

ՀՏԴ 371.31:51, 378.147:51

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Ռաֆիկ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ֆ.մ.գ.դ.

Սեյրան ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Ֆ.մ.գ.դ.

ԵՊՀ թվային անալիզի և մաթ. մոդելավորման ամբիոն

E-mail: khrafik@ysu.am, seyran.stepanyan@ysu.am

ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄԻ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ԵՎ

ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Էքստրեմումի խնդիրների տեսության մեջ կարևոր դեր են խաղում մինիմումի և մաքսիմումի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնք նկարագրում են խնդրի օպտիմալ լուծումների բազմության կառուցվածքը: Հոդվածում շարադրվում են Ֆերմայի սկզբունքը և Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը: Կոնկրետ օրինակներով լուսաբանվում և ուսուցանվում են դրանք: Տրվում են նաև երկրորդ կարգի բավարար պայմաններ պայմանական և ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների համար:

Բանալի բառեր՝ ֆունկցիայի գրադիենտ, լոկալ և գլոբալ էքստրեմումներ, հեսիան, գլխավոր միներ, Լագրանժի անորոշ գործակիցներ, էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման:

Р. ХАЧАТРЯН, С. СТЕПАНЯН

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА

В теории экстремальных задач важную роль играют необходимые и достаточные условия минимума и максимума функций. Именно эти условия позволяют предсказать общую структуру оптимальных решений. В статье описывается принцип Ферма и метод неопределенных коэффициентов Лагранжа.

Они иллюстрированы на конкретных примерах. Также приведены достаточные условия второго порядка для условных и безусловных задач оптимизации.

Ключевые слова: градиент функции, локальные и глобальные экстремумы, матрица Гессе, главный минор, неопределенные коэффициенты Лагранжа, необходимое условие экстремума.

R. KHACHATRYAN, S. STEPANYAN

ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF THE EXTREMUM.

The extremum necessary conditions play an important role in the theory of extremal problems. These conditions describes the general structure of optimal solutions. This article describes Fermat's principle and the method of undefined Lagrange coefficients. They are illustrated with specific examples. Second order conditions for conditional and unconditional optimization problems are also given.

Key words: function gradient, local and global extremum, Hessian matrix, major minor, undefined Lagrange coefficients, the necessary condition of extremum.

1. Նախաբան

Մինիմումի և մաքսիմումի խնդիրները մաթեմատիկայի պատմության ամբողջ ընթացքում կարևոր դեր են խաղացել այդ գիտության զարգացման պրոցեսում: Այդ ընթացքում առաջացել են բազմաթիվ կարևոր, գեղեցիկ և հետաքրքիր էքստրեմումի խնդիրներ ֆիզիկայում, երկրաչափությունում, մեխանիկայում և գիտության այլ բնագավառներում: Այդ կոնկրետ խնդիրների լուծմանը մասնակից են եղել հանրահայտ և խոշորագույն մաթեմատիկոսներ, ինչպիսիք են՝ Էվկլիդեսը, Բեռնուլիին, Նյուտոնը և շատ ուրիշներ: Այդ խնդիրների ուսումնասիրությունը նպաստել է տեսության զարգացմանը և էքստրեմումի խնդիրների լուծման միասնական եղանակների ստեղծմանը:

Առաջին ընդհանուր սկզբունքը, որով առաջարկվեց ուսումնասիրել մինիմումի և մաքսիմումի խնդիրները, Ֆերմայի սկզբունքն է (1630թ.): Ժամանակակից լեզվով այդ սկզբունքն այն է, որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը պետք է փնտրել այն կետերում, որտեղ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի: Այդ արդյունքը այժմ մտնում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում որպես Ֆերմայի թեորեմ:

Այնուհետև Լայբնիցի մի աշխատանքում, որը կոչվում էր *մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոշման նոր մեթոդ*, տրվեց մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների էքստրեմումների որոշման ընդհանուր եղանակ, երբ խնդրում չեն մասնակցում սահմանափակումներ:

Հետագայում՝ 18-րդ դարում, Էյլերի և Լագրանժի կողմից մշակվեց մի մեթոդ, որով սահմանափակումներով էքստրեմումի խնդիրները բերվում են առանց

սահմանափակումների մի ուրիշ խնդրի: Ժամանակակից գրականության մեջ դա կոչվում է *Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդ*: Ֆերմայի և Լագրանժի այս սկզբունքները օպտիմիզացիայի թվային մեթոդների անկյունաքարեր են: Այդ պատճառով այս մեթոդները ներառվել են *օպտիմիզացիայի մեթոդներ* առարկայի համալսարանական ծրագրում:

Քանի որ այս սկզբունքներում օգտագործվում են ֆունկցիաների միայն առաջին կարգի ածանցյալները, ապա դրանք դասվում են էքստրեմումի առաջին կարգի մեթոդների շարքին:

Ելնելով սրանց կարևորությունից՝ հոդվածում տրվում են այս մեթոդների ժամանակակից ձևակերպումները, և կոնկրետ օրինակներով մեկնաբանվում դրանք: Օրինակներն ընտրված են այնպես, որ նրանց լուծման ընթացքում ավելի խորը և բազմակողմանի լուսաբանվեն էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի պայմանները: Մեթոդական և ուսուցման տեսակետից ընտրված են ինչպես հեշտ, այնպես էլ միջին դժվարության օրինակներ:

Հոդվածում տրվում են նաև պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծման ընդհանուր ալգորիթմներ՝ հավասարության և անհավասարության տիպի որոշ դասերի խնդիրների լուծման համար:

Նշենք նաև, որ ընտրված խնդիրները տիպական են, և հետևաբար նրանց լուծման մեթոդիկան օգտակար կլինի բոլոր նրանց, ովքեր առնչվում են օպտիմիզացիայի պրակտիկ խնդիրների հետ:

2. Էքստրեմումի գոյության պայմանները

Օպտիմիզացիայի խնդիրների ընդհանուր դրվածքը հետևյալն է: Տրված է որոշ M բազմություն և նրա վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիա: Պահանջվում է գտնել այդ ֆունկցիայի մինիմումի կամ մաքսիմումի կետերը տրված բազմության վրա:

Այդ խնդիրը գրվում է հետևյալ կերպ.

$$f(x) \rightarrow \min(\max), x \in M:$$

Այստեղ $f(x)$ -ը կոչվում է նպատակային ֆունկցիա, իսկ M -ը՝ թույլատրելի բազմություն:

Դիցուք տրված է $f(x)$ ֆունկցիան R^n -ի վրա, և M -ը ենթաբազմություն է R^n -ից:

Սահմանում 1: $x^* \in M$ կետը կանվանենք.

1) f -ի գլոբալ մինիմումի (գլոբալ մաքսիմումի) կետ M բազմության վրա, եթե

$$f(x) \geq f(x^*) \text{ (} f(x) \leq f(x^*) \text{)} \forall x \in M:$$

2) f -ի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ M բազմության վրա, եթե գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի V շրջակայք, որ

$$f(x) \geq f(x^*) \text{ (} f(x) \leq f(x^*) \text{)} \forall x \in M \cap V:$$

Ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի կետերը կոչվում են *էքստրեմումի կետեր*:

Էքստրեմումի խնդիրների լուծման գոյության հարցերում սկզբունքային դեր ունի հետևյալ պնդումը, որը գրականության մեջ հայտնի է որպես *Վայերշտրասի թեորեմ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ ընդունելու վերաբերյալ* ([1], էջ 25):

Թեորեմ 1: Եթե $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $X \subset R^n$ փակ սահմանափակ բազմության վրա, ապա այն հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին այդ բազմության վրա:

Այսինքն՝ գոյություն ունեն այնպիսի $x', x'' \in X$, որ

$$f(x') \leq f(x) \leq f(x'') \quad \forall x \in X:$$

Օրինակ 1: Պարզել, թե a և b պարամետրերի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում

$$f(x, y) = x + ay$$

ֆունկցիան հասնում է իր մինիմում արժեքին

$$X = \{(x, y) \mid R^2/bx^2 - 2xy + y^2 \leq 0, b > 1\}$$

բազմության վրա:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան անընդհատ է a -ի կամայական արժեքի դեպքում: Քանի որ

$$X = \{(x, y) \mid (b-1)x^2 + (x-y)^2 \leq 1\}$$

բազմությունը $b > 1$ դեպքում էլիպս է, հետևաբար ըստ Վայերշտրասի թեորեմի՝ f ֆունկցիան հասնում է իր փոքրագույն արժեքին X -ի վրա:

Հետևանք 1: Դիցուք $f(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է՝ որոշված R^n -ի վրա, և տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad \|x\| \rightarrow +\infty:$$

Այդ դեպքում նա հասնում է իր փոքրագույն արժեքին կամայական $X \subset R^n$ փակ բազմության վրա:

3. Էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի մեթոդներ

Միաչափ դեպք: Դիտարկենք հետյալ խնդիրը՝

$$f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad x \in X,$$

որտեղ X -ը միջակայք է (բաց կամ փակ կամ կիսաբաց) թվային առանցքի վրա:

Էքստրեմումի խնդիրների տեսության մեջ առանցքային դեր ունի հետևյալ թեորեմը, որը առաջին կարգի անհրաժեշտ պայման է դիֆերենցելի ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի կետերը բնորոշելու համար: Գրականության մեջ դա հայտնի է որպես *Ֆերմայի թեորեմ* ([2], էջ 167):

Թեորեմ 2: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և դիֆերենցելի է X միջակայքի վրա, և այդ միջակայքի ներքին x^* կետը ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է: Այդ դեպքում

$$f'(x^*) = 0:$$

Ելնելով այս կարևոր պնդումից՝ ձևակերպենք ֆունկցիայի **վերին և ստորին եզրերի որոշման հետևյալ կանոնը X բազմության վրա:**

• Գտնում ենք ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը, որոնք ընկած են նշված միջակայքի վրա:

• Հաշվում ենք ֆունկցիայի սահմանները միջակայքի եզրերում:

• Այնուհետև պետք է հաշվել $f(x)$ -ի արժեքները նշված ստացիոնար կետերում և համեմատել այդ թվերը ֆունկցիայի սահմանային արժեքների հետ եզրերում:

Այդ թվերից փոքրագույնը(մեծագույնը) կլինի ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին (վերին) եզրը X բազմության վրա:

Օրինակ 1: Գտնել $f(x) = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$ ֆունկցիայի վերին և ստորին ճշգրիտ եզրը, ինչպես նաև մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, եթե դրանք գոյություն ունեն $X = \mathbb{R}$ բազմության վրա:

Ունենք

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x^2 - 1)^{2/3} - x^{4/3}}{x^{1/3} (x^2 - 1)^{2/3}}:$$

Այստեղից կստանանք, որ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ կետերը ստացիոնար են:

Ակնհայտ է նաև, որ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

Այսպիսով, $\max f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$: Ֆունկցիան չունի փոքրագույն արժեք, իսկ $\inf f(x) = 0$:

Օրինակ 2. Դիցուք տրված են $A(0, a)$ և $B(d, b)$ երկու կետեր Ox առանցքի միննույն կողմում: Պահանջվում է գտնել այդ ուղղի վրա այնպիսի $D(x, 0)$ կետ, որ AD և DB հատվածների գումարը լինի մինիմում: Այս խնդիրը դրվել է Հերոնի կողմից:

Այս խնդրի ֆորմալ մաթեմատիկական ձևակերպումը ունի հետյալ տեսքը՝

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \rightarrow \min, x \in R:$$

Ունենք

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}:$$

Այստեղից, քանի որ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

ապա խնդիրը ունի միակ լուծում, և այն $f'(x) = 0$ հավասարման արմատն է:

Բազմաչափ դեպք:

Դիցուք $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n փոփոխականի ֆունկցիա է՝ որոշված R^n էվկլիդեսյան տարածության վրա: Եթե f ֆունկցիան ըստ բոլոր փոփոխականների ունի մասնակի ածանցյալներ $x \in R^n$ կետում, ապա նրա գրադիենտը այդ կետում նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$f'(x) = (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x)):$$

Մահմանում 2: Դիցուք $f(x)$ -ը երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է $x \in R^n$ կետում: Հետևյալ սիմետրիկ մատրիցը կոչվում է *հեսիան*՝

$$H(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(x), f''_{x_1 x_2}(x), \dots, f''_{x_1 x_n}(x) \\ f''_{x_2 x_1}(x), f''_{x_2 x_2}(x), \dots, f''_{x_2 x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1}(x), f''_{x_n x_2}(x), \dots, f''_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}:$$

Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

կամայական մատրից է:

Սահմանում 3: A մատրիցի k -րդ կարգի գլխավոր մինոր կոչվում է $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ համարներով տողերի և այդ նույն համարներով սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերից կազմված որոշիչը:

Սահմանում 4: $A(n \times n)$ սիմետրիկ մատրիցը կոչվում է $\bullet$ դրական որոշյալ ($A > 0$), եթե $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$,

$\bullet$ դրական կիսաորոշյալ ($A \geq 0$), եթե $(Ax, x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

$\bullet$ բացասական որոշյալ ($A < 0$), եթե $(Ax, x) < 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$,

$\bullet$ բացասական կիսաորոշյալ ($A \leq 0$), եթե $(Ax, x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$:

Կարևոր կիրառական նշանակություն ունի հետևյալ պնդումը ([4]):

Թեորեմ 3 (Միլվեստրի հայտանիշը):

Դիցուք $A(n \times n)$ սիմետրիկ մատրից է:

1) Որպեսզի A մատրիցը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գլխավոր անկյունագծային մինորները լինեն դրական՝

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0:$$

2) Որպեսզի A մատրիցը լինի բացասական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0:$$

3) Որպեսզի A մատրիցը լինի դրական կիսաորոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գլխավոր մինորները լինեն ոչ բացասական:

4) Որպեսզի A մատրիցը լինի բացասական կիսաորոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գույզ կարգի գլխավոր մինորները լինեն ոչ բացասական, իսկ կենտ կարգի գլխավոր մինորները լինեն ոչ դրական:

Հետևյալ պնդումը մի քանի փոփոխականի դիֆերենցելի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման է, որը Ֆերմայի թեորեմի ընդհանրացումն է: ([3], էջ 9, թեորեմ 1.2.):

Թեորեմ 4 (Էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք x^* -ը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է $\mathbb{R}^n$ -ի վրան f -ը դիֆերենցելի է այդ կետում:

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի գրադիենտը x^* կետում հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $f'(x^*) = 0$, կամ որ նույն է՝

$$f'_{x_i}(x^*) = 0, i \in [1, n]:$$

Ակնհայտ է, որ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերից ոչ բոլորն են էքստրեմումի կետեր: Այդ կասկածելի կետերի բացահայտման համար օգտագործում են երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները: Դրանցից է հետևյալ պնդումը ([3], էջ 10, թեորեմ 1.3):

Թեորեմ 5 (Էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք x^* -ը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n -ի վրա, և f -ը երկու անգամ դիֆերենցելի է այդ կետում:

Այդ դեպքում $H(x^*)$ -ը դրական կիսատրոշյալ է (բացասական կիսատրոշյալ է), այսինքն՝

$$H(x^*) \geq 0 \quad (H(x^*) < 0):$$

Խստացնելով պայմանը ֆունկցիայի հետևյալ մատրիցի վրա՝ անհրաժեշտ պայմանը կարող է դառնալ նաև բավարար պայման:

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը ([3], էջ 10, թեորեմ 1.4):

Թեորեմ 6 (Էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանները): Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x^* կետում, և տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

$$f'(x^*) = 0, H(x^*) > 0 \quad (H(x^*) < 0):$$

Այդ դեպքում x^* -ը f -ի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n -ի վրա:

Ելնելով այս պնդումներից՝ նկարագրենք **ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծման հետևյալ ընդհանուր ընթացակարգը**:

- Գրում ենք՝ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի, և կազմում ենք համակարգ:

- Լուծում ենք այդ համակարգը և ստանում ֆունկցիայի ստացիոնար կետերի բազմությունը:

- Յուրաքանչյուր ստացիոնար կետի համար ստուգում ենք լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները: Դեն ենք գցում այն կետերը, որոնք այդ երկու անհրաժեշտ պայմաններին չեն բավարարում:

- Մնացած կետերի համար ստուգում ենք էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանները և որոշում լոկալ էքստրեմումի կետերը:

Օրինակ 1: Գտնել

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը R^3 -ի վրա:

Լուծում: Ըստ մինիմումի անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$f'_{x_1} = 3x_1^2 - 3 = 0, \quad f'_{x_2} = 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \quad f'_{x_3} = 2x_3 + x_2 = 0:$$

Լուծելով այս համակարգը՝ կստանանք երկու ստացիոնար կետ՝

$$x^1 = (1, -4, 2) \quad \text{և} \quad x^2 = (-1, -4, 2):$$

Ունենք նաև, որ

$$\begin{aligned} f''_{x_1 x_1} &= 6x_1, & f''_{x_1 x_2} &= 0, & f''_{x_1 x_3} &= 0, \\ f''_{x_2 x_2} &= 2, & f''_{x_2 x_3} &= 1, & f''_{x_3 x_3} &= 2: \end{aligned}$$

Այժմ յուրաքանչյուր ստացիոնար կետի համար կարելի է կազմել հեսիանը և ստուգել նրա նշանը: x^1 կետի համար հեսիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$H(x^1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \quad \Delta_3 = 18 > 0,$$

ապա x^1 -ը լոկալ մինիմումի կետ է: Ուսումնասիրենք x^2 կետը: Այդ կետում հեսիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$H(x^2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Delta_1 = -6 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0, \quad \Delta_3 = -18 < 0,$ ապա

էքստրեմումի բավարար պայմանները տեղի չունեն: Ստուգենք երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները:

Առաջին կարգի գլխավոր միներներն են՝ $-6, 2, 2$ թվերը: Երկրորդ կարգի գլխավոր միներներն են՝ $3, -12, -12$: Երրորդ կարգի գլխավոր միները հավասար է Δ_3 -ի, որը բացասական է: Այսպիսով, x^2 կետում էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները չեն կատարվում: Հետևաբար, x^2 կետը էքստրեմումի կետ չէ:

Օրինակ 2: Ցույց տալ, որ

$$f(x_1, x_2) = (1 + e^{x_2}) \cos x_1 - x_2 e^{x_2}$$

ֆունկցիան ունի անվերջ քանակով լոկալ մաքսիմումներ և չունի լոկալ մինիմումի կետեր: Համաձայն առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x) = -(1 + e^{x_2}) \sin x_1 = 0, \\ f'_{x_2}(x) = e^{x_2} (\cos x_1 - x_2 - 1) = 0: \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից ստանում ենք $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: Տեղադրելով այն երկրորդ հավասարման մեջ՝ կստանանք $x_2 = 0$, եթե k -ն գույզ է, հակառակ դեպքում՝ $x_2 = -2$: Հետևաբար ֆունկցիայի ստացիոնար կետերն են՝ $(2\pi k, 0)$, $((2k+1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$:

Կազմենք հեսիանը՝

$$H(x) = \begin{pmatrix} -(1 + e^{x_2}) \cos x_1 & -e^{x_2} \sin x_1 \\ -e^{x_2} \sin x_1 & e^{x_2} (\cos x_1 - x_2 - 2) \end{pmatrix}:$$

$(2\pi k, 0)$ կետերի համար ունենք $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = -1$: Հետևաբար հեսիանը բացասական որոշյալ է, և ուրեմն այդ կետերը լոկալ մաքսիմումի կետեր են: Իսկ $((2k+1)\pi, -2)$ կետերի համար ունենք $\Delta_1 = 1 + e^{-2}$, $\Delta_2 = -e^{-2}$: Այսինքն՝ երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները չեն կատարվում, և հետևաբար այդ կետերը եքստրեմումի կետեր չեն:

Օրինակ 3: Լուծել հետևյալ խնդիրը՝

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c \rightarrow \text{extr},$$

որտեղ $A(n, n)$ -ն սիմետրիկ հակադարձելի մատրից է, b -ն n չափանի վեկտոր է, իսկ c -ն՝ թիվ: Կիրառելով առաջին կարգի անհրաժեշտ պայման՝ կստանանք

$$f'(x) = Ax + b = 0:$$

Այստեղից $x = -A^{-1}b$: Քանի որ $H(x) = A$, ապա կիրառելով երկրորդ կարգի բավարար պայմանը՝ կստանանք, որ եթե A մատրիցը դրական (բացասական) կիսաորոշյալ է, ապա $x = -A^{-1}b$ կետը $f(x)$ -ի գլոբալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետն է R^n վրա:

4. Հավասարության տիպի սահմանափակումով խնդիրներ: Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը:

Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը օպտիմիզացիայի այն հիմնարար սկզբունքներից է, որի միջոցով պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրները բերվում են ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների: Առաջին անգամ այս սկզբունքն առաջարկվել է Լագրանժի կողմից 1797 թվականին, և այն

հիմնավորվել է հավասարության տիպի սահմանափակումներով ողորկ օպտիմիզացիոն խնդիրների համար:

Այժմ դիտարկենք հավասարության տիպի սահմանափակումներով պայմանական օպտիմիզացիայի հետևյալ խնդիրը.

$$f_0(x) \rightarrow \text{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad i \in [1; m] \quad (1)$$

Ենթադրվում է, որ $f_i, \quad i \in [0; m]$ ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են R^n -ի վրա: Պահանջվում է գտնել $f_0(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը

$$M \equiv \{x \in R^n / f_i(x) = 0, \quad i \in [1; m]\}$$

բազմության վրա: Այդ կետերը կոչվում են (1) *խնդրի լուծումներ*: M բազմության կետերը կոչվում են *խնդրի թույլատրելի կետեր*:

Դիցուք $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1}$: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$$

Թեորեմ 7 (Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը): Դիցուք x^* կետը խնդրի լուծումն է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ թվեր (անորոշ գործակիցներ), որոնցից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, որ

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(x^*) = 0,$$

կամ որ նույն է

$$L'_x(x^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow L'_{x_i}(x^*, \lambda) = 0, \quad i \in [1; m]:$$

Ինչպես Ֆերմայի թեորեմը, այնպես էլ Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը անջատում են խնդրի ստացիոնար կետերը: Պայմանական օպտիմիզացիայի խնդրում ևս կան երկրորդ կարգի մեթոդներ, որոնք գրվում են երկրորդ կարգի ածանցյալների օգնությամբ: Տեղի ունեն հետևյալ պնդումները ([5], էջ 213, թեորեմներ 5.1.5, 5.1.6):

Թեորեմ 8 (Էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք x^* -ը (1) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է և $f'_1(x^*), f'_2(x^*), \dots, f'_m(x^*)$ վեկտորները գծորեն անկախ են: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0=1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ թվեր, որ

$$\begin{aligned} (L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) &\geq 0 \quad (L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) \leq 0 \quad \forall h \in H = \\ &= \left\{ h \in R^n / (f'_i(x^*), h) = 0, \quad i \in [1; m] \right\}: \end{aligned}$$

Թեորեմ 9 (Երկրորդ կարգի բավարար պայմանը):

Դիցուք x^* -ը (1) խնդրի թույլատրելի կետ է և գոյություն ունի այնպիսի $\lambda \in R^{m+1}$ վեկտոր, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) \lambda_0 = 1,$$

$$2) L'_{x_i}(x^*, \lambda) = 0, i \in [1; n],$$

3) կամայական ոչ զրոյական $h \in H$ վեկտորի համար տեղի ունի

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) > 0 \quad (L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) < 0: \quad (2)$$

Այդ դեպքում x^* -ը (1) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է:

Պարզագույն դեպքերում Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը թույլ է տալիս բացահայտ տեսքով գտնել **մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծումները հավասարությունների տիպի սահմանափակումների դեպքում**: Դրա համար պետք է կատարել հետևյալ քայլերը:

• Կազմել Լագրանժի ֆունկցիան:

• Գրել էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը Լագրանժի ֆունկցիայի համար և ստանալ հավասարումների համակարգ, որով բնութագրվում է խնդրի ստացիոնար կետերի բազմությունը:

• Գտնել ստացված համակարգի լուծումները:

• Էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանների միջոցով այդ լուծումներից անջատել էքստրեմումի կետերը:

Օրինակ 1: Գտնել

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

քառակուսային ձևի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

$$X = \left\{ x \in R^n / \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

բազմության վրա:

Քանի որ X բազմությունը փակ է և սահմանափակ, ապա համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ X բազմության վրա: Լագրանժի ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 1):$$

Համաձայն անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j - \lambda_1 x_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n):$$

Այստեղից, եթե $\lambda_0 = 0$, ապա $\lambda_1 = 0$, որը հնարավոր չէ, որովհետև Լագրանժի գործակիցները միաժամանակ զրո լինել չեն կարող: Հետևաբար, ընդհանրությունը չխախտելով՝ կարող ենք ենթադրել, որ $\lambda_0 = 1$: Գծային հանրահաշվից հայտնի է, որ այս համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում միայն այն դեպքում, երբ

$$\det(A - \lambda_1 E) = 0:$$

Այսինքն՝ λ_1 -ն $A = (a_{ij})$ մատրիցի սեփական արժեքն է: Իսկ անհրաժեշտ պայմանից ստանում ենք՝

$$f(x) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0:$$

Այստեղից՝ $f(x) = \lambda_1$: Այսպիսով, $f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները համընկնում են A մատրիցի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների հետ:

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow extr,$$

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0:$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) = \lambda_0 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1 ((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4)$$

Ըստ անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 (x_1 - 1) = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0: \end{cases} \quad (3)$$

Եթե, $\lambda_0 = 0$, ապա (3) համակարգից ստանում ենք

$$2\lambda_1 (x_1 - 1) = 0, \quad 2\lambda_1 x_2 = 0, \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \quad (4)$$

Քանի որ λ_0 և λ_1 գործակիցները միաժամանակ զրո չեն, ապա $\lambda_1 \neq 0$:

Հետևաբար (4) համակարգի առաջին երկու պայմաններից կստանանք

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

որը չի բավարարում երրորդ հավասարմանը: Այսպիսով $\lambda_0 \neq 0$:

Ընդհանրությունը չսահմանափակելով՝ կարող ենք ենթադրել, որ $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում (3) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 (x_1 - 1) = 0, \\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0: \end{cases} \quad (5)$$

Դիտարկենք այս համակարգի երկրորդ հավասարումը: Եթե $x_2 = 0$, ապա երրորդից կստանանք $x_1 = 3$, կամ $x_1 = -1$, իսկ առաջին հավասարումից՝ $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$:

Եթե $x_2 = 0$, ապա երկրորդից կունենանք $\lambda_1 = -1$: Այդ դեպքում առաջին հավասարումը տեղի չունի, այսինքն՝ (5) համակարգը համատեղելի չէ:

Այսպիսով, ստանում ենք երկու ստացիոնար կետեր՝

$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2};$$

$$x_1^* = -1, \quad x_2^* = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}:$$

Ստուգենք երկրորդ կարգի (2) բավարար պայմանները այդ կետերի համար: Ունենք՝

$$(L''_{xx}h, h) = 2(1 + \lambda_1)h_1^2 + 2(1 + \lambda_1)h_2^2,$$

$$h \in H = \{h = (h_1, h_2) \in R^2 / 2(x_1^* - 1)h_1 + 2x_2^*h_2 = 0\}:$$

Այստեղից հեշտ է տեսնել, որ $A(3, 0)$ կետի համար տեղի ունի

$$(L''_{xx}h, h) < 0 \quad \forall h \in H, h \neq 0$$

անհավասարությունը: Ուստի A -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Նման ձևով համոզվում ենք, որ $B(-1, 0)$ -ն լոկալ մինիմումի կետ է: Մյուս կողմից, քանի որ f_0 ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներին, ապա B կետը գլոբալ մինիմումի կետ է, իսկ A -ն գլոբալ մաքսիմումի կետ է:

5. Ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիրներ: Կուն-Տակկերի թեորեմը

Սահմանում 5: $M \subseteq R^n$ բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $x^1, x^2 \in M$ կետերի և ցանկացած $\alpha \in [0; 1]$ թվի համար տեղի ունի հետևյալը.

$$\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \in M:$$

Սա նշանակում է, որ բազմությանը պատկանող երկու կետերը միացնող հատվածը ընկած է այդ նույն բազմության մեջ:

Սահմանում 6: $f(x)$ ֆունկցիան $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $x^1, x^2 \in M$ կետերի և ցանկացած $\alpha \in [0; 1]$ թվի համար տեղի ունի

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2)$$

անհավասարությունը:

Օրինակ 1: Ցույց տանք, որ $f(x) = x^2$, $x \in R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ստուգենք ուռուցիկ ֆունկցիայի անհավասարությունը՝

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 = \\ &= \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1 x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \leq \\ &\leq \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\alpha)^2 x_2^2 = \\ &= \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2): \end{aligned}$$

Թեորեմ 10: Դիցուք f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա և դիֆերենցելի է $x^* \in M$ կետում: Այդ դեպքում

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) \quad \forall x \in M:$$

Երկրաչափորեն այս անհավասարությունը նշանակում է, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկը դասավորված է նրա գրաֆիկին x^* կետում տարված շոշափողից վերև:

Այս անհավասարությունից հետևում է, որ ուռուցիկ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը նրա գլոբալ մինիմումի կետեր են: Այսինքն՝ ուռուցիկ դեպքում առաջին կարգի պայմաններով որոշվում են ֆունկցիայի մինիմումի կետերը:

Սահմանում 7: $f(x)$ ֆունկցիան $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է **ուժեղ ուռուցիկ** $\theta > 0$ հաստատունով, եթե

$$f(x^1) - f(x^2) \geq (f'(x^2), x^1 - x^2) + \theta \|x^1 - x^2\|^2 \quad \forall x^1, x^2 \in M:$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկի և նրա կամայական կետում տարված շոշափողի միջև կարելի է «նկարել» քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկ:

Այս սահմանումից հետևում է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ուժեղ ուռուցիկ է R^n վրա, ապա $f(x) \rightarrow +\infty$, երբ $\|x\| \rightarrow +\infty$:

Տեղի ունի հետևյալ կարևոր պնդումը, որով ուսումնասիրվում է մինիմումի գոյության խնդիրը ուռուցիկ դեպքերում, երբ բազմությունը կոմպակտ չէ, և այդ իսկ պատճառով Վայերշտրասի թեորեմը կիրառելի չէ ([5], էջ 24, թեորեմ 1.1.7):

Թեորեմ 11: Ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիան փակ ուռուցիկ բազմության վրա ունի միակ մինիմումի կետ:

Եթե ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա նրա ուռուցիկությունը ամբողջ տարածության վրա կարելի է ստուգել հեսիանի նշանի միջոցով: Այդ մասին է հետևյալ պնդումը ([3], թեորեմ 3.9, էջ 91):

Թեորեմ 12: Դիցուք f -ը երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է R^n -ի վրա: Այդ դեպքում

ա) եթե $H(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n$, ապա f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է R^n -ի վրա;

բ) եթե $(H(x)h, h) \geq \theta \|h\|^2 \quad \forall x, h \in R^n$, ապա f -ը ուժեղ ուռուցիկ է θ հաստատունով R^n -ի վրա:

Օրինակ 2: a, b և c պարամետրերի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ: Հեսիանը կլինի հետևյալ մատրիցը՝

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}:$$

Համաձայն Սիլվեստրի կանոնի՝ այս մատրիցը կլինի ոչ բացասական որոշյալ, եթե $a \geq 0$, $c \geq 0$, $4ac \geq b^2$ և դրական որոշյալ, եթե $a > 0$, $4ac > b^2$: Հետևաբար առաջին դեպքում ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ ուժեղ ուռուցիկ:

Օրինակ 3: Ուսումնասիրել

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$$

ֆունկցիայի ուռուցիկությունը $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_2 > 0\}$ բազմության վրա:

Ունենք

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2/x_2 & -2x_1/x_2^2 \\ -2x_1/x_2^2 & 2x_1^2/x_2^3 \end{pmatrix}:$$

Համաձայն Սիլվեստրի կանոնի այս մատրիցը դրական կիսաորոշյալ է X բազմության վրա, և հետևաբար ֆունկցիան ուռուցիկ է այդտեղ:

Դիցուք $f_i(x)$, $i \in [0, m]$ ֆունկցիաները ուռուցիկ են R^n -ի վրա: Դիտարկենք $f_0(x)$ ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդիրը $M \equiv \{x \in R^n / f_i(x) \leq 0, i \in [1, m]\}$ բազմության վրա.

$$f_0(x) \rightarrow \min, x \in M: \quad (6)$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ M -ը ուռուցիկ բազմություն է:

(6) խնդիրը կոչվում է **ուռուցիկ ծրագրավորման** խնդիր: $f_0(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետերը M բազմության վրա կոչվում են (6) *խնդրի լուծումներ*:

Կազմենք **Լագրանժի** ֆունկցիան.

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x),$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1}$: Ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիրների լուծման համար տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որով անջատվում են ուռուցիկ

ֆունկցիայի մինիմումի կետերը ուռուցիկ բազմության վրա ([1], էջ 69, թեորեմ 4.1.3):

Թեորեմ 13 (Կուն-Տակկեր: Անհրաժեշտությունը):

Դիցուք x^* կետը հանդիսանում է (6) խնդրի լուծում:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, որ

$$1) L(x, \lambda) \geq L(x^*, \lambda) \quad \forall x \in R^n,$$

$$2) \lambda_i f_i(x^*) = 0, \quad i \in [1; m] \quad (\text{ակտիվ-պասիվ սահմանափակումների պայման}):$$

Թեորեմ 14 (Կուն-Տակկեր: Բավարարությունը):

Դիցուք x^* կետը բավարարում է (6) խնդրի բոլոր սահմանափակումներին.

$$f_i(x^*) \leq 0, \quad i \in [1; m], \quad \text{և գոյություն ունեն այնպիսի } \lambda_0 > 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$$

թվեր, որ տեղի ունեն թեորեմ 13-ի 1)-2) պայմանները:

Այդ դեպքում x^* վեկտորը (6) խնդրի լուծում է:

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե (6) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը ունի ներքին կետ, ապա Լագրանժի ֆունկցիայում λ_0 գործակիցը կարելի է վերցնել հավասար մեկի:

Դիֆերենցելի դեպքերում Կուն-Տակկերի թեորեմը թույլ է տալիս բացահայտ տեսքով գտնել **ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիրների լուծումները**: Դրա համար կատարում ենք հետևյալ քայլերը.

- Ստուգում ենք ֆունկցիաների ուռուցիկությունը և կազմում Լագրանժի ֆունկցիան:

- Ստուգում ենք, որ թույլատրելի լուծումների բազմությունը ունի ներքին կետ, և Լագրանժի λ_0 գործակիցը վերցնում ենք հավասար մեկի:

- Լագրանժի ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները հավասարեցնում ենք զրոյի:

- Գրում ենք պասիվ-ակտիվ սահմանափակումների պայմանը:

- Ավելացնում ենք նաև, որ Լագրանժի բոլոր գործակիցները պետք է լինեն ոչ բացասական:

- Լուծելով ստացված համակարգը՝ ստանում ենք էքստրեմումի խնդրի լուծումները:

Օրինակ 4: Ստուգել՝ արդյո՞ք $(0,1)$ կետը հետևյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ.

$$e^{x_1 - x_2} \rightarrow \min, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0:$$

Նախ նկատենք, որ այս խնդիրը ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիր է, քանի որ $f(x) = e^{x_1 - x_2}$ նպատակային ֆունկցիան ուռուցիկ է, և միաժամանակ ուռուցիկ է նաև թույլատրելի լուծումների $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

բազմությունը: Քանի որ X բազմությունը ունի ներքին կետեր, ապա Լագրանժի λ_0 գործակիցը կարելի է վերցնել հավասար մեկի: Հետևաբար կունենանք՝

$$\begin{cases} L'_{x_1} = e^{x_1 - x_2} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_2} = -e^{x_1 - x_2} + \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0, \quad \lambda_2 x_1 = 0, \quad \lambda_3 x_2 = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \\ \lambda_2 \geq 0, \\ \lambda_3 \geq 0: \end{cases}$$

Տեղադրելով այս համակարգի մեջ $x_1 = 0, x_2 = 1$ արժեքները՝ կստանանք

$$\lambda_1 = e^{-1} > 0, \quad \lambda_2 = 2e^{-1} > 0, \quad \lambda_3 = 0 :$$

Հետևաբար բավարարվում են Կուն-Տակկերի թեորեմի պայմանները: Ուրեմն՝ $(0, 1)$ կետը խնդրի լուծումն է:

Գրականություն

1. В. М. Алексеев, Э.М. Галеев, В. М. Тихомиров. Сборник задач по оптимизации, Наука, М., 1984.
2. Никольский С. М., Курс математического анализа
1. Наука, М.:1990.
3. Сухарев А.Г., Тимохов А. Г., Федоров В.В., Курс методов оптимизации, Наука, М.:, 1986.
4. Воеводин В. В., Линейная алгебра, Наука, М.:, 1987.
5. Խաչատրյան Ռ. Ա., Օպտիմիզացիայի մեթոդներ, Բուհական դասագիրք, ԵՊՀ հրատ., Երևան, 2020.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ.Սահակյանը: