրանում անցնելով սահմանի, երբ սֆերայի R շառավիղը ձգտում է անվերջության՝ $R \rightarrow \infty$ (կամ որ նույնն է, երբ սֆերայի գաուսյան կորությունը ձգտում է զրոյի): Դրա համար դիտարկենք $\sin x$ ֆունկցիայի Մակլորանի շարքը ([3]).

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots :$$

Օգտվելով սինուսների նշված շարքից՝ (3) բանաձևը կգրվի այսպես՝

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{a}{R} - \frac{a^3}{3!R^3} + \frac{a^5}{5!R^5} - \frac{a^7}{7!R^7} + \dots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n+1}} + \dots}{\sin A} = \\ & = \frac{\frac{b}{R} - \frac{b^3}{3!R^3} + \frac{b^5}{5!R^5} - \frac{b^7}{7!R^7} + \dots + (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n+1}} + \dots}{\sin B} = \\ & = \frac{\frac{c}{R} - \frac{c^3}{3!R^3} + \frac{c^5}{5!R^5} - \frac{c^7}{7!R^7} + \dots + (-1)^n \frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n+1}} + \dots}{\sin C}; \end{aligned}$$

Այս հավասարումները հեշտությամբ ձևափոխվում են հետևյալին՝

$$\begin{aligned} & \frac{a - \frac{a^3}{3!R^2} + \frac{a^5}{5!R^4} - \dots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n}} + \dots}{\sin A} = \\ & = \frac{b - \frac{b^3}{3!R^2} + \frac{b^5}{5!R^4} - \dots + (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n}} + \dots}{\sin B} = \\ & = \frac{c - \frac{c^3}{3!R^2} + \frac{c^5}{5!R^4} - \dots + (-1)^n \frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n}} + \dots}{\sin C}; \end{aligned} \quad (17)$$

Հաստատուն a, b, c -ի դեպքում (17) բանաձևը, երբ $R \rightarrow \infty$, կվերափոխվի (1) բանաձևի: Այսպիսով, Էվկլիդյան հարթությունում (1) բանաձևը կարելի է դիտել որպես Էլիպտիկ հարթությունում (սֆերայի վրա) (3) բանաձևի սահմանային դիրք, երբ Էլիպտիկ հարթության կորությունը ձգտում է զրոյի:

Դժվար չէ նման դատողություններ տարածել նաև հիպերբոլիկ հարթության դեպքում: Դրա համար բավական է գրել $\sinh$ ֆունկցիայի Մակլորանի շարքը, և պարզ կդառնա, որ երբ հիպերբոլական հարթության գաուսյան կորությունն անսահմանափակորեն աճում է (մնալով բացասական), ապա (16) բանաձևը կվերափոխվի (1) բանաձևի:

Գրականություն

1. Погорелов А.В., Геометрия, М., <<Наука>> 1983.
2. Поздняк Э.Г., Шикин Е.В., Дифференциальная геометрия, первое знакомство. Изд. МГУ 1990.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, часть II, М. <<Наука>>, 1973.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական
խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: