

*ՀՏԴ 512.62, 512.8**Մաթեմատիկա**Ռոբերտ Հարությունյան**ՇՏՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի պրոֆեսոր**E-mail: rharityunyan@shushitech.am**Լիանա Աբրահամյան**ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆ/մ. գ. թ.**E-mail: liana_abrahamyan@mail.ru*

ՈՉ ՍՏԱՆԴԱՐՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

Ներկա հոդվածում բերված է բարդ հավասարումների լուծումը որոշ մեթոդների կիրառմամբ: Հատուկ մեթոդով հինգերորդ աստիճանի հավասարումները լուծվում են ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու եղանակով:

Բանալի բառեր՝ հավասարում, ոչ ստանդարտ հավասարումներ, ֆունկցիոնալ տեղադրություններ, եռանկյունաչափական տեղադրություններ, բազմանդամ, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:

Р.М.АРУТЮНЯН, Л.Р.АБРАМЯН

РЕШЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе приведены решения сложных уравнений с помощью некоторых методов. Специальным методом, уравнения пятой степени решаются с помощью нахождения наибольшего общего делителя многочленов.

Ключевые слова: уравнение, нестандартные задачи, функциональные подстановки, тригонометрические подстановки, многочлен, наибольший общий делитель.

***R.M.HARUTYUNYAN, L. R. ABRAHAMYAN
SOLVING NON-STANDARD EQUATIONS***

In this paper we solve non-standard equations. Equations of the fifth degree are solved by finding the greatest common divisor of polynomials using a special method.

Key words equation, non-standard equations, functional substitutions, trigonometric substitutions, greatest common divisor.

Возможно, не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны... без аналогии.

Д.Пойа

1. Ներածություն

Ոչ ստանդարտ հավասարումների լուծումը պահանջում է դիմորդներից ոչ ավանդական մտածողություն ու ոչ սովորական դատողություններ և կախված է դրանց լուծման փորձից, մեթոդների տիրապետման աստիճանից և ձևափոխությունների տեխնիկայից:

Ընդունելության քննություններում խնդիրների բարդեցման տենդենցը խթանում է խնդիրների լուծման նոր (ոչ ստանդարտ) մոտեցումներ:

Չկա ոչ ստանդարտ խնդրի հստակ սահմանում: Որպես գործնական սահմանում ընդունվում է հետևյալը՝ ոչ ստանդարտ խնդիրները այն խնդիրներն են, որոնց լուծման համար չկա պատրաստի ալգորիթմ և պետք է ինքնուրույն գտնել լուծման ձևը: Այդպիսի խնդիրների լուծման ընթացքում ձևավորվում են մաթեմատիկական գրագիտություն և մտքի ճկունություն: Դ. Պոյայի խոսքերով. <<Ոչ ստանդարտ խնդիրները նպաստում են ինտելեկտուալ զարգացմանը, ինչը չի կարելի ասել ստանդարտ խնդիրների մասին>> [1-4]: Ոչ ստանդարտ խնդիրների աղբյուր են հանդիսանում օլիմպիադայի առաջադրանքները:

Աշխատանքի նպատակն է ցույց տալ հավասարումների լուծումը որոշ մեթոդների կիրառմամբ:

2. Հավասարումների լուծում ֆունկցիոնալ տեղադրության մեթոդով

Ֆունկցիոնալ տեղադրությունը բարդ դպրոցական խնդիրների լուծման ամենատարածված մեթոդներից մեկն է: Նրա էությունը կայանում է նոր փոփոխականի ներմուծման մեջ: Հիմնականում, ֆունկցիոնալ տեղադրությամբ լուծվող խնդիրների բարդությունը կայանում է նրանում, որ հաճախ դժվար է կռահել տեղադրության տեսքը:

Հավասարումների լուծման հաջորդ մեթոդը եռանկյունաչափական տեղադրությունն է, որը նախորդի մասնավոր դեպքն է: Այն ոչ ստանդարտ մեթոդ է, և նրա միջոցով լուծվում են բարդ, բազմակի քայլեր պահանջող խնդիրներ [3]:

Ստորև բերված հավասարումները լուծված են ֆունկցիոնալ տեղադրության միջոցով:

Խնդիր 1. Լուծել $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$ հավասարումը:

Լուծում: Կատարելով $y = \log_3 x$ նշանակումը կստանանք՝

$$x = 3^y, \quad 1 + \sqrt{x} = 1 + (\sqrt{3})^y,$$

և տրված հավասարումը կընդունի

$$\log_2(1 + (\sqrt{3})^y) = \log_3 3^y = y$$

տեսքը : Այնուհետև՝

$$1 + (\sqrt{3})^y = 2^y,$$

հավասարման երկու մասերը, բաժանելով 2^y -ի վրա, կստանանք՝

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1$$

կամ

$$(\sin 30^\circ)^y + (\cos 30^\circ)^y = 1,$$

այստեղից, $y < 2$ դեպքում կստանանք՝

$$(\sin 30^\circ)^y + (\cos 30^\circ)^y < (\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1,$$

իսկ $y > 2$ դեպքում՝

$$(\sin 30^\circ)^y + (\cos 30^\circ)^y > (\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1,$$

հետևաբար՝ $y = 2$:

Տեղադրելով այն մեր նշանակման մեջ՝ կգտնենք տրված հավասարման լուծումը՝

$$x = 3^y = 3^2 = 9:$$

Խնդիր 2. Լուծել $8x^3 - 6x - 1 = 0$ հավասարումը :

Լուծում: Նկատենք, որ $x = 0$ հավասարման արմատ չէ, և բաժանելով երկու մասերը $2x$ վրա՝ կստանանք՝

$$4x^2 = 1/2x + 3:$$

Եթե $x < -1$ կամ, ստացված հավասարման ձախ մասը մեծ կլինի 4-ից, իսկ աջ մասը՝ փոքր: Հետևաբար, արմատները գտնվում են $-1 \leq x \leq 1$ հատվածում: Հաշվի առնելով, որ $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$, և ընտրելով $x = \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ տեղադրությունը, մեր հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$8\cos^3 \alpha - 6\cos \alpha - 1 = 0:$$

Ստացված հավասարման երկու մասերը բաժանելով 2-ի վրա՝ կստանանք՝

$$4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha - 1/2 = 0,$$

այստեղից՝

$$\cos 3\alpha = 1/2,$$

$\alpha = \frac{\pi}{9}(6n \pm 1)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ հատվածին պատկանող արմատները կլինեն՝

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{9}, \alpha_2 = \frac{5\pi}{9}, \alpha_3 = \frac{7\pi}{9},$$

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{9}, x_2 = \cos \frac{5\pi}{9}, x_3 = \cos \frac{7\pi}{9}:$$

Խնդիր 3: Լուծել $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$ հավասարումը [4]:

Լուծում: Տրված հավասարումը գրառենք հետևյալ կերպ՝

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 2 + 5} = \sqrt{2(x^2 - x + 2) + 17}:$$

Կատարելով

$$y = x^2 - x + 2 > 0$$

ֆունկցիոնալ տեղադրություն՝ կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\sqrt{y} + \sqrt{y + 5} = \sqrt{2y + 17},$$

որտեղից՝

$$y + 2\sqrt{y^2 + 5y} + y + 5 = 17,$$

և լուծելով $\sqrt{y^2 + 5y} = 6$ հավասարումը՝ կստանանք՝ $y_1 = 4, y_2 = -9$:

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $y > 0$, կստանանք՝

$$x^2 - x + 2 = 4, \quad x_1 = -1, x_2 = 2:$$

Խնդիր 4: Լուծել $x^2 - \frac{4}{5x} = 1 + \frac{16}{25}$ հավասարումը [5]:

Լուծում: Տրված հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$x^2 - \frac{16}{25} = 1 + \frac{4}{5x}:$$

Այնուհետև՝

$$\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{4}{5}\right):$$

Այստեղից՝ $x + \frac{4}{5} = 0, x_1 = -\frac{4}{5}$ և $x - \frac{4}{5} = \frac{1}{x}$ կամ $5x^2 - 4x - 5 = 0,$

որի լուծումներն են՝ $x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{29}}{5}:$

3. Հանրահաշվական հավասարումների լուծումը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (ԱԸԲ) գտնելու մեթոդով

5-րդ և ավելի բարձր կարգի հանրահաշվական հավասարումների լուծման համար բանաձևեր չկան: 19-րդ դարում նորվեգացի երիտասարդ մաթեմատիկոս Նիլս Աբելի կողմից ապացուցվել է, որ հինգերորդ և ավելի

բարձր աստիճանի հանրահաշվական հավասարումները հնարավոր է լուծել ռադիկալներով, սակայն համարյա միաժամանակ իրարից անկախ ֆրանսիացի հրաշալի մաթեմատիկոս Էվարիստ Գալուան շատ ավելի առաջ գնաց՝ գտնելով անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ՝ ռադիկալներով հանրահաշվական հավասարման լուծումները գտնելու համար: Բայց ամենաարժեքավորը նույնիսկ այդ արդյունքը չէ, այլ այն մեթոդները, որոնցով Գալուան կարողացավ այն ձեռք բերել: Լուծելով այդ խնդիրը նա դրեց ժամանակակից հանրահաշվի հիմքերը, ներմուծեց այնպիսի հիմնարար հասկացություն, ինչպիսին է խումբը:

5-րդ կարգի հանրահաշվական հավասարման լուծումը հատուկ մեթոդով բերված է ստորև: Այն հիմնված է բազմանդամների ԱԸԲ [6, 7] գաղափարի հիման վրա:

Խնդիր 5: Լուծել $x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 = 0$ հավասարումը:

Լուծում: Դիցուք տված է $f(x) = 0$ հանրահաշվական հավասարումը:

f բազմանդամի ածանցյալը նշանակենք f' , իսկ d_1 -ով՝ f և f'

բազմանդամների Ա.Ը.Բ., նմանապես, d_2 -ով՝ d_1 և d_1' -ի ամենամեծ

ընդհանուր բաժանարարը, d_3 -ով՝ d_2 և d_2' -ի ԱԸԲ և այլն, մինչև որ ստացվի 0 աստիճանի d_s բազմանդամը:

Դիցուք

$$v_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)}, \quad v_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)}, \dots, v_s(x) = \frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)},$$

այստեղից՝

$$F_1(x) = \frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \quad F_2(x) = \frac{v_2(x)}{v_1(x)}, \dots, F_s(x) = v_s(x):$$

Այնուհետև դժվար չէ գտնել $F_1(x), F_2(x), \dots, F_s(x)$ բազմանդամների արմատները, և, ի վերջո, բազմանդամի արմատները կլինեն $f(x)$ -ի պարզ արմատներ, $F_2(x)$ -ի արմատները՝ $f(x)$ -ի կրկնակի արմատներ և այլն [5]:

Դիտարկենք $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը՝ $f'(x) = 5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28$:

Այնուհետև, համաձայն վերևում շարադրված ալգորիթմի, գտնում ենք բազմանդամների ԱԸԲ՝ d_1, d_2, d_3 :

$$d_1(x) = x^2 + 4x + 4, \quad d_2(x) = x + 2, \quad d_3(x) = 1,$$

և

$$v_1(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2, \quad v_2(x) = x + 2, \quad v_3(x) = x + 2,$$

և, վերջապես,

$$F_1(x) = x^2 + 1, \quad F_2(x) = 1, \quad F_3(x) = x + 2,$$

$$x^2 + 1 = 0, x = \pm i \quad \text{և} \quad x + 2 = 0, x = -2 :$$

Այսպիսով, բազմանդամն ունի $\pm i$ պարզ արմատները, և -2 ՝ 3-պատիկ արմատը:

Գրականություն

1. Д.Пойа, Как решать задачу, Москва , 1991, 216с.
2. Д.Пойа, Математическое открытие, Москва, 2010, 448с.
3. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н., Как научиться решать задачи, 1989.
4. Спрун В.П., Математика для старшеклассников, Москва , 2008, 268 с.
5. Проскуряков И.В., А.П.Мишина, Высшая алгебра, Москва, 1962
6. Յու. Մ. Մովսիսյան, 'Բարձրագույն հանրահաշիվ և թվերի տեսություն', Երևան, 2008թ, 729 էջ:
7. Հ. Ս. Միքայելյան, Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց 2, «Էդիթ պրինթ», հրատարաչություն, Երևան, 2004թ, 349 էջ:

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հ.Սահակյանը: