ՀՏԴ 373 : 512

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Լիլիթ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
ԱրՊՀ, մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս
E-mail: lilit.rafael@yandex.com

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԱՐՐԵՐՈՎ ՇԱՐԺՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՏԵՔՍՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Սույն աշխատանքում դիտարկվող շարժման վերաբերյալ տեքստային խնդիրները լուծելու համար անհրաժեշտ են ոչ միայն հավասարումների (հավասարումների համակարգի) լուծման հմտություններ, այլև երկրաչափության որոշ թեորեմների իմացություն: Այդ խնդիրները ապահովում են միջառարկայական կապերը հանրահաշվի և երկրաչափության միջև և նպաստում են աշակերտների տրամաբանական ու երկրաչափական մտածողության զարգացմանը:

Բանալի բառեր՝ տեքստային խնդիր, շարժում, երկրաչափական պատկեր, թեորեմ:

Л. Аракелян

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ С ЭЛЕМЕНТАМИ ГЕОМЕТРИИ

В работе рассматриваются текстовые задачи на движения, для решения которых необходимы не только навыки решения уравнений (системы уравнений), но и знания некоторых теорем геометрии. Эти задачи обеспечивают межпредметную связь между алгеброй и геометрией и способствуют развитию логического и геометрического мышления учеников.

Ключевые слова: *текстовая задача, движение, геометрическая фигура, теорема.*

L. Arakelyan

TEXT TASKS FOR MOVEMENT WITH GEOMETRY ELEMENTS

In this article, we consider the text tasks about movement. Their solution requires equations solving skills and knowledge of some type of geometrical theorems. These tasks provide an interdisciplinary connection between algebra and geometry and develop students' logical and geometrical thinking. Keywords: text tasks, movement, geometric figure, theorem.

Key words: *text task, movement, geometric figure, theorem.*

Շարժման վերաբերյալ պարզագույն խնդիրներին աշակերտները ծանոթանում են տարրական դասարաններում, և հիմնական դպրոցի բոլոր դասարաններում շարունակվում է այդ տիպի խնդիրների լուծման ուսուցումը: Դրանք սկզբում դիտարկվում են թվաբանական գործողությունների կիրառման դաշտում, իսկ հետագայում՝ նախ որպես մեկ անհայտով հավասարումների, իսկ հետո նաև որպես մի քանի անհայտով հավասարումների համակարգերի կիրառություն ([1-4]): Սույն աշխատանքում շարժման վերաբերյալ տեքստային խնդիրները կդիտվեն նաև մեկ այլ տեսանկյունից՝ որպես երկրաչափության կիրառություն:

Ստորև դիտարկվող խնդիրներում օբյեկտի շարժման հետ մեկտեղ դիտարկվում է որևէ երկրաչափական պատկեր: Լուծման ընթացքում անհրաժեշտ է հաշվել շարժման հետագծի որևէ հատվածի (հատվածների) երկարությունը՝ կիրառելով երկրաչափությունից հայտնի թեորեմներ:

Խնդիր 1: Հեծանվավազքի երթուղու եզրագիծը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջերի տարբերությունը 2 կմ է, ընդ որում, ներքնաձիգն անցնում է գյուղամիջյան ճանապարհով, իսկ էջերը՝ խճուղով: Հեծանվորդը հեծանվավազքի երթուղու գյուղամիջյան ճանապարհին անցավ 30 կմ/ժ արագությամբ և նույնքան ժամանակ էլ ծախսեց 42 կմ/ժ արագությամբ խճուղու երկու հատվածներն անցնելու համար: Գտնել երթուղու երկարությունը [1]:

Լուծում: Առանձնացնենք խնդրի պայմանները.

I- Հեծանվավազքի երթուղու եզրագիծը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջերի տարբերությունը 2 կմ է:

II- Ներքնաձիգն անցնում է գյուղամիջյան ճանապարհով: Հեծանվորդը հեծանվավազքի երթուղու գյուղամիջյան ճանապարհին անցավ 30կմ/ժ արագությամբ:

III- Երկու էջերը անցնում են խճուղով: Հեծանվորդը խճուղու երկու հատվածները անցավ 42 կմ/ժ արագությամբ:

IV- Հեծանվորդը հեծանվավազքի երթուղու գյուղամիջյան ճանապարհին անցավ նույնքան ժամանակում, որքան խճուղու երկու հատվածները միասին:

Կառուցենք խնդրի պայմաններին համապատասխան գծապատկեր (Գծ. 1): Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ հեծանվավազքի երթուղու եզրագիծը՝ ΔABC, $AB = x$:

Պահանջվում է հաշվել ΔABC պարագիծը:

Ըստ խնդրի I պայմանի՝ $AC = x + 2,\quad \angle A = 90^{\circ}$: Պահանջվում է հաշվել ΔABC-ի պարագիծը:

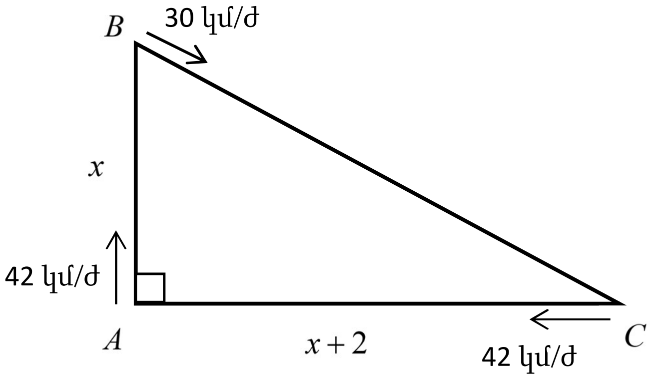
Պյութագորասի թեորեմի համաձայն՝ $BC^2 = x^2 + (x+2)^2$ => $BC = \sqrt{x^2 + (x+2)^2}$:

Գյուղամիջյան ճանապարհը հեծանվորդն անցավ $\frac{BC}{30}=\frac{\sqrt{x^2+(x+2)^2}}{30}$ ժամանակում:

Մայրուղու երկու հատվածները միասին հեծանվորդն անցավ $\frac{AB+AC}{42}=\frac{x+(x+2)}{42}$ ժամանակում:

Ըստ խնդրի IV պայմանի՝ $\frac{\sqrt{x^2+(x+2)^2}}{30}=\frac{2x+2}{42}$:

Լուծելով ստացված հանրահաշվական հավասարումը՝ կստանանք $x=6$:



Գծ. 1

ΔABC-ի պարագիծը կլինի՝

$$P=x+(x+2)+\sqrt{x^2+(x+2)^2}=6+(6+2)+\sqrt{6^2+(6+2)^2}=24:$$

Պատասխան՝ 24 կմ:

Խնդիր 2: Երկու նավեր ուղղագիծ և հավասարաչափ շարժվում են դեպի միևնույն նավահանգիստը: Շարժման սկզբում նավերի և նավահանգստի դիրքերը կազմում են կանոնավոր եռանկյուն: Երբ երկրորդ նավն անցավ 80 կմ, նշված եռանկյունը վերածվեց ուղղանկյուն եռանկյան: Երբ առաջին նավը հասավ նավահանգիստ, երկրորդին մնում էր անցնելու ևս 120 կմ: Գտնել երկու նավերի միջև հեռավորությունը շարժման սկզբում:

Լուծում: Առանձնացնենք խնդրի պայմանները.

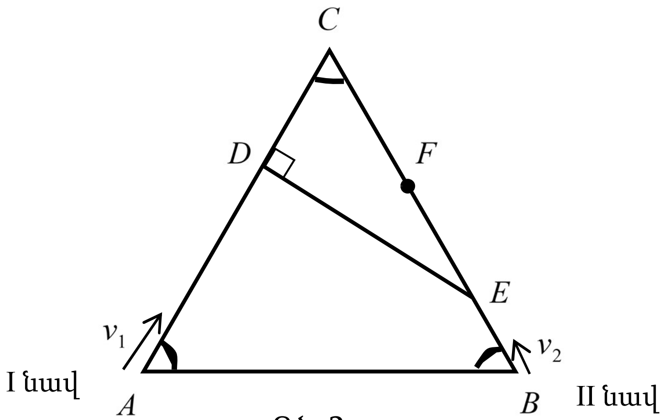
I- Երկու նավեր ուղղագիծ հավասարաչափ շարժվում են դեպի միևնույն նավահանգիստը: Շարժման սկզբում նավերի և նավահանգստի դիրքերը կազմում են կանոնավոր եռանկյուն:

II- Երբ առաջին նավն անցավ 80 կմ, նշված եռանկյունը վերածվեց ուղղանկյուն եռանկյան:

III- Երբ առաջին նավը հասավ նավահանգիստ, երկրորդին մնում էր անցնելու ևս 120կմ:

Կառուցենք խնդրին համապատասխան գծապատկեր (Գծ. 2) և կատարենք հետևյալ նշանակումները. առաջին նավը դուրս է եկել A կետից և շարժվում է v_1 արագությամբ, երկրորդ նավը դուրս է եկել B կետից և շարժվում է v_2 արագությամբ, նավերի միջև հեռավորությունը շարժման սկզբում x է:

Ըստ խնդրի I պայմանի՝ $AB = BC = AC = x, \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$:



Գծ. 2

Ըստ խնդրի II պայմանի՝ $EB = 80, \quad \angle CED = 90^\circ$ և

$$\frac{AD}{v_1} = \frac{EB}{v_2}: \tag{1}$$

Ըստ խնդրի III պայմանի՝ $CF = 120$ և

$$\frac{AC}{v_1} = \frac{BF}{v_2}: \tag{2}$$

(1)-ից և (2)-ից կստանանք՝

$$\begin{cases} \dfrac{AD}{v_1} = \dfrac{EB}{v_2} \\ \dfrac{AC}{v_1} = \dfrac{BF}{v_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{AD}{AC} = \frac{EB}{BF}: \tag{3}$$

$BF = BC - CF = x - 120$, հետևաբար (3)-ից կստանանք

$$\frac{AD}{x} = \frac{80}{x-20}: \tag{4}$$

$AD = AC - DC$, ΔDCE -ից՝ $\angle CED = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow DC = \frac{1}{2}CE$ (որպես ուղղանկյուն եռանկյան 30° -ի դիմացի էջ), $CE = BC - EB = x - 80$, հետևաբար՝

$$AD = x - \frac{1}{2}(x-80) = \frac{x+80}{2}:$$

Տեղադրենք ստացված արժեքը (4)-ի մեջ

$$\frac{\frac{x+80}{2}}{x} = \frac{80}{x-120}:$$

Լուծելով ստացված հանրահաշվական հավասարումը՝ կստանանք $x = 240$:

Պատասխան՝ 240 կմ:

Խնդիր 3: Ուղղանկյունաձև դաշտի կողմերից մեկի վրա կանգնեցված է սյուն, որի հեռավորությունը մոտակա գագաթից հավասար է այդ կողմի 1/10-ին: Սյան մոտից դաշտի եզրագծով մինչև ամենահեռու գագաթը (երկու կողմերով) եղած հեռավորությունն անցնելու համար ծախսվում է 1ժ 3ր, իսկ դաշտի միջով ամենակարճ ճանապարհով՝ 45ր: Դաշտի անկյունագծով մի գագաթից մյուսն անցնելու համար ծախսվում է ավելի քան 48ր: Որքա՞ն կտևի սյունից մինչև մոտակա գագաթը հասնելը (քայլելու արագությունը հաստատուն է) [2, էջ 73]:

Լուծում: Առանձնացնենք խնդրի պայմանները.

I- Ուղղանկյունաձև դաշտի կողմերից մեկի վրա կանգնեցված է սյուն, որի հեռավորությունը մոտակա գագաթից հավասար է այդ կողմի 1/10-ի:

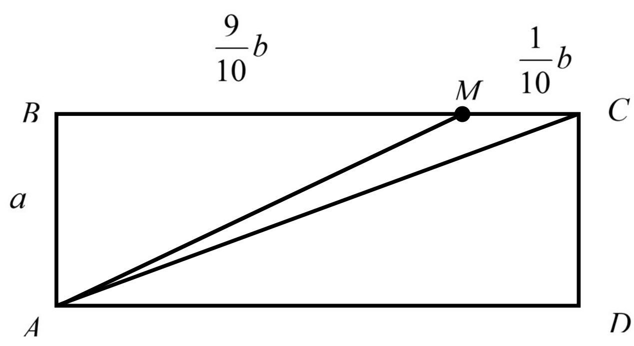
II- Սյան մոտից դաշտի եզրագծով մինչև ամենահեռու գագաթը (երկու կողմերով) եղած հեռավորությունն անցնելու համար ծախսվում է 1ժ 3ր:

III- Սյան մոտից ուղիղ դաշտի միջով մինչև ամենահեռու գագաթը անցնելու համար ծախսվում է 45 ր:

IV- Դաշտի անկյունագծով մի գագաթից մյուսն անցնելու համար ծախսվում է ավելի քան 48ր:

Կառուցենք խնդրին համապատասխան գծապատկեր (Գծ. 3) և կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ ուղղանկյունաձև դաշտի եզրագիծը՝ ուղղանկյուն $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$, քայլելու արագությունը՝ v:

Դիցուք սյունը տեղադրված է M կետում: Այդ դեպքում, ըստ խնդրի I



Գծ. 3

պայմանի, $MC=\frac{1}{10}b$, $MB=\frac{9}{10}b$: Պահանջվում է հաշվել MC հեռավորությունն անցնելու վրա ծախսվող ժամանակը:

Ըստ խնդրի II պայմանի՝ $MB+BA=\frac{9}{10}b+a$ հեռավորությունն անցնելու համար ծախսվում է 63 ր, հետևաբար՝

$$\frac{\frac{9}{10}b+a}{v}=63: \tag{5}$$

Ըստ խնդրի III պայմանի՝ MA հեռավորությունն անցնելու համար ծախսվում է 45ր: Պյութագորասի թեորեմի համաձայն՝ $MA=\sqrt{\left(\frac{9}{10}b\right)^2+a^2}$, հետևաբար՝

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9}{10}b\right)^2+a^2}}{v}=45\ : \tag{6}$$

Սյան մոտից մինչև մոտակա զազաթը հասնելու տևողությունը կլինի՝

$$\frac{MC}{v}=\frac{\frac{1}{10}b}{v}=\frac{1}{10}\cdot\frac{b}{v}:$$

(5) և (6) հավասարումներից կստանանք՝

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{9}{10}b+a}{v}=63\\ \dfrac{\sqrt{\left(\frac{9}{10}b\right)^2+a^2}}{v}=45\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\frac{9}{10}b}{v}+\dfrac{a}{v}=63\\ \dfrac{\left(\frac{9}{10}b\right)^2+a^2}{v^2}=45^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{b}{v}+\dfrac{a}{v}=63\\ \left(\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{b}{v}\right)^2+\dfrac{a^2}{v^2}=2025\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{a}{v}=63-\frac{9}{10}\cdot\frac{b}{v},$$

(7)

$$\left(\frac{9}{10}\cdot\frac{b}{v}\right)^2+\left(63-\frac{9}{10}\cdot\frac{b}{v}\right)^2=2025:$$

Նշանակելով $\frac{9}{10}\cdot\frac{b}{v}=p$՝ կստանանք $p^2+(63-p)^2=2025$, որտեղից $p_1=27,\quad p_2=36$, հետևաբար հնարավոր է երկու դեպք.

1) $\frac{9}{10}\cdot\frac{b}{v}=27$ => $\frac{1}{10}\cdot\frac{b}{v}=3$: MC հեռավորությունն անցնելու վրա ծախսվող ժամանակն է 3ր:

2) $\frac{9}{10}\cdot\frac{b}{v}=36$ => $\frac{1}{10}\cdot\frac{b}{v}=4$: MC հեռավորությունն անցնելու վրա ծախսվող ժամանակն է 4ր:

Պարզենք՝ արդյո՞ք ստացված արժեքները բավարարում են խնդրի IV պայմանին:

Ըստ խնդրի IV պայմանի՝ CA հեռավորությունն անցնելու համար ծախսվում է ավելի քան 48ր: Պյութագորասի թեորեմի համաձայն՝ $AC=\sqrt{a^2+b^2}$, հետևաբար՝ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v}>48$, որտեղից կստանանք

$$\left(\frac{a}{v}\right)^2+\left(\frac{b}{v}\right)^2>2304: \quad (8)$$

1)-ից $\frac{b}{v}=30$, (7)-ից $\frac{a}{v}=63-\frac{9}{10}\cdot 30=36$:

$30^2+36^2=2196<2304$, այսինքն (8) պայմանը խախտվում է, հետևաբար՝ 1) դեպքի արժեքը չի բավարարում խնդրի IV պայմանին:

2)-ից $\frac{b}{v}=40$, (7)-ից $\frac{a}{v}=63-\frac{9}{10}\cdot 40=27$:

$40^2+27^2=2329>2304$, այսինքն՝ (8) պայմանը կատարվում է, հետևաբար 2) դեպքի արժեքը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին:

Պատասխան՝ 4ր:

Դիտարկված խնդիրներում առանցքային տեղը զբաղեցնում է օբյեկտի շարժումը, իսկ երկրաչափական տարրերը ավելի հետաքրքիր են դարձնում այն:

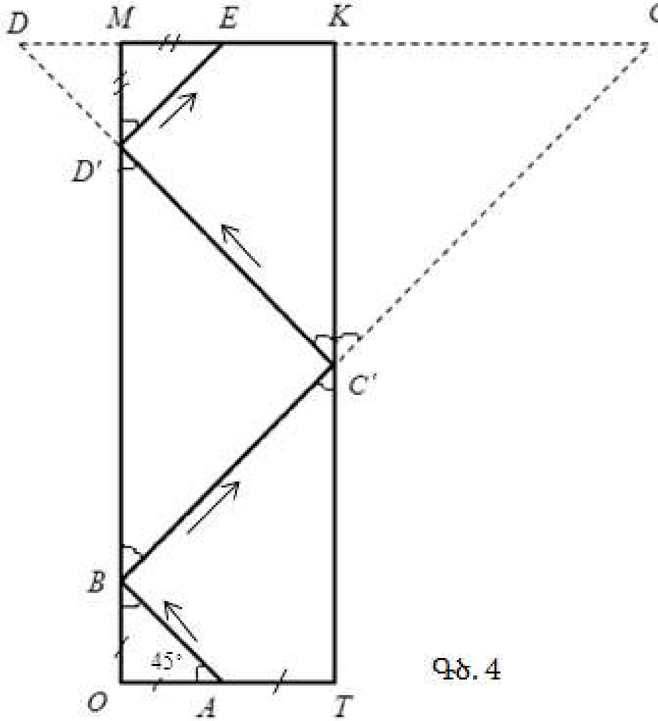
Կարելի է դիտարկել նաև այնպիսի խնդիրներ, որտեղ լուծման հիմնական բաղադրիչը լինի երկրաչափականը, իսկ օբյեկտի շարժումը խնդիրը դարձնի առավել բովանդակալից: Օրինակ՝

Խնդիր 4: 2×6 մետր չափումներով սեղանի հոկեյի ուղղանկյունաձև խաղադաշտից տափօղակին հարվածեցին նրա փոքր կողի կենտրոնական մասից՝ 45^0 անկյան տակ: Խաղադաշտի կողին տափօղակի անկման անկյունը հավասար է անդրադարձման անկյանը: Գտնել տափօղակի շարժման միջին արագությունը, եթե հայտնի է, որ շարժումը սկսելուց 0,5վ անց այն հարվածեց խաղադաշտի հանդիպակաց կողին: Տափօղակի չափերն անտեսել:

Լուծում: Պատկերենք ուղղանկյունաձև խաղադաշտի գծապատկերը՝ $OMKT$ ուղղանկյունը, և քայլ առ քայլ կառուցենք տափօղակի շարժման հետագիծը, որն իրենից ներկայացնում է բեկյալ (Գծ. 4):

Պահանջվում է հաշվել այդ բեկյալի երկարությունը: Դրա համար նախ հաշվենք նրա յուրաքանչյուր օղակի երկարությունը:

1) Շարժվելով A կետից՝ տափօղակը նախ կհարվածի խաղադաշտի կողին B



Գծ. 4

կետում: ΔOAB -ից $OB = OA = 2:2 = 1 \Rightarrow \quad AB = \sqrt{2}$:

Ըստ գծագրի՝ $MB = OM - OB = 6 - 1 = 5$:

2) Հանգունորեն, շարժվելով B կետից, տափօղակը կհարվածի խաղադաշտի կողին C' կետում: BC' -ի և MK -ի շարունակությունները հատվում են C կետում:

ΔBMC -ից $\angle B = 45^\circ$, $\angle M = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle C = 45^\circ \Rightarrow BM = MC = 5$:

Ըստ գծագրի՝ $KC = MC - KM = 5 - 2 = 3$:

$\Delta CC'K$ - ն հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է, հետևաբար՝ $KC' = KC = 3$:

3) Շարժվելով C' կետից՝ տափօղակը կհարվածի խաղադաշտի եզրագծին D' կետում: MK -ի և $C'D'$ -ի շարունակությունները հատվում են D կետում:

$\Delta DKC'$ -ը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է, հետևաբար՝ $DK = KC' = 3$:

Ըստ գծագրի՝ $DM = DK - MK = 3 - 2 = 1$:

$\Delta DMD'$ ուղղանկյուն եռանկյուն է, հետևաբար՝ $D'M = 1$:

4) Շարժվելով D' կետից՝ տափօղակը կհարվածի խաղադաշտի եզրագիծը E կետում:

$\Delta D'ME$ -ից $ME = MD' = 1$, $D'E = \sqrt{2}$:

5) Դիտարկենք $\Delta BC'D'$: Այն հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Նշանակենք $BC' = C'D' = x, \quad x > 0$;

Ըստ գծագրի՝ $BD' = BM - D'M = 5 - 1 = 4$:

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $\Delta BC'D'$ -ից կունենանք՝

$$x^2 + x^2 = 4^2$$

$$x_1 = 2\sqrt{2}, \quad x_2 = -2\sqrt{2} \text{ (չի բավ.)}$$

Տափօղակի անցած ճանապարհի $ABC'D'E$ բեկյալ գծի երկարությունը նշանակենք S:

$$S = AB + BC' + C'D' + D'E = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$v_{\text{միջ}} = S : t = 6\sqrt{2} : \frac{1}{2} = 12\sqrt{2} :$$

Պատասխան՝ $12\sqrt{2}$ *մ/վ:*

Շարժման վերաբերյալ տեքստային խնդիրների հագեցումը երկրաչափական տարրերով դարձնում են դրանք առավել գրավիչ: Դասերին նմանատիպ խնդիրների դիտարկումը հանդիսանում է միջառարկայական կապի ստեղծման յուրօրինակ հնարք: Այդ խնդիրները նպաստում են տրամաբանական և երկրաչափական մտածողության զարգացմանը՝ ձևավորելով սովորողների մաթեմատիկական մշակույթը:

Գրականություն

1. Մաթեմատիկայի մրցութային խնդիրների ժողովածու: Բուհ ընդունվողների համար, 2-րդ հրատարակություն, Մ.Ի.Սկանավիի խմբ., [Թարգ.՝ Վ.Տ.Հակոբյան].-Եր.:Լույս, 1990.-544 էջ:
2. Лурье М.В., Александров Б.И., Задачи на составление уравнений. М., изд.Наука, 1976, 80 с.
3. Шевкин А.В., Текстовые задачи по математике: 7–11 классы. – М.: ИЛЕКСА. – 2011, 208 с.
4. https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/zadanie-11-ege-zadachi-na-dvijenie/

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ.Սահակյանը: