ՀՏԴ 004(519:628)

Ինֆորմատիկա

Сандрян С.Н.
к. ф.-м.н. доцент, Прикладная математика и информатика
E-mail: sandrun@yandex.ru,com:097745598

КРИТЕРИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАСХОДОВ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Ս.Սանդրյան

ԲԱՐԴ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՂՆԵՐԻ ԾԱԽՍԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՅԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Բարդ համակարգերում օգտագործողների միջև ֆինանսական ծախսերի «արդար» բաշխման խնդիրը հոդվածում առաջարկվում է լուծել՝ օգտագործելով նվազագույն դիսպերսիայի սկզբունքը, որը կարող է կիրառվել նմանատիպ տնտեսական խնդիրներում:

Բանալի բառեր՝ *բարդ համակարգ, պատահական հոսք, օպտիմալացման խնդիր, մաթեմատիկական սպասում, դիսպերսիա, Լագրանժի մեթոդ, պատահական մեծություն, թվային բնութագիր:*

В сложных системах для «справедливого» распределения финансовых расходов между ее пользователями в работе предлагается решить эту проблему с помощью критерий минимальной дисперсии, который можно применять в различных подобных экономических задач.

Ключевые слова: *Сложная система, случайный поток, оптимизационная задача, математическое ожидание, дисперсия, метод Лагранжа, случайная величина, числовая характеристика.*

CRITERIA FOR THE MINIMUM DISPERSION OF THE DISTRIBUTION OF COSTS BY USERS OF COMPLEX SYSTEMS

Key words: *Complex system, random flow, optimization problem, mathematical expectation, dispersion, Lagrange method, random variable, numerical characteristic.*

Экономическая эффективность использования сложных систем (систем массового обслуживания различных конфигураций, социально- экономических систем и т.д.) зависит от принципа «справедливого» распределения финансовых расходов между ее пользователями.

В общем случае в сложную систему поступают n независимых случайных потоков вызовов [1]. Вызовы κ-го потока $k = 1,2,\dots,n$ требуют некоторого «внимания» (обслуживания) со стороны системы. Обслуживание вызовов разных потоков можно оценить денежными единицами, величина которых, естественно, должна быть зависимой от длительности времени пребывания вызовов в системе, что в большинстве случаев описывается с помощью случайных величин.

Обозначим случайными величинами $W_k, k = 1,2,\dots,n$ время пребывания вызовов κ-го потока в системе. Основные числовые характеристики случайной величины $W_k, k = 1,2,\dots,n$ обозначим символами**:**

$$M_k = M[W_k];\ D_k = D[W_k];$$

где M – знак математического ожидания, D – знак дисперсии.

Нахождение числовых характеристик для случайных величин

$W_k, k = 1,2,\dots,n$ представляет собой самостоятельную задачу, которая в определенных условиях изучается в ([1], [2]).

С экономической точки зрения возникает задача разработки оптимального критерия «справедливого» распределения расходов системы между ее пользователями.

Пусть известно, что функционирование системы за единицу времени составляет μ условной денежной единицей. Обозначим через C_k – долю оплаты за единицу времени пребывания в системе вызовов k-го потока.

Для неизвестных величин $C_k > 0, k = 1,2,\dots,n$ естественно требовать следующее ограничение:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = 1 \tag{1}$$

Поскольку длительность времени пребывания k -го вызова в системе определяется случайной величиной W_k, то значение суммарной оплаты со стороны пользователей определяется также случайной величиной, которую можно представить по формуле:

$$W(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu C_k W_k.$$

Постановка задачи. В сложных системах для оценки экономической эффективности расходов требуется разрабатывать критерий «справедливого» распределения расходов между её пользователями.

Математический суть поставленной задачи заключается в следующем: найти «справедливое» распределение чисел $C_1, C_2, \dots, C_n$, удовлетворяющее условию (1).

В данной работе оценку оптимального распределения расходов системы предлагается провести на основе принципа минимальной дисперсии случайной величины $W(n)$. В этом и заключается новизна работы.

Суть этого принципа следующая: распределение чисел $C_1, C_2, \dots, C_n$, удовлетворяющее условию (1) считается «справедливым», если дисперсия случайной величины $W(n)$ минимальная.

Тогда получаем следующую оптимальную задачу:

$$\min_{C_k} D\left[\sum_{k=1}^{n} \mu C_k W_k\right] \qquad (2)$$

при условии, что $\sum_{k=1}^{n} C_k = 1.$

Решение задачи.

В силу независимости поступления потоков вызовов и основных свойств дисперсии следует:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} \mu C_k W_k\right] = \mu^2 \sum_{k=1}^{n} C_k^2 D_k$$

Так как μ - заданная постоянная величина, то она не влияет на решение минимизационной задачи, следовательно, исходную задачу упрощается к виду:

$$\min_{C_k}\left[\sum_{i=1}^{n} C_k^2 D_k\right]$$

при условии, что $\sum_{k=1}^{n} C_k = 1.$

Так как минимизационная задача рассматривается при условии (1), то для её решения будем применять метод неопределенного множителя – метод Лагранжа [3].

Для этого построим функцию Лагранжа:

$$F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} C_k^2 D_k + \lambda\left(1 - \sum_{k=1}^{n} C_k\right),$$

здесь λ неопределенный коэффициент.

Теперь вычислим частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial C_k} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2C_k D_k - \lambda = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k = 1 \end{cases}$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \dots, C_n$, получаем:

$$C_k = \frac{\lambda}{2D_k} \quad \text{для } k=1,2,\dots,n\,. \qquad (3)$$

Неопределенный коэффициент λ находим из условия (1):

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2D_k}} \qquad (4)$$

Для упрощения формулы (3) введем обозначения (k=1,2,…,n)

$\rho_k = \frac{1}{2D_k}$.

Тогда, исходя из (3) и (4), согласно критерию минимальной дисперсии «справедливое» распределение доли оплаты расходов за единицу времени пребывания в системе определяется по формулам (k=1,2,…,n):

$$C_k = \frac{\rho_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho_k} \tag{5}$$

Результаты работы.

Справедливое распределение по формуле (5) является основным результатом данной работы.

В работе предлагается критерий минимальной дисперсии, который можно применять для решения различных экономических задач.

Литература

1. **Гнеденко Б.В.**, Введение в теорию массового обслуживания // Б.В. Гнеденко – М.:Наука,1987.
2. **Фелер В.**, Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах //В.Фелер - М.:МИР, 1984.
3. **Пискунов Н.С.,** Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т. Т1 // Н.С. Пискунов - М.: Интеграл. Пресс,2001.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը։