УДК 517.9

Математика

Георгий СААКЯН
к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

О СВОЙСТВАХ НУЛЕЙ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Գ. Սահակյան

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԵՐԿՉԱՓ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՄՊՈՆԵՆՏՆԵՐԻ ԶՐՈՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում դիտարկվում են

$$\begin{cases} y_1' = f(t)g(t)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(t)}{g(t)}y_1, \end{cases}$$

համակարգի լուծումների կոմպոնենտների զրոների հատկությունները՝ տրված $[a,b]$ հատվածի վրա այն պայմանով, որ $f,g \in C[a,b]$ և $f(t)$ և $g(t)$ ֆունկցիաները ունեն հաստատուն նշաններ՝ դիտարկվող հատվածի վրա:

Բանալի բառեր՝ դիֆերենցիալ հավասարումների երկչափ գծային համասեռ համակարգ, լուծումների կոմպոնենտների զրոները:

В настоящей работе рассматривается поведение нулей компонент решений системы

$$\begin{cases} y_1' = f(t)g(t)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(t)}{g(t)}y_1, \end{cases}$$

на заданном отрезке $[a,b]$ при условии, что $f,g \in C[a,b]$ и функции $f(t)$ и $g(t)$ - знакопостоянны на рассматриваемом отрезке.

Ключевые слова: двумерная линейная однородная система дифференциальных уравнений, нули компонент решений.

G. Sahakyan

ABOUT PROPERTIES OF ZEROS OF COMPONENTS OF SOLUTIONS OF ONE TWO-DIMENSIONAL LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this paper, we consider the behavior of the zeros of the components of solutions of the system

$$\begin{cases} y_1' = f(t)g(t)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(t)}{g(t)}y_1, \end{cases}$$

on a given segment $[a,b]$, provided that $f, g \in C[a,b]$ and both the functions $f(t)$ and $g(t)$ are constant signs on the considered segment.

Key words: Two-dimentional linear homogenouse system of differential equations, zeros of the components of the solutions.

Рассматривается следующая двумерная линейная система дифференциланых уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f(t)g(t)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(t)}{g(t)}y_1, \end{cases}$$

в предположении, что $f, g \in C[a,b]$ и функции $f(t)$ и $g(t)$ знакопостоянны на рассматриваемом отрезке. Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема (см. [1]-[3]).

Теорема 1. *Пусть в системе*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{2}$$

$p, r \in C^2[a,b]$, $p(t) > 0, r(t) < 0$,

$$P(t) = \sqrt{-\frac{p(t)}{r(t)}},$$

1. $p'(t) \le 0,\ r'(t) \ge 0,$ $(p'(t) \ge 0,\ r'(t) \le 0),$
2. $P'(t) \ge 0$ $(P'(t) \le 0),$
3. $(\ln P(t))' \ge 0.$

Тогда, если уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(t)r(t)}\,dt = \pi k,\ k \in Z \tag{3a}$$

и

$$\int_a^t \sqrt{-p(t)r(t)}\,dt = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \qquad (2b)$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$, *причем* $n_1 = n_2 + 1$, *где* n_1 - *число корней уравнения* (2a), *а* n_2 - *уравнения* (2b), *то число нулей первой компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.1) *на* $[a,b]$ *совпадет с числом корней уравнения* (2a) *или будет отличаться на единицу.*

Если обозначить

$$M = \int_a^b q(t)\,dt,$$

где

$$q(t) = \sqrt{-p(t)r(t)},$$

то тогда, очевидно, что

$$n_1 = \left[\frac{M}{\pi}\right] + 1, \quad n_2 = \left[\frac{M}{\pi} - \frac{1}{2}\right] + 1.$$

Перейдем теперь к рассмотрению системы в предположении, что:

1. $f, g \in C^2[t_0, +\infty),\ f(t) > 0,\ g(t) > 0,$
2. $f'(t) \geq 0,\ g'(t) \leq 0,$
3. $\left(f(t)g(t)\right)' \geq 0,$
4. $g''(t)g(t) - \left(g'(t)\right)^2 \geq 0.$

В данном случае $p(t) = f(t)g(t),\ r(t) = -\dfrac{f(t)}{g(t)}$ и $P(t) = g(t)$. Следовательно, будем иметь

1. $p'(t) = \left(f(t)g(t)\right)' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \geq 0,\quad r'(t) = \dfrac{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)}{g^2(t)} \leq 0,$
2. $P'(t) = g'(t) \leq 0,$
3. $\left(\ln P(t)\right)' = \left(\ln g(t)\right)' = \dfrac{g''(t)g(t) - \left(g'(t)\right)^2}{g^2(t)} \geq 0.$

Таким образом имеют место условия теоремы 1 для любого отрезка $[a,b]$, согласно которой будем иметь: *если уравнения*

$$\int_a^t f(t)\,dt = F(t) - F(a) = \pi k,\ k \in Z, \qquad (4a)$$

и

$$\int_a^t f(t)\,dt = F(t) - F(a) = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \qquad (4b)$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$, *причем* $n_1 = n_2 + 1$, *то число нулей первой компоненты всякого нетривиального решения системы* (3) *на* $[a,b]$ *совпадет с числом корней уравнения* (4a), *или будет отличаться на единицу.* Здесь $F(t)$ - первообразная для функции $f(t)$.

Заметим, что число корней уравнения (4a) будет равно

$$n_1 = \left[\frac{F(b) - F(a)}{p}\right] + 1 = \left[\frac{F(b) - F(a)}{p}\right] + 1,$$

а число корней уравнения (4b)

$$n_2 = \left[\frac{F(b) - F(a)}{p} - \frac{1}{2}\right] + 1.$$

Отсюда будет следовать, что равенство $n_1 = n_2 + 1$ будет иметь место, если

$$\left[\frac{F(b) - F(a)}{p}\right] = \left[\frac{F(b) - F(a)}{p} - \frac{1}{2}\right] + 1.$$

Последнее возможно, если

$$\frac{F(b) - F(a)}{p} \le \left[\frac{F(b) - F(a)}{p}\right] + \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Таким образом имеет место

Теорема 2. *Пусть система* (3) *удовлетворяют условиям:*

1. $f, g \in C^2[t_0, +\infty)$, $f(t) > 0$, $g(t) > 0$
2. $f'(t) \ge 0$, $g'(t) \le 0$,
3. $\left(f(t)g(t)\right)' \ge 0$,
4. $g''(t)g(t) - \left(g'(t)\right)^2 \ge 0$,

и $F(t)$ - *первообразная для функции* $f(t)$. *Если*

$$\frac{F(b) - F(a)}{p} \le \left[\frac{F(b) - F(a)}{p}\right] + \frac{1}{2},$$

то тогда число нулей первой компоненты всякого нетривиального решения системы (3) *на отрезке* $[a,b]$ *будет равно* $\left[\frac{F(b) - F(a)}{p}\right] + 1$ *или отличаться на единицу.*

Заметим, что, условие (5), в частности, будет иметь место, если $\frac{F(b) - F(a)}{p}$ является целым числом. Из предыдущих рассуждений также следует, что если рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1' = mp(t)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{m}{p(t)}y_1, \end{cases} \qquad (6)$$

при условии, что $p(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $m>0$ выбрано так, чтобы число $\frac{lm}{p}$ оказалось бы целым, то число нулей первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы (6) на отрезке длины l будет равно $\left[\frac{lm}{p}\right]+1$ или отличаться на единицу. Таким образом можно построить систему (6) так, чтобы на любом отрезке длины l и заданном числе $n\in N$ число нулей первой компоненты всякого нетривиального решения системы (6) было бы не меньше n. Для этого достаточно потребовать выполнение условий

$$\left[\frac{lm}{p}\right]+1=n+1 \quad \text{или} \quad \left[\frac{lm}{p}\right]=n.$$

Покажем на примере, как можно смоделировать такую систему. Предположим, что $l=p$ и $n=2$. В данном случае

$$\left[\frac{lm}{p}\right]=2,$$

откуда найдем

$$m=2.$$

В качестве функции $p(t)$ возьмем, например, функцию $p(t)=t+1$. Очевидно, что функция $p(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 при $t_0=-1$, и, следовательно, число нулей первой компоненты всякого нетривиального решения системы

$$\begin{cases} y_1' = 2(t+1)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{2}{t+1}y_1, \end{cases}$$

на любом отрезке $[a,b]\subset[-1,+\infty)$ длины p будет больше или равно двух. Заметим, что при этом число нулей второй компоненты будет больше или равно 1. Ниже , на рисунке 1 приводится графическая интерпретация частного решения системы (6) на отрезке $[p,\,2p]$ при начальных условиях $y_1(0)=-1,\ y_2(0)=1$ (на рисунке $y0$ соответствует первой компоненте, а $y1$ - второй), построенная в среде Mathcad.

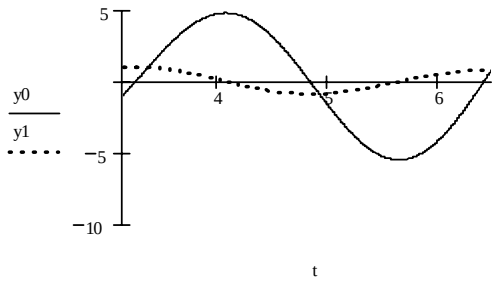

Рис. 1

Можно предложить и другой способ построения подобных систем, используя лишь степенные функции, при условии, что задан отрезок $[a,b]$. Итак, предположим, что нам задан отрезок $[a,b]$, $a \geq 0$ и требуется построить систему (1) так, чтобы первая компонента произвольного нетривиального решения системы (1) имела бы не меньше заданного числа нулей n. Определим используемые функции, например, следующим образом:

$$q(t)=t^k,\ p(t)=t\ \ r(t)=-t^{2k-1},\ t>0,\ k\geq 1.$$

Покажем, что имеют место условия теоремы 1. Имеем

1. $p,r\in C^2[a,b],\ p(t)>0,\ r(t)<0,$
2. $p'(t)=1>0,\ \ r'(t)=-(2k-1)t^{2k-2}\leq 0,$
3. $P'(t)=\left(\sqrt{-\dfrac{p(t)}{r(t)}}\right)'=\left(t^{1-k}\right)'=(1-k)t^{-k}\leq 0.$
4. $\left(\ln P(t)\right)'=\dfrac{k-1}{t^2}\geq 0$

Тогда будем иметь

$$M=\int_a^b q(t)dt=\left.\frac{t^{k+1}}{k+1}\right|_a^b=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Из этого соотношения следует, что надо подобрать значение k так, чтобы выполнялось равенство

$$n+1=\left[\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{p(k+1)}\right]\quad\text{и}\quad \frac{M}{p}<\left[\frac{M}{p}\right]+\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Покажем на конкретном примере как это можно проделать. Предположим, что $a=0,\ b=3,\ n=2$. Тогда условия (7) примут вид

$$\left[\frac{3^{k+1}}{p(k+1)}\right]=3\quad\text{и}\quad \frac{3^{k+1}}{p(k+1)}<\left[\frac{3^{k+1}}{p(k+1)}\right]+\frac{1}{2}.$$

Нетрудно путем подбора найти, что этому неравенству удовлетворяет, например, $k = 2.2$. Система (1) при этом будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1' = t y_2, \\ y_2' = -t^{3.4} y_1, \end{cases} \tag{8}$$

Ниже, на рисунке 2, приводится графическая интерпретация частного решения системы (8) при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$ (на рисунке $y0$ соответствует первой компоненте, а $y1$ - второй).

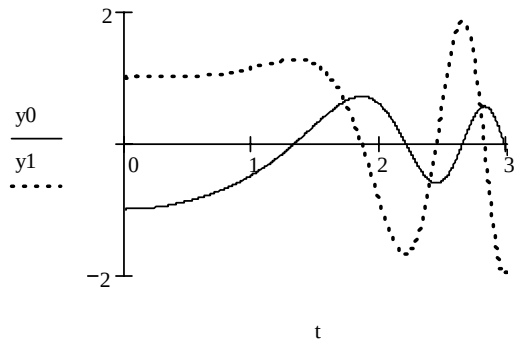

Рис. 2

Аналогичным рассуждениями можно показать, что если принять $k = 3$, то первая компонента нетривиального решения системы

$$\begin{cases} y_1' = t^5 y_2, \\ y_2' = -t y_1, \end{cases} \tag{9}$$

будет иметь на отрезке $[0,3]$ как минимум

$$\left\lfloor \frac{3^4}{4p} \right\rfloor - 1 = 5$$

нулей. Ниже, на рисунке 3, приводится график частного решения системы (9) на отрезке $[0,3]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$.

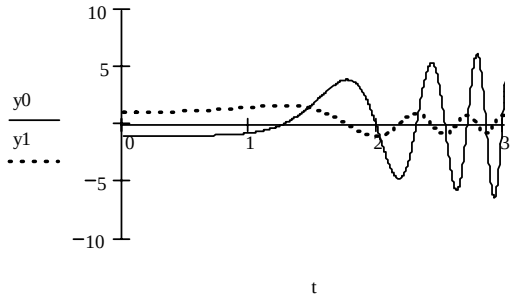

Рис. 3

Литература

3. **Саакян Г.Г.**, *О нулях решений некоторых линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка на конечном интервале.* American Scientific Journal, N 2 (2) , 2016, Vol.2, стр. 88-92.
4. **Саакян Г.Г.**, *Об осцилляции одной двумерной системы дифференциальных уравнений на конечном интервале.* Фонд содействия научному развитию “Novation”, Болгария, Варна, N2, 2016, стр. 149-153.
5. **Саакян Г.Г.**, *On a criterion for oscillation and non-oscillation of two-dimentional linear homogenous system of differential equations.* Slovak international scientific journal, N 2, 2016, p. 48-51.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնը։