

УДК 512

Математика

Георгий СААКЯН

к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ

E-mail: ter_saak_george@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Գ.Հ. Սահակյան

**ՄԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱՏՐԻՑՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ԵՌԱԶՍԳԻՆ ՀԱՍՄԱՆԵՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ
ՈՐՈՇ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ**

Հոդվածում ամբողջ թվային առանցքի վրա անընդհատ գործակիցներով սիմետրիկ մատրիցով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար դիտարկվում են լուծումների որոշ հատկություններ:

Բանալի բառեր` դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, սիմետրիկ մատրից:

В работе рассматриваются свойства решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с симметрической матрицей непрерывных на всей числовой прямой коэффициентов.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, симметрическая матрица.

G. H. Sahakyan

**ON SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A THREE-
DIMENSIONAL LINEAR HOMOGENEOUS SYSTEM OF
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SYMMETRIC MATRIX**

The paper considers the some properties of solutions of a linear homogeneous system of differential equations with a symmetric matrix of continuous on the whole numerical line coefficients.

Key words: system of differential equations, symmetric matrix.

Рассматривается следующая трехмерная линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с симметрической матрицей непрерывных на всей числовой прямой коэффициентов (см., например, [1], [2])

$$y' = A(t)y, (1a)$$

где

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\}, \quad a_{ij}(t) = a_{ji}(t), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad y = y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Для удобства изложения прежде всего остановимся на случае с постоянными коэффициентами. Применив преобразование, описанное в статье [3], мы приходим к системе, в которой элементы главной диагонали будут равны нулю. В связи с этим, не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}. \quad (1b)$$

Непосредственным вычислением нетрудно найти, что характеристический многочлен для матрицы A можно представить в виде

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\lambda + 2abc. \quad (2)$$

1. Предположим сначала, что характеристический многочлен имеет три разных корня λ_1, λ_2 и λ_3 . Известно, что симметрическая матрица имеет только вещественные собственные значения (см. [4], стр. 57), и, следовательно, все три корня будут действительными числами.

Из соотношения (2), согласно теореме Виетта, мы будем иметь

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad (3a)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -(a^2 + b^2 + c^2), \quad (3b)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2abc. \quad (3c)$$

2. Предположим теперь, что характеристический многочлен имеет двукратный корень: $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда будем иметь

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_3). \quad (5a)$$

Приравняв правые части равенств (2) и (5a), получим

$$(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - 2abc. \quad (5b)$$

Упростив левую часть этого равенства будем иметь

$$\lambda^3 - (2\lambda_1 + \lambda_3)\lambda^2 + \lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_3)\lambda - \lambda_1^2\lambda_3 = \lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - 2abc.$$

Далее, приравняв в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях λ слева и справа, найдем, что

$$\lambda_3 = -2\lambda_1,$$

при этом характеристическое уравнение (5a) примет вид:

$$\lambda^3 - 3\lambda\lambda_1^2 + 2\lambda_1^3 = 0. \quad (5c)$$

Из соотношений (3b) и (3c) найдем, что при этом будем иметь

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 3\lambda_1^2, \\ abc = -\lambda_1^3. \end{cases}$$

Отсюда найдем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\sqrt[3]{abc}, \quad \lambda_3 = 2\sqrt[3]{abc}, \quad (6)$$

при условии

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\sqrt[3]{(abc)^2}. \quad (7)$$

Учитывая следующие очевидные неравенства

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

и равенство (7), мы найдем, что соотношение (7) будет иметь место только при $a = b = c$.

В этом случае, согласно формулам (6), будем иметь: $\lambda_{1,2} = -a$, $\lambda_3 = 2a$. Таким образом доказана следующая

Теорема. *Характеристический многочлен (2) будет иметь двукратный корень при $a = b = c$, причем в этом случае корнями характеристического многочлена будут числа*

$$\lambda_{1,2} = -a, \quad \lambda_3 = 2a. \quad (8)$$

Рассматриваемая система в этом случае запишется в виде

$$\begin{cases} y_1' = a(y_2 + y_3), \\ y_2' = a(y_1 + y_3), \\ y_3' = a(y_1 + y_2). \end{cases} \quad (9)$$

Для ее решения сложим все равенства системы. Получим

$$(y_1 + y_2 + y_3)' = 2a(y_1 + y_2 + y_3). \quad (10)$$

Обозначим

$$u(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t). \quad (11)$$

Тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$u' = 2au,$$

проинтегрировав которое, получим

$$u(t) = Ce^{2at},$$

где C – произвольная постоянная. Подставив значение $u(t)$, в соотношение (11), будем иметь

$$y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = Ce^{2at},$$

откуда

$$y_2(t) + y_3(t) = Ce^{2at} - y_1(t). \quad (12)$$

С учетом (12) первое уравнение системы (9) запишем в виде

$$y_1' = a(Ce^{2at} - y_1).$$

Решив это линейное неоднородное уравнение 1-ой степени одним из известных нам методов, нетрудно найти, что

$$y_1(t) = C_1 e^{2at} + C_2 e^{-at}, \quad (13a)$$

где $C_1 = C/3$. Далее, учитывая, что

$$y_2' - y_1' = -a(y_2 - y_1),$$

нетрудно найти, что

$$y_2(t) = e^{2at} + C_3 e^{-at}. \quad (13b)$$

И, наконец, из (11), с учетом (13a) и (13b), получим

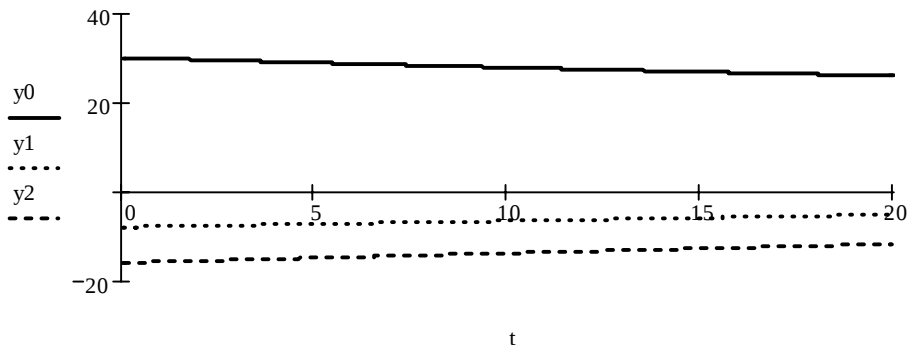
$$y_3(t) = C_1 e^{2at} - (C_2 + C_3) e^{-at}, \quad (13c)$$

где C_1, C_2 и C_3 – произвольные постоянные. Из формул (13a)-(13c) можно определить при каких значениях t все три компоненты будут возрастать. Например, при $C_1, C_2 > 0$, $C_2 + C_3 < 0$ и $a > 0$ нетрудно найти, что все три компоненты будут возрастать при следующих значениях t :

$$t > \frac{1}{3a} \max \left(\ln \frac{C_2}{2C_1}, \ln \frac{-(C_2 + C_3)}{2C_1} \right).$$

Ниже приводится графическая интерпретация частного решения системы (9) на отрезке

$[0, 20]$ при следующих значениях: $a = b = c = 0.01$, $C_1 = 2$, $C_2 = 28$, $C_3 = -10$ и начальных условиях $y_1(0) = 30$, $y_2(0) = -8$, $y_3(0) = -16$.



Заметим, что при $C_1 = 0$ будем иметь $y_3(t) = -(y_1(t) + y_2(t))$, при $C_2 = C_3$ будем иметь $y_1(t) = y_2(t)$, а при $C_2 = C_3 = 0$ получим

$$y_1(t) = y_3(t) = y_3(t).$$

Аналогично вышеприведенным рассуждениям можно показать, что в случае, когда в системе (9) $a = a(t)$, то мы будем иметь

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 e^{2\varphi(t)} + C_2 e^{-\varphi(t)}, \\ y_2(t) &= C_1 e^{2\varphi(t)} + C_3 e^{-\varphi(t)}, \\ y_3(t) &= C_1 e^{2\varphi(t)} - (C_2 + C_3) e^{-\varphi(t)}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные, а $\varphi(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$, где t_0 — произвольная точка числовой оси.

Заметим, что в рассматриваемом случае характеристический многочлен не может иметь трехкратный корень, так как если предположить, что это имеет место, то из (5b) и (5c) найдем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, и $a = b = c = 0$ (рассматриваемая система тривиальна).

Предположим теперь, что система (1) имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = a_1(t)y_2 + a_2(t)y_3, \\ y_2' = a_1(t)y_1 + a_3(t)y_3, \\ y_3' = a_2(t)y_1 + a_3(t)y_2. \end{cases} \quad (14)$$

Умножив первое уравнение системы на y_1 , второе — на y_2 , третье — на y_3 , а затем, сложив полученные, придем к следующему уравнению

$$(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)' = \frac{1}{4} (a_1(t)y_1y_2 + a_2(t)y_1y_3 + a_3(t)y_2y_3).$$

Далее, воспользовавшись очевидным неравенством $x(t)y(t) \leq \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t))$, будем иметь

$$|(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)'| = 2|(a_1(t)y_1y_2 + a_2(t)y_1y_3 + a_3(t)y_2y_3)| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(a_1(t)|(y_1^2 + y_2^2) + |a_2(t)|(y_1^2 + y_3^2) + |a_3(t)|(y_2^2 + y_3^2))| \leq \\
&\leq |(a_1(t)|(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + |a_2(t)|(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + |a_3(t)|(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2))| \leq \\
&\leq (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(|a_1(t)| + |a_2(t)| + |a_3(t)|) \\
&= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \sum_{i=1}^3 |a_i(t)|.
\end{aligned} \tag{15}$$

Введем обозначение

$$u(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t) + y_3^2(t), \tag{16}$$

тогда неравенство (15) запишется в виде

$$|u'(t)| \leq \sum_{i=1}^3 |a_i(t)| u(t).$$

Отсюдабудемиметь

$$u'(t) \leq \sum_{i=1}^3 |a_i(t)| u(t)$$

или

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \leq \sum_{i=1}^3 |a_i(t)|.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах от t_0 до t , получим

$$u(t) \leq u(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^3 |a_i(\tau)| d\tau \right). \tag{17}$$

Такимобразомимеет место

Теорема 2. Сумма квадратов компонент всякого решения системы (14) $u(t)$ удовлетворяет неравенству (17).

Լիտերатура

1. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
3. Саакян Г.Г., О нулях компонент решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Сборник трудов IV Международной конференции «Математика. Образование. Культура», Тольятти, Часть 1, 2009, стр. 32-35.
4. Беллман Р., Введение в теорию матриц. М.: Физматлит, 2004. 351 с.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրՊՀ
մաթեմատիկայի ամբիոնը: