УДК 512.1

Математика

Георгий САAКЯН
к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕННОСТИ В РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Գ. Սահակյան

ՈՐՈՇԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵՋ

Աշխատանքում դիտարկվում է որոշակիության մեթոդի կիրառումը որոշ երկրաչափական խնդիրների լուծման ժամանակ:

Բանալի բառեր՝ *երկրաչափակն խնդիրներ, պատկերների որոշակիություն*

В работе рассматривается применение метода определенности в решении некоторых геометрических задач.

Ключевые слова: *геометрические задачи, определенность фигур.*

G. Sahakyan

CERTAINTY METHOD IN SOLVING SOME GEOMETRIC PROBLEMS

The paper considers the application of the certainty method in solving some geometric problems.

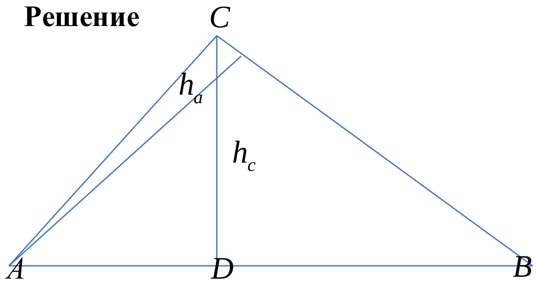
Key words: *geometric problems, certainty of figures*

При решении геометрических задач обычно используются три основных метода ([1]): геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем; алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений; комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других - алгебраическим.

Если для решения большинства алгебраических задач из школьного курса математики известны определенные алгоритмы, методы их решения, то для большинства геометрических задач таких алгоритмов и методов практически не существует. Поскольку имеющиеся в задаче данные не позволяют перейти непосредственно к вычислениям требуемых величин, то, как правило, при решении таких задач возникает вопрос-с чего начать. Для некоторых геометрическиих задач, решаемых алгебраическим способом, тем не менее удается ответить на этот вопрос - воспользоваться “методом определенности” (метод введения вспомагательного аргумента). Под определенностью фигуры будем понимать тот минимум, набор сторон и углов, при задании которых фигура однозначно определяется. Например, известно, что для определенности произвольного треугольника необходимо задать три величины – три стороны, две стороны и один угол или одна сторона и два угла. Нетрудно показать, что для определенности произвольного n-угольника необходимо задать $2n-3$ элементов (сторон, углов). Суть “метода определенности” заключается в том, что изначально вводят в рассмотрении дополнительные, недостающие для определенности фигуры величины (длины сторон, углы). Поясним это на примерах. Предположим, что в заданном треугольнике известна длина одной из сторон и двух высот. Недостающими в этом случае элементами для определенности будем считать или длины двух остальных сторон, или любые два угла, или длина любой другой стороны и какого-то из углов. Или, предположим в параллелограмме нам известны длины двух его сторон и длина одной из его высот. Нетрудно заметить, что для определенности параллелограмма нужно иметь значения трех величин –двух сторон и угла. В данном случае нам необходимо при решении задачи ввести один (неважно какой) из углов параллелограмма. Введенные в начале решения задачи величины позволят применить необходимые формулы и в процессе решения будут определены, что позволит затем найти требуемые в задаче величины. Продемонстрируем вышеуказанное на конкретных примерах.

Пример 1. В треугольнике ABC заданы сторона $AB = c$, h_c и h_a. Требуется определить сторону AC.

Решение



Поскольку нам задана всего лишь одна из основных величин треугольника, то введем в рассмотрение две другие - например, $BC = a$, $\text{Ð}B = b$. Вычислив площадь треугольника двумя разными способами, будем

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

откуда найдем

$$a=\frac{c\cdot h_c}{h_a}. \qquad (1)$$

Далее, с учетом (1), из ΔACD будем иметь

$$\sin\beta=\frac{h_c}{a}=\frac{h_a}{c}.$$

Для определения AC воспользуемся теоремой косинусов

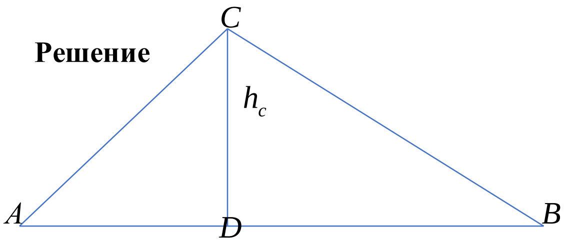
$$AC^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta=\frac{c^2h_c^2}{h_a^2}+c^2-\frac{2c^2h_c}{h_a}\sqrt{1-\frac{h_a^2}{c^2}}=\frac{c^2h_c^2+c^2h_a^2-2ch_ch_a\sqrt{c^2-h_a^2}}{h_a^2},$$

откуда

$$AC=\frac{\sqrt{c^2h_c^2+c^2h_a^2-2ch_ch_a\sqrt{c^2-h_a^2}}}{h_a}.$$

Пример 2. В треугольнике ABC заданы стороны $AB=c$, $AC=b$ и h_c. Требуется определить высоту h_a.

Решение



В данном случае нам известны две величины. Поэтому введем третью - например, $\angle A=\alpha$. Из ΔACD будем иметь

$$\sin\alpha=\frac{h_c}{b}.$$

Воспользуемся теоремой косинусов. Имеем

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cdot\sqrt{1-\left(\frac{h_c}{b}\right)^2}=b^2+c^2-2c\sqrt{b^2-h_c^2}.$$

И, следовательно,

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2c\sqrt{b^2-h_c^2}}.$$

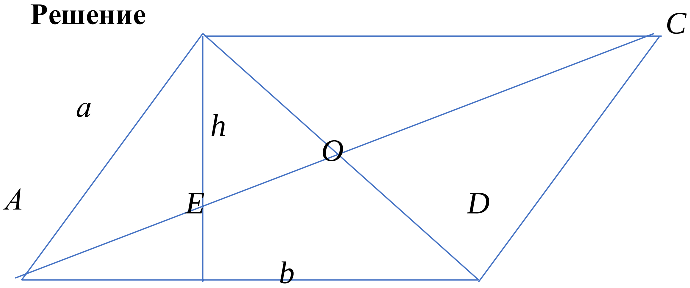
И в завершении решения, из соотношения (1) будем иметь

$$h_a=\frac{c\cdot h_c}{a}=\frac{c\cdot h_c}{\sqrt{b^2+c^2-2c\sqrt{b^2-h_c^2}}}.$$

Пример 3. В параллелограмме $ABCD$ заданы стороны $AB=c$, $AD=b$ и $BE=h$-высота, . Требуется определить $\sin\angle AOB$, где O-точка пересечения диагоналей.

B

Решение



В данном случае нам известны две величины. Для определенности параллелограмма нужны три. Поэтому введем третью величину, например, $\angle A = \alpha$.

Из ΔABE будем иметь

$$\sin\alpha = \frac{h}{a}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}.$$

Далее, по теореме косинусов найдем

$$BD^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha = a^2+b^2-2ab\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h},$$

$$AC^2 = a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha = a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}.$$

Для площади параллелограмма имеем

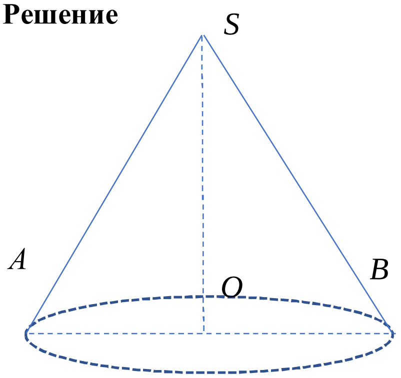
$$S = bh = \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB,$$

откуда найдем

$$\sin\angle AOB = \frac{2bh}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}}\cdot\sqrt{a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}}} = \frac{2bh^2}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2(a^2-h^2)}}.$$

Пример 4. В конусе $SAOB$ заданы: длина образующаей $SA = l$ и m-отношение высоты к радиусу основания. Требуется определить обьем конуса.

Решение



Основными, определяющими величинами конуса являются образующая, высота, радиус основания и любой из углов осевого сечения. Очевидно, что для определенности конуса достаточно задать две из этих величин, поскольку в данном случае нам известна лишь одна из них- длина образующей. В качестве третьей величины введем, например, $\angle SAO = \alpha$. Тогда мы будем иметь

$$h = l\sin\alpha, \quad R = l\cos\alpha .$$

Из соотношения $\dfrac{h}{R} = tg\,\alpha = m$ найдем $\alpha = arctg\, m$. Далее, имеем

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi (l\cos\alpha)^2 l\sin\alpha = \frac{1}{3}\pi l^3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha ,$$

Воспользуемся тригонометрическими тождествами для определения $\cos^2\alpha$ и $\sin\alpha$. Имеем

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+m^2}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} .$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3\frac{1}{1+m^2}\times\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\pi l^3 m}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}} .$$

Литература

1. https://sites.google.com › uirgeometr › metody-resenia-geometriceskih-zadac.
2. https://infourok.ru/metodi-resheniya-geometricheskih-zadach-2760325.html

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնը ։