

УДК 512

Математика

Георгий СААКЯН

к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики, АрГУ.

E-mail: ter_saak_george@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Գ. Հ. Սահակյան

**ՂԱՎԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ**

Աշխատանքում ամբողջ թվային առանցքի վրա անընդհատ և
ղրական գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ
հավասարումների համակարգերի համար դիտարկվում են
լուծումների որոշ հատկությունները:

Բանալի բառեր՝ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների
համակարգ, լուծումների հատկությունները

В работе рассматриваются некоторые свойства решений линейной
однородной системы дифференциальных уравнений с
положительными и непрерывными на всей числовой оси
коэффициентами.

Ключевые слова: система линейных дифференциальных уравнений,
свойства решений

G. H. Sahakyan

**ON SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A LINEAR
HOMOGENEOUS SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH A POSITIVE COEFFICIENTS**

The paper considers the some properties of solutions of a linear
homogeneous system of differential equations with a postive and
continuous on the whole numerical line coefficients.

Key words: system of linear differential equations, properties of solutions

1. Введение

Рассматривается следующая линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на всей числовой прямой коэффициентами [1])

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}, \quad a_{ij}(t) \geq 0, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Известно ([1], [4]), что компоненты всякого решения системы (1) являются непрерывными на всей числовой прямой функциями. Если воспользоваться преобразованием ([2])

$$y_i(t) = z_i(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a_{ii}(\tau) d\tau \right), \quad (2)$$

то система (1) преобразуется в равносильную систему

$$\mathbf{z}' = \mathbf{B}(t)\mathbf{z}, \quad (3)$$

в которой коэффициенты матрицы $\mathbf{B}(t)$ определяются соотношениями:

$$b_{ij}(t) = a_{ij}(t) \exp \left(\int_{t_0}^t (a_{jj}(\tau) - a_{ii}(\tau)) d\tau \right), \quad (4)$$

и, в частности, диагональные элементы матрицы $\mathbf{B}(t)$ окажутся равными нулю. С другой стороны, из формул (4) следует, что в результате такого преобразования знаки коэффициентов матрицы $\mathbf{A}(t)$ сохранятся в матрице $\mathbf{B}(t)$. Заметим также, что если компонента $z_i(t)$ какого-либо решения $\mathbf{z}(t)$ системы (3) принимает только положительные значения, то из возрастания этой компоненты будет следовать и возрастание соответствующей ей компоненты $y_i(t)$. Последнее будет следовать из соотношений (2) при $y_i(t) > 0$ и $z_i'(t) > 0$, так как при этом будем иметь

$$z_i'(t) = \left(y_i(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a_{ii}(\tau) d\tau \right) \right)' = y_i'(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a_{ii}(\tau) d\tau \right) - y_i(t) a_{ii}(\tau) \exp \left(- \int_{t_0}^t a_{ii}(\tau) d\tau \right) > 0,$$

откуда, разделив неравенство на выражение $\exp \left(- \int_{t_0}^t a_{ii}(\tau) d\tau \right)$, получим, что

$$y_i'(t) > y_i(t)a_{ii}(\tau) > 0.$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что при рассмотрении вопросов монотонности компонент решений системы (1) в рассматриваемом случае, не теряя общности рассуждений, можно ограничиться случаем, когда диагональные элементы матрицы $A(t)$ равны нулю. Таким образом, в дальнейших обсуждениях мы будем предполагать, что коэффициенты $a_{ii}(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$.

Определение 1. Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим на всей числовой прямой ([3]), если каждая из его компонент имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности; в противном случае называется неосциллирующим.

Определение 2. Система (1) называется осциллирующей на всей числовой прямой ([3]), если каждое ее решение является осциллирующим; в противном случае система называется неосциллирующей.

2. Основные результаты

Имеет место

Теорема 1. Компоненты всякого решение системы (1) с положительными начальными значениями являются всюду возрастающими функциями.

Доказательство. Для простоты изложения и ясности предлагаемого доказательства ограничимся случаем, когда матрица $A(t)$ - четырехмерная. Процесс доказательства в общем случае проводится аналогично. Предположим, что

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} \text{ - решение системы (1), удовлетворяющее условию}$$

$$y_i(t_0) > 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

Запишем систему (1) в раскрытом виде, а именно

$$\begin{cases} y_1' = a_{12}(t)y_2 + a_{13}(t)y_3 + a_{14}(t)y_4, \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{23}(t)y_3 + a_{24}(t)y_4, \\ y_3' = a_{31}(t)y_1 + a_{32}(t)y_2 + a_{34}(t)y_4, \\ y_4' = a_{41}(t)y_1 + a_{42}(t)y_2 + a_{43}(t)y_3. \end{cases} \quad (5)$$

Из системы (5) в силу наших предположений следует, что все компоненты решения в точке t_0 возрастают. Не теряя общности рассуждений, допустим теперь, что одна из компонент решения системы (5), например, $y_1(t)$, не сохраняет характер монотонности. Для этого предположим, что $y_1'(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_1)$ и $y_1'(t) < 0$

при $t \in (t_1, t_1')$, и, следовательно, $y_1'(t_1) = 0$ в силу непрерывности $y_1(t)$. Заметим, что

$$y_1(t) > 0 \quad (6)$$

на интервале $[t_0, t_1)$. Тогда из первого уравнения системы (2) будем иметь

$$a_{12}(t_1)y_2(t_1) + a_{13}(t_1)y_3(t_1) + a_{14}(t_1)y_4(t_1) = 0,$$

откуда будет следовать, что на некотором интервале, например при $t \in (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)$, хотя бы одно из слагаемых отрицательно. Не теряя общности рассуждений, допустим, что

$$y_2(t) < 0, \quad t \in (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1).$$

Поскольку $y_2(t_0) > 0$, то в силу непрерывности $y_2(t)$, найдется точка $t_2 \in (t_0, t_1 - \varepsilon_1)$ так, что

$$y_2'(t_2) = 0.$$

Тогда из второго уравнения системы (5) получим, что

$$a_{21}(t_2)y_1(t_2) + a_{23}(t_2)y_3(t_2) + a_{24}(t_2)y_4(t_2) = 0.$$

Так как $y_1(t_2) > 0$, то хотя бы одно из слагаемых $a_{23}(t_2)y_3(t_2)$ и $a_{24}(t_2)y_4(t_2)$ должно быть отрицательным на некотором интервале $(t_2 - \varepsilon_2, t_2 + \varepsilon_2)$. Предположим, что на этом интервале

$$y_3(t) < 0.$$

Аналогично вышеприведенным рассуждениям мы придем к выводу, что найдется точка $t_3 \in (t_0, t_2 - \varepsilon_2) \subset (t_0, t_1 - \varepsilon_1)$ такая, что

$$y_3'(t_3) = 0.$$

Тогда из третьего уравнения системы (5) получим, что

$$a_{31}(t_3)y_1(t_3) + a_{32}(t_3)y_2(t_3) + a_{34}(t_3)y_4(t_3) = 0,$$

и, поскольку

$$y_1(t_3) > 0, \quad y_3(t_3) > 0,$$

то из последнего равенства найдем, что

$$y_4(t) < 0$$

на некотором интервале $(t_3 - \varepsilon_3, t_3 + \varepsilon_3)$. И, вновь повторив наши рассуждения, мы найдем, что существует точка $t_4 \in (t_0, t_3 - \varepsilon_3)$, для которой

$$y_4'(t_4) = 0.$$

Тогда из первого уравнения системы (5) будем иметь, что

$$a_{12}(t_4)y_1(t_4) + a_{13}(t_4)y_3(t_4) + a_{14}(t_4)y_4(t_4) = 0,$$

откуда найдем, что на некотором интервале, содержащемся в интервале $[t_0, t_1)$

$$y_1(t) < 0.$$

Последнее противоречит условию (6), что и доказывает теорему.

Из утверждения теоремы 1 непосредственно вытекают.

Следствие 1. Компоненты всякого решения системы (2) с положительными начальными значениями в точке t_0 принимают на интервале $[t_0, +\infty)$ лишь положительные значения.

Следствие 2. Системы (2) на всей числовой прямой является неосциллирующей.

Действительно, согласно теореме 1, частные решения системы (1) с положительными начальными значениями в точке t_0 , будут принимать на интервале $[t_0, +\infty)$ лишь положительные значения, и, следовательно, эти решения не могут иметь последовательность нулей, стремящейся к бесконечности.

Теорема 2. Для всякого решения системы (1) $y(t)$ с положительными начальными данными в точке t_0 выполняется неравенство

$$\|y\| \leq C \exp\left(\frac{1}{8} \int_{t_0}^t \|A\| d\tau\right), \quad (7)$$

где $C = \|y\|_{t=t_0}$.

Доказательство. Предположим вновь, что $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ – решение системы

(5), удовлетворяющее начальным условиям $y_i(t_0) > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Умножив каждое i -ое ($i = 1, 2, \dots, n$) уравнение системы на y_i , а затем сложив полученные, придем к следующему уравнению

$$(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)' = \frac{1}{2} [(a_{12}(t) + a_{21}(t))y_1y_2 + (a_{13}(t) + a_{31}(t))y_1y_3 + \dots + (a_{n-1,n}(t) + a_{n,n-1}(t))y_{n-1}y_n]. \quad (8)$$

Далее, воспользовавшись очевидным неравенством

$$x(t)y(t) \leq \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)), \quad (9)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)' \right| &\leq \frac{1}{4} |a_{12}(t) + a_{21}(t)|(y_1^2 + y_2^2) + |a_{13}(t) + a_{31}(t)|(y_1^2 + y_3^2) + \dots + \\ &\quad + |a_{n-1,n}(t) + a_{n,n-1}(t)|(y_{n-1}^2 + y_n^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} |a_{12}(t) + a_{21}(t)|(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) + |a_{13}(t) + a_{31}(t)|(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) + \dots \\ &\quad + \\ &\quad + |a_{n-1,n}(t) + a_{n,n-1}(t)|(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|) (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Введем обозначение

$$u(t) = \|y\|^2 = \sum_{k=1}^n y_k^2(t), \quad (11)$$

тогда неравенство (9) запишется в виде

$$|u'(t)| \leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|) u(t). \quad (12)$$

Примем

$$\|A\| = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (|a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)|).$$

Тогда, поскольку, согласно вышеприведенным рассуждениям, а также следствию 1, $u(t) > 0$ и $u'(t) > 0$, то неравенство (12) можно записать в виде

$$u'(t) \leq \frac{1}{4} \|A\| u(t),$$

или

$$\frac{(u'(t))'}{u(t)} \leq \frac{1}{4} \|A\|.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах от t_0 до t , и, учитывая (11), получим

$$\|y\| \leq C \exp \left(\frac{1}{8} \int_{t_0}^t \|A\| d\tau \right),$$

где $C = \|y\|_{t=t_0}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Для всякого решение системы (1) $y(t)$ с положительными начальными значениями в точке t_0 $\|y\|$ является возрастающей функцией на интервале $[t_0, +\infty)$.

Доказательство следует из соотношения (8) и утверждения теоремы 1.

Следствие 2. Произведение компонент всякого решение системы (1) $y(t)$ с положительными начальными значениями в точке t_0 стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Предположим, что $y(t)$ – решение системы (1) с начальными условиями $y_i(t_0) > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, согласно следствию из теоремы 1, компоненты рассматриваемого решения будут положительными на всей числовой прямой. Умножив первое уравнение системы на $y_2 y_3 \dots y_n$, второе уравнение на $y_1 y_3 \dots y_n$, и так далее, последнее - на $y_1 y_2 \dots y_{n-1}$, а затем сложив полученные, будем иметь

$$\begin{aligned} (y_1 y_2 \dots y_n)' &= (a_{12}(t) + a_{21}(t)) y_3 y_4 \dots y_n (y_1^2 + y_2^2) + (a_{13}(t) + a_{31}(t)) y_2 y_3 \dots y_n (y_1^2 + y_3^2) + \\ &+ (a_{n-1,n}(t) + a_{n,n-1}(t)) y_1 y_2 \dots y_{n-2} (y_{n-1}^2 + y_n^2). \end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись неравенством (9), а также учитывая положительность компонент решения, получим

$$\begin{aligned} (y_1 y_2 \dots y_n)' &\geq 2 \left(\sqrt{a_{12}(t) a_{21}(t)} y_1 y_2 \dots y_n + \sqrt{a_{13}(t) a_{31}(t)} y_1 y_2 \dots y_n + \right. \\ &\left. + \sqrt{a_{12}(t) a_{21}(t)} y_1 y_2 \dots y_n \right) = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \sqrt{a_{ij}(t) a_{ji}(t)} y_1 y_2 \dots y_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим

$$v(t) = y_1(t) y_2(t) \dots y_n(t) = \prod_{i=1}^n y_i(t),$$

тогда неравенство (13) запишется в виде

$$v' \geq 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \sqrt{a_{ij}(t) a_{ji}(t)} v,$$

проинтегрировав которое в пределах от t_0 до t , получим неравенство

$$v(t) \geq C e^{a(t)}, \quad (14)$$

в котором $C > 0$, а

$$a(t) = 2 \int_{t_0}^t \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \sqrt{a_{ij}(\tau) a_{ji}(\tau)} d\tau.$$

Поскольку подинтегральное выражение в этом соотношении положительно, то функция $a(t)$ является возрастающей, и, следовательно, при $t \rightarrow \infty$ будем иметь $a(t) \rightarrow \infty$. В этом случае из неравенства (14) будет следовать, что и $v(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Ниже, на рисунке, приводятся графические интерпретации утверждений доказанных теорем на примере одного частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = 0.02ty_2 + 0.06(t+1)y_3 + 0.008t^2y_4, \\ y_2' = 0.03y_1 + 0.05ty_3 + 0.01(2t+1)y_4, \\ y_3' = 0.05ty_1 + 0.015y_2 + 0.05y_4, \\ y_4' = 0.005t^2y_1 + 0.06ty_2 + 0.037y_3 \end{cases} \quad (14)$$

с начальными условиями: $y_1(1) = 25, y_2(1) = 10, y_3(1) = 10, y_4(1) = 20$ ($t_0 = 1$), на отрезке $[1, 10]$, построенные в среде Mathcad (на рисунке y_0 соответствует компоненте y_1 , y_1 – компоненте y_2 , y_2 – компоненте y_3 , а y_3 – компоненте y_4).

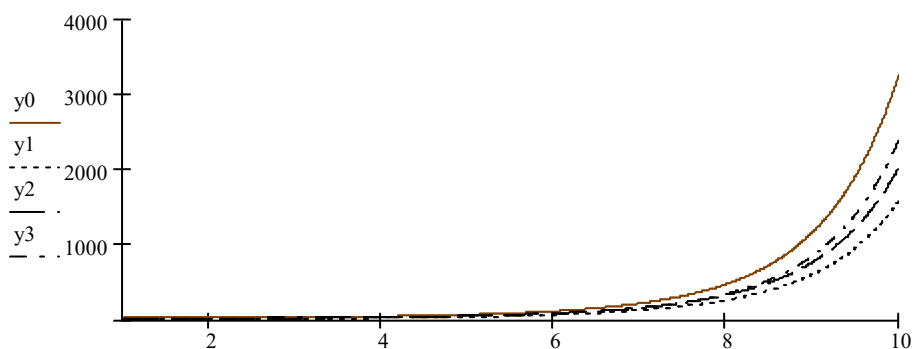


Рис. Графики компонент $y(t)$ – частного решения системы (14)

Լիտերատուրա

1. **Камке Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, -576 с.
2. **Саакян Г.Г.** *О нулях компонент решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений.* Сборник трудов IV Международной научной конференции “Математика.Образование. Культура”, г.Тольятти, 2009, стр.32-35.
3. **G.H.Sahkayn.** *On some classes of non-oscillatory homogeneous system of ordinary differential equations.* Advances in Differential Equations and Control Processes. Pushpa Publishing House, Allahabad, India. 2015, pp. 107-123.
4. **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2007, -362.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.դ. Ա. Մ. Խաչատրյանը: