

ՀՏԴ514.7Մաթեմատիկա**Ռոբերտ ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ****Գորիսի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և****ֆիզիկատեխնիկական գիտությունների ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ. թ.****E-mail: rubmus49@gmail.com**

ԿՈՍԻՆՈՒՍՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Աշխատանքը վերաբերում է դպրոցական երկրաչափությունից հայտնի կոսինուսների թեորեմին՝ դիտարկված էվկլիտական և հիպերբոլական հարթություններում: Առաջին դեպքում դիտարկված հարթությունը մակերևույթ է՝ հաստատուն դրական գաուսյան կորությամբ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ բացասական հաստատուն գաուսյան կորությամբ: Յուրյց է տրված, որ երբ հարթությունների կորությունները ձգտում են զրոյի, ապա սահմանային դիրքերում համընկնում են Էվկլիդեսյան երկրաչափության դեպքին:

Բանալի բառեր՝ մետրիկա, կորություն, քանաձև, սֆերա, կոսինուսների թեորեմ

Р. Мусаелян

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Работа посвящена известной в школьной геометрии теореме косинусов рассмотрены в эллиптической и гиперболической плоскостях. В первом случае рассмотренной плоскость-поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны, а во втором-поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Показано, что когда кривизны указанных плоскостей стремятся к нулю, то в предельном случае совпадают с случаем в евклидовой геометрии.

Ключевые слова: метрика, кривизна, формула, сфера, теорема косинусов

R. Musayelyan

**THEOREM OF COSINES IN DIFFERENTIAL
GEOMETRY**

The work refers to the school geometry theorem of cosines considered in elliptic and hyperbolic planes. In the first case, the considered plane is a surface with constant positive Gaussian curvature, and in the second case, with negative constant Gaussian curvature. It is shown that when the curvatures of the planes tend to zero, then at the boundary positions they coincide with the case of Euclidean geometry.

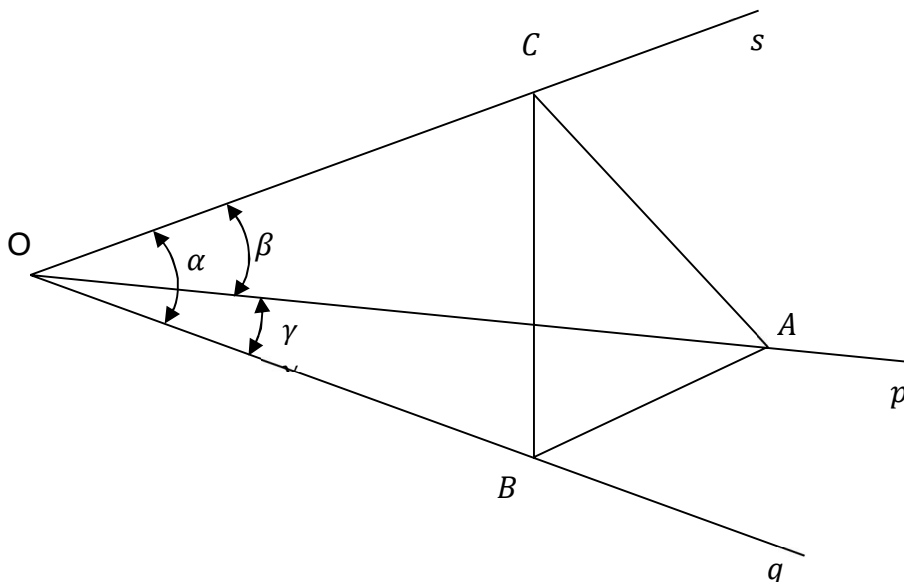
Key words: metric, curvature, formula, sphere, cose proposition.

Դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ եթե a, b, m –ը եռանկյան կողմերի երկարություններն են, իսկ A, B, C -ն համապատասխանաբար նրանց դիմացի անկյունները, ապա օրինակ՝

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

որը կոչվում է կոսինուսների թեորեմ:

Դիտարկենք O գագաթով եռանիստ անկյունը:



Եռանիստ անկյան գագաթի հարթ անկյունների համար կատարենք նշանակումներ՝ $\angle s, q = \alpha$, $\angle s, p = \beta$, $\angle p, q = \gamma$: Նշանակենք նաև $\angle A$ -ն p կողով, $\angle B$ -ն q կողով և $\angle C$ -ն s կողով երկնիստ անկյունները: Այդ

դեպքում կոսինուսների թեորեմը եռանիստ անկյան համար, որը համապատասխանում է (1) բանաձևով տրվածին, կգրվի այսպես՝

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos C$$

Այժմ ենթադրենք՝ O կենտրոնով, սֆերան անցնում է եռանիստի կողերին պատկանող A, B, C կետերով և թող՝ $OA = OB = OC = R$ սֆերայի շառավիղն է: Եռանիստի նիստերը սֆերայի մակերևույթի հետ հատվում են մեծ շրջանների շրջանագծերի աղեղներով: Այդ աղեղներով կազմված եռանկյունը՝ $\triangle ABC$ -ն, կոչվում է *սֆերիկ եռանկյուն*: Եռանկյան կողմերի երկարությունները նշանակելով a, b, m և օգտագործելով դպրոցից հայտնի բանաձև՝ կստանանք՝ $\alpha, \frac{a}{R}, \beta, \frac{b}{R}, \gamma, \frac{m}{R}$: Այս բանաձևերն արտահայտում են կենտրոնական անկյան, աղեղի երկարության և շառավիղի միջև եղած կապը:

Հաշվի առնելով վերը նշված բանաձևերը՝ (2) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\cos \frac{m}{R} = \cos \frac{a}{R} \cdot \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \cdot \sin \frac{b}{R} \cdot \cos C$$

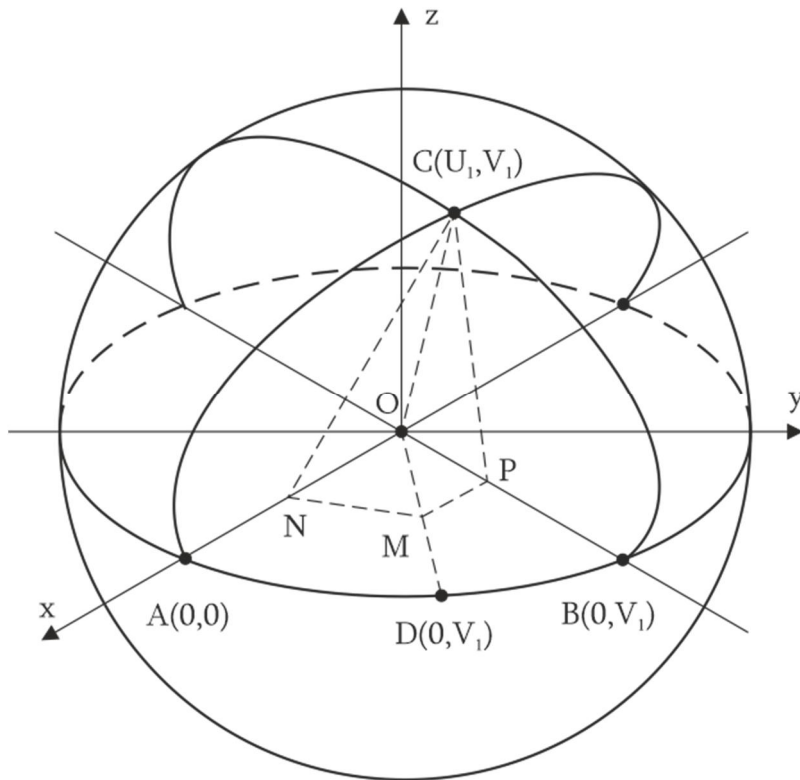
Բանաձևը կոչվում է *կոսինուսների թեորեմ R շառավիղով սֆերիկ եռանկյան համար*:

Այժմ դիֆերենցիալ երկրաչափության մեթոդներով ներկայացնենք բանաձևի այլ ապացույց:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիտարկենք R շառավիղով սֆերա և մտցնենք պարամետրական կոորդինատային համակարգ այնպես, որ կենտրոնը համընկնի սֆերայի կենտրոնին (տե՛ս [2]-ում): Դրանք են՝

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \cos v, & y &= R \cos u \sin v, & z &= R \sin u \\ D &= \left\{ u, v \mid -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi \right\} \end{aligned}$$

u, v կոորդինատները ունեն պարզ երկրաչափական մեկնաբանություններ. սֆերայի երկայնության աստիճան և լայնության աստիճան: Նկարագրվածից պարզ է, որ u, v համակարգը միշտ կարելի է մտցնել այնպես, որ ABC եռանկյան գագաթի կոորդինատները լինեն՝ $A(0, v_0), B(u_1, v_1), C(u_2, v_2)$ կոորդինատներով կետերը:



Եթե $\vec{r}$ u, v -ն սֆերայի շառավիղ վեկտորն է, ապա

$$\begin{aligned} \vec{r}'_u &= -R \cdot u \cdot v, -R \cdot u \cdot v, R \cdot u \\ \vec{r}'_v &= -R \cdot u \cdot v, R \cdot u \cdot v, v \\ \text{և } E(u, v) &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_u = R^2, F = \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v = 0, G(u, v) = \vec{r}'_v \cdot \vec{r}'_v = R^2 \end{aligned} \quad 4'$$

Հետևաբար քանադներով տրված սֆերայի առաջին քառակուսային ձևը, մետրիկական կլինի՝ (տե՛ս [3]):

$$dS^2 = R^2 du^2 + R^2 \cdot u \cdot dv^2$$

ABC սֆերիկ եռանկյան կողմերը գեոդեզիկական գծեր են և ուրեմն՝ մեծ շրջանի շրջանագծերի աղեղներ: AOC և xoy հարթությունների երկնիստ անկյունը $\angle CNM$ -ն է, իսկ $\angle MOP$ -ն՝ BOC և xoy հարթությունների: Այժմ դժվար չէ գրել AC և BC գծերի հավասարումները՝ $v = \arcsin\left(\frac{1}{c} tgu\right)$ և $v = \arcsin\left(\frac{1}{c_1} tgu\right) + v_0$, որտեղ $c_1 = tg \angle MPC = const$ և $c = tg \angle CNM = const$ (տե՛ս [2]):

Մակերևույթի առաջին քառակուսային ձևը որոշում է նրա ներքին երկրաչափությունը, այսինքն՝ իմանալով մետրիկական՝ կարելի է հաշվել

որոնելի մակերևույթի վրա (մեր դեպքում սֆերայի վրա) աղեղի երկարությունը, երկու գծերի կազմած անկյունը, նրա որևէ մասի մակերեսը, նրա գաուսյան կորությունը յուրաքանչյուր կետում և այլն (տե՛ս [3]): Մասնավորաբար, օրինակ մեր դեպքում.

$$\begin{aligned} \cup AC &= \int_0^{u_1} \sqrt{R^2 du^2 + R^2 \sin^2 u \cdot \frac{du^2}{(\sqrt{c^2 - tg^2 u})^2}} \\ &= \dots = R \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{c^2 - tg^2 u_1}}{c} \right) \end{aligned}$$

և նման ձևով՝

$$\cup BC = R \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{c_1^2 - tg^2 u_1}}{c_1} \right) \text{ տե՛ս } u$$

Այժմ անդրադառնանք բանաձևին: Դժվար չէ կատարել պարզագույն հաշվարկ և ստանալ.

$$\cos \frac{a}{R} = \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c^2} \cdot \sin^2 u_1} = \dots = \frac{1}{c_1} \sqrt{c_1^2 \cdot \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1}$$

$$\cos \frac{b}{R} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2} \cdot \sin^2 u_1} = \dots = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \cdot \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{R} &= \frac{\sqrt{c_1^2 - c^2} \cdot \sin u_1}{c_1} \\ \sin \frac{b}{R} &= \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2} \cdot \sin u_1}{c} \end{aligned}$$

Եթե այժմ նորից անդրադառնանք [2] աշխատանքին, ապա եռանկյան C անկյան համար կստանանք՝

$$\cos C = \frac{\sqrt{c_1^2 - tg^2 u_1} \sqrt{c^2 - tg^2 u_1} \cdot \cos^2 u_1}{\sqrt{c^2 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1} \sqrt{c_1^2 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1}}$$

Այս արտահայտությունը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$\cos C = \frac{\sqrt{c_1^2 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1} \sqrt{c^2 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1}}{\cos^2 u_1 \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c^2}}$$

Նորից անդրադառնալով [2] աշխատանքին՝ կստանանք՝

$$\cos \frac{m}{R} = \cos v_0 = \cos \left(\arcsin \left(\frac{1}{c} tg u_1 \right) - \arcsin \left(\frac{1}{c_1} tg u_1 \right) \right)$$

$$\frac{1}{c_1 \cdot c} \cdot \sqrt{c^2 - tg^2 u_1} \sqrt{c_1^2 - tg^2 u_1} \quad \frac{1}{c_1 \cdot c} \cdot tg^2 u_1$$

Օգտագործելով և բանաձևերը՝ բանաձևի հավասարության աջ մասի համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} & \cos \frac{a}{R} \cdot \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \cdot \sin \frac{b}{r} \cos C \\ & \frac{1}{c_1 \cdot c} \sqrt{c^2 \cdot \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1} \sqrt{c_1^2 \cdot \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1} \\ & \frac{1}{c_1 \cdot c} tg^2 u_1 \left(\sqrt{c^2 \cdot \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1} \cdot \sqrt{c_1^2 \cdot \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1} \right) \\ & = \dots \quad \frac{1}{c_1 \cdot c} tg^2 u_1 \quad \frac{1}{c_1 \cdot c} \sqrt{c^2 - tg^2 u_1} \sqrt{c_1^2 - tg^2 u_1} \end{aligned}$$

Ստացվածը համեմատելով (8) բանաձևի հետ՝ համոզվում ենք, որ (3) բանաձևի ճշմարտացիությունը ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք կեղծ սֆերա, որի շառավիղը ki է, որտեղ $i = \sqrt{-1}$: Եթե R շառավիղով սֆերայի գաուսյան կորությունը յուրաքանչյուր կետում $\frac{1}{R^2}$ է, ապա կեղծ սֆերայի կորությունը կլինի՝ $\frac{1}{ki^2} = -\frac{1}{k^2}$, որն էլ կոչվում է *Լորաջնակու հարթության (հիպերբոլական հարթության) գաուսյան կորություն*: Կոմպլեքս փոփոխականով անալիզում հայտնի են Էյլերի բանաձևերը, որոնք արտահայտում են եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների, եռանկյունաչափական ֆունկցիաների կապը (տե՛ս [4]), մասնավորաբար՝

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\sin \frac{x}{ik} = \frac{1}{i} \operatorname{sh} \left(\frac{x}{k} \right)$$

$$\cos \frac{x}{ik} = \operatorname{ch} \left(\frac{x}{k} \right)$$

Օգտագործելով (9) բանաձևերից վերջին երկուսը՝ պարզագույն հաշվարկով (3) բանաձևը կձևափոխվի հետևյալին՝

$$\operatorname{ch} \frac{m}{k} = \operatorname{ch} \frac{q}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} - \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} \cdot \cos C$$

Այս բանաձևը կոսինուսների թեորեմն է հիպերբոլական եռանկյան համար: Նշենք, որ u ՝ էլիպտական, u ՝ հիպերբոլական եռանկյունների անկյունների մեծությունները կախված չեն տարածության գաուսյան կորությունից: Այդ, օրինակ, սֆերիկ եռանկյան համար կարելի է տարրական երկրաչափության մեթոդներով ապացուցել: Սակայն այս

աշխատանքում այն ապացուցում է (7) բանաձևը, որը իրոք կախված չէ սֆերայի R շառավիղից:

Այժմ գրենք (10) բանաձևում գրառված հիպերբոլական ֆունկցիաների Թեյլորի շարքերը (տե՛ս [4]):

$$\begin{aligned} sh \frac{x}{k} &= \frac{x}{k} - \frac{x^3}{\cdot k^3} + \frac{x^5}{\cdot k^5} - \dots - \frac{x^{2n+1}}{2n! \cdot k^{2n+1}} + \dots \\ ch \frac{x}{k} &= \frac{x^2}{\cdot k^2} - \frac{x^4}{\cdot k^4} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n! \cdot k^{2n}} + \dots \end{aligned}$$

(10) բանաձևում տեղադրելով հիպերբոլական ֆունկցիաների շարքերից յուրաքանչյուրը և կատարելով համապատասխան խմբավորումներ կստանանք՝

$$\begin{aligned} m^2 + \left(\frac{m^4}{k^2} - \frac{m^6}{k^4} + \dots \right) &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \\ + \left(\frac{b^4}{k^2} - \frac{a^2 b^2}{2k^2} - \frac{a^2 b^4}{k^4} + \dots \right) &+ \left(\frac{ab^3}{3k^2} - \frac{ab^5}{k^4} + \dots \right) \cos C \end{aligned}$$

Այժմ եթե գրենք սովորական եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից $\sin \frac{x}{R}$ -ի և $\cos \frac{x}{R}$ վերլուծությունները Թեյլորի շարքի և դրանք տեղադրենք բանաձևում այնպես, ինչպես դա արվել է հիպերբոլական ֆունկցիաների դեպքում, ապա վերջնահաշվարկում կստանանք՝

$$\begin{aligned} m^2 + \left(\frac{-m^4}{R^2} - \frac{m^6}{R^4} - \dots \right) &= a^2 + b^2 - \\ - \left(\frac{b^4}{R^2} - \frac{a^2 b^2}{2R^2} + \dots \right) &- 2ab \cdot \cos C \\ + \left(\frac{ab^3}{3R^2} - \frac{ab^5}{R^4} + \dots \right) \cos C \end{aligned}$$

և արտահայտություններում m, a, b -ն՝ որպես դիտարկվող եռանկյունների կողմեր, հաստատուններ են, իսկ k -ն և R -ը՝ սֆերաների շառավիղներ, և հետևաբար կարելի է դիտարկել որպես փոփոխական մեծություններ: Պարզ է, որ և արտահայտություններում անցնելով սահմանների, երբ k -ն և R -ը ձգտում են անվերջությունների (դա նույնն է, որ դիտարկվող մակերևույթների գաուսյան կորությունները ձգտում են զրոյի) կստանանք՝

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Այսպիսով, սահմանային դիրքերում էլիպտական և հիպերբոլական հարթությունները համընկնում են էվկլիդյան հարթությանը, իսկ (3) և (10) բանաձևերը՝ (1) բանաձևին: Ստացվում է, որ բավականաչափ մեծ R

շառավղով սֆերայի վրա գեոդեզիկական եռանկյան համար կոսինուսների թեորեմը շատ քիչ է տարբերվում եվկլիդեսյան հարթության եռանկյան համապատասխան թեորեմից:

Գրականություն

6. Погорелов А.В., Геометрия, М. <<Наука>> 1983.
7. Մուսայելյան Ռ.Ծ., սինուսների թեորեման դիֆերենցիալ երկրաչափությունում. Արց. Պետ. Համալսարան. Գիտական տեղեկագիր 2/2021, էջ 20-27:
8. Поздняк Э.Г., Шикин Е.В., Дифференциальная геометрия, первое знакомство, изд. МГУ 1990.
9. Привалов И.И., Введение в теорию функций комплексного переменного, М., <<Наука>>, 1997.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել իմրագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: