

ՀՏԴ 004(519:628)Ինֆորմատիկա*Սերյոժա ՍԱՆԹՐՅԱՆ**ԱրՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ.**E-mail: - sandrun@yandex.ru**Աննա ԳԱԼՍՅԱՆ**ԱրՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի ասիստենտ*

ԲԻՆԱՐ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՏՐԱՆԶԻՏԻՎ ՓԱԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԵԿ ԱՊԱՑՈՒՅՑ ԵՎ ՆՐԱ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ

Հոդվածում խիստ մաթեմատիկական տրամաբանության լեզվով կատարված է բինար հարաբերության տրանզիտիվ փակման մասին հիմնական թեորեմի մեկ ապացույց, մշակված է նրա կառուցման ալգորիթմը:

Բանալի բառեր` բինար հարաբերություն, հենքային բազմություն, տրանզիտիվ փակում, համասեռ հարաբերություն, կոմպոզիցիա հարաբերություն, մաթեմատիկական ինդուկցիա, բազմությունների միավորում, բազմությունների հատում, ինդուկցիայի բազա, կոնյուկցիա, դիզյունկցիա, մատրիցա:

С. Сандрян, А. Галстян

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ О ТРАНЗИТИВНОМ ЗАМЫКАНИИ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ И ЕГО АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ

В статье на языке логики строгой математики приводится доказательство основной теоремы о транзитивном замыкании бинарного отношения, разработан алгоритм его построения.

Ключевые слова: Бинарное отношение, базовое множество, транзитивное замыкание, однородное отношение, композиционное отношение, математическая индукция, объединения множеств, пересечение множеств, база индукции, конъюнкция, дизъюнкция, матрица.

S.Sandryan, A.Galstyan

**THE BASIC THEOREM ON THE TRANSITIVE CLOSURE OF
BINARY RELATIONS ONE PROOF AND ITS CONSTRUCTION
ALGORITHM**

In the work, in the language of the logic of strict mathematics, one proof of the basic theorem on the transitive closure of a binary relation is made; an algorithm for its construction is developed.

Key words: Binary relation, base set, transitive closure, homogeneous relation, compositional relation, mathematical induction, union of sets, intersection of sets, induction base, conjunction, disjunction, matrix.

Բինար հարաբերության տրանզիտիվ փակում գործողությունն ունի մեծ կիրառություն կոդմոնորշված գրաֆներում, որն օգտագործվում է որպես մաթեմատիկական մոդել հաղորդակցության ցանցերի համար:

Տրանզիտիվ փակման մատրիցայի միջոցով հնարավոր է պարզաբանել հաղորդակցության կապի ճանապարհի առկայությունը գրաֆի ցանկացած գագաթների միջև:

Դիտարկենք համասեռ հարաբերություններ, որոնց հենքային բազմությունները նույնն են՝ $\alpha \subseteq A \times A$, որտեղ A -ն վերջավոր բազմություն է:

α բինար հարաբերությունը անվանում են *տրանզիտիվ*, եթե ճշմարիտ է $\forall(x, y, z \in A)(x \alpha y \text{ և } y \alpha z \rightarrow x \alpha z)$ պնդումը:

α բինար հարաբերության 2-րդ աստիճանը α^2 կամ կոմպոզիցիա $\alpha - \text{ն } \alpha - \text{ի}$ հետ $\alpha * \alpha = \alpha^2$ սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$x \alpha^2 y \leftrightarrow \exists(z \in A),$$

որի համար ճշմարիտ է $(x \alpha z)$ և $(z \alpha y)$ պնդումը:

Համեմատելով տրանզիտիվության և α^2 բինար հարաբերությունների սահմանումը՝ կնկատենք, որ նրանք ունեն ընդհանրություններ, հետևաբար նրանց միջև գոյություն ունի փոխկապվածություն, որն արտահայտվում է տրանզիտիվության հայտանիշով[1]:

Թեորեմ 1. Բինար հարաբերությունը A բազմության վրա տրանզիտիվ է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա քառակուսին պարունակվում է իր մեջ՝ $\alpha^2 \subseteq \alpha$:

Եթե α հարաբերությունը A բազմության վրա չի օժտված որևէ P հատկությամբ, ապա նրա տարրերի միջև ավելացնելով նոր կապեր՝ կարելի է ստանալ նոր հարաբերություն (α^*) , որը կբավարարի նշված հատկությանը: Պարզ է, որ ելքային α հարաբերությունը կլինի ենթաբազմություն ընդլայնված հարաբերության համար, այսինքն՝ $\alpha \subseteq \alpha^*$:

α -ի ընդլայնումը α^* -ի անվանում են α -ի *փակման գործողություն*[2]:

Օրինակ, դիտարկենք $A = \{1, 2, 3, 4\}$ բազմության համար բինար հարաբերություն.

$$\alpha = \{(2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4)\}:$$

Կատարել փակում գործողությունը տրանզիտիվ հատկության նկատմամբ:

Լուծում: Նկատենք, որ իրոք α -ն չի օժտված տրանզիտիվ հատկությամբ: Ունենալով (1, 2) և (2, 3) կապերը տրանզիտիվ փակման համար՝ պետք է ավելացնենք (1, 3) գույգը: Ավելացրած գույգը նշանակենք (1, 3)⁺-ով:

Դիտարկենք (2, 3) և (3, 1) գույգերը և ավելացնենք (2, 1)⁺, (3, 1), (1, 2), (3, 2)⁺-ը: Ավելացնելով նշված գույգերը՝ կստանանք .

$$\{(2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (1, 3)^+, (3, 4)^+, (3, 2)^+, (2, 1)^+\} \subset \alpha^*$$

Նկատենք, որ ավելացրած կապերը (,)⁺, պատկանում են α^2 -ին, որոնք իրենց հերթին առաջացնում են նոր տրանզիտիվ գույգեր՝ (1, 2) (2, 1)⁺ ավելացնել (1, 1)⁺⁺, (2, 3) (3, 4)⁺ ավելացնել (2, 4)⁺⁺:

Այժմ ավելացնելով (,)⁺⁺ կապերը՝ որոնք պատկանում են α^3 -ին, կստանանք տրանզիտիվ հարաբերություն $\{(2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (1, 3)^+, (3, 4)^+, (2, 1)^+, (1, 1)^+, (2, 4)^{++}\} = \alpha^*$:

Ձևակերպենք տրանզիտիվ փակում հարաբերությունը [1] :

Սահմանում: $\alpha \subseteq A \times A$ հարաբերության տրանզիտիվ փակում (նշանակենք α^+) անվանում ենք այն հարաբերությունը, որը կրավարարի հետևյալ երեք պայմաններին .

1. α^+ տրանզիտիվ է

2. $\alpha \subseteq \alpha^+$

3. Եթե β – ն տրանզիտիվ է և $\alpha \subseteq \beta$, ապա $\alpha^+ \subseteq \beta$:

Նկատենք, որ $(\alpha^+)^+ = \alpha^+$:

Տրանզիտիվ փակման մասին [1] աշխատանքում ձևակերպված է հիմնական թեորեմ:

Թեորեմ 2: Ցանկացած $\alpha \subseteq A \times A$ բինար հարաբերության համար α^+ -ը գոյություն ունի, և այն որոշվում է հետևյալ բանաձևով .

$$\alpha^+ = \bigcup_{i=1}^{2^{n^2}} \alpha^i,$$

որտեղ $n = |A|$; α^i -ն α -ի i -րդ աստիճանն է բինար հարաբերությունն է:

Այս աշխատանքում խիստ մաթեմատիկորեն ներկայացված է նշված թեորեմի ապացույցը:

Հաշվի առնելով թեորեմի բարդությունը՝ այն ապացուցելու համար աշխատանքում նախապես լեմմաների միջոցով ձևակերպվել և ապացուցվել են մի շարք անհրաժեշտ պնդումներ:

Պարզաբանենք α^+ – ի գոյության հարցը: Այդ նպատակով ձևակերպենք և ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա1: Եթե $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ տրանզիտիվ հարաբերություններ են, ապա նրանց հատում հարաբերությունը $\alpha \cap \beta$ նույնպես տրանզիտիվ է:

Ապացույց: Դիցուք $(x, y), (y, z)$ գույգերը պատկանում են $\alpha \cap \beta$, պետք է ցույց տալ, որ $(x, z) \in \alpha \cap \beta$ –ին:

Եթե $(x, y), (y, z) \in \alpha \cap \beta$, ապա այդ գույգերը պատկանում են α – ին : Այդ դեպքում α -ի տրանզիտիվությունից հետևում է, որ $(x, z) \in \alpha$, նմանապես

$(x, y), (y, z) \in \beta$ պատկանելիությունից հետևում է նաև $(x, z) \in \beta$: Այսինքն $(x, z) \in \alpha \cap \beta$:

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, այս լեմման ընդունելով որպես բազա՝ կստանանք պնդում:

Լեմմա 2: Ցանկացած վերջավոր քանակությամբ տրանզիտիվ հարաբերությունների հատում հարաբերությունը նույնպես տրանզիտիվ է:

Դիտարկենք γ բինար հարաբերությունների բազմություն T , որոնք բավարարում են հետևյալ երկու հատկությունները.

$$1. \alpha \subseteq \beta$$

$$2. \gamma\text{-ն տրանզիտիվ է}$$

Պարզ է, որ T բազմությունը դատարկ չէ: Որպես պարզագույն γ հարաբերության ներկայացուցիչ կարելի է վերցնել $\alpha = A \times A$ հարաբերությունը:

Ստցնենք նշանակում $[\alpha] = \bigcup_{\gamma \in T} \gamma$ և ցույց տանք, որ $[\alpha]$ հարաբերությունը α -ի տրանզիտիվ փակումն է:

Լեմմա 3: Եթե $|A| = n$, ապա $[\alpha]$ հարաբերությունը α -ի տրանզիտիվ փակումն է:

Ապացույց: Եթե $|A| = n$, այդ դեպքում $|T| < +\infty$, հետևապես, համաձայն լեմմա 2-ի, $[\alpha]$ -ն որպես վերջավոր քանակությամբ տրանզիտիվ հարաբերությունների հատում նույնպես տրանզիտիվ է: Ըստ $[\alpha]$ կառուցման՝ պարզ է նաև, որ $\alpha \subseteq [\alpha]$:

Այժմ ապացուցենք տրանզիտիվ փակման α^+ -ի 3-րդ հատկությունը, եթե β -ն ցանկացած տրանզիտիվ հարաբերություն է և $\alpha \subseteq \beta$, ապա $[\alpha] \subseteq \beta$: Համաձայն $[\alpha]$ կառուցման սխեմային $\beta \in T$, հետևաբար, համաձայն բազմությունների հատման գործողության հատկությանը, ըստ որի՝ ցանկացած բազմությունների հատում բազմությունը ենթաբազմություն է ցանկացած այդ բազմություններից: Հետևաբար, կստանանք, որ $[\alpha] = \bigcap \gamma \subseteq \beta$, այսինքն՝ $[\alpha]$ -ն α -ի տրանզիտիվ փակում հարաբերությանն է:

Այժմ ձևակերպենք հիմնական թեորեմը, որի հիման վրա կկառուցենք նաև α^+ -ը:

Այս աշխատանքում խիստ մաթեմատիկորեն կապացուցենք այդ պնդումը:

Թեորեմ: Եթե $|A| = n$, ապա

$$\alpha^+ = [\alpha] = \bigcup_{i=1}^{2^{n^2}} \alpha^i, \quad \text{որտեղ} \quad \alpha^{i+1} = \alpha^i \circ \alpha: \quad (1)$$

Ապացույց: Առնչության առաջին մասը $\alpha^+ = [\alpha]$ ապացուցված է լեմմա 3-ում: Ստցնենք նշանակում.

$$S(n) = \bigcup_{i=1}^{2^{n^2}} \alpha^i:$$

Քանի որ $S(n)$ և $[\alpha]$ իրենցից ներկայացնում են բազմություններ, ապա նրանց հավասարությունը ցույց տալու համար կիրառենք երկու հետևությունների մեթոդը՝

$$[\alpha] = S(n) \Leftrightarrow 1) [\alpha] \subseteq S(n) \text{ և } 2) S(n) \subseteq [\alpha]:$$

Սկզբում ապացուցենք 1-ին հետևությունը:

Պարզ է, որ $\alpha \subseteq S(n)$: 1-ին հետևությունը ապացուցելու համար ցույց տանք, որ $S(n)$ տրանզիտիվ է: Դիցուք $(x, y) \in S(n)$ և $(y, z) \in S(n)$, պարզենք, որ $(x, z) \in S(n)$:

Եթե $(x, y) \in S(n) \Rightarrow \exists (i, 1 \leq i \leq 2^{n^2})$, այնպես որ $(x, y) \in \alpha^i$, նմանապես կստանանք, որ $(y, z) \in \alpha^j$ ($i \neq j$):

Այստեղից կունենանք, որ.

$$(x, y) \in \alpha^i \text{ և } (y, z) \in \alpha^j \Rightarrow (x, z) \in \alpha^i \circ \alpha^j = \alpha^{i+j} \subseteq S(n):$$

Այսինքն՝ $\alpha \subseteq S(n)$ և $S(n)$ – ը տրանզիտիվ է, հետևաբար, $S(n) \in T$: Համաձայն $[\alpha]$ – ի կառուցման և բազմությունների հատում գործողության հատկության հիման վրա կստանանք, որ $[\alpha] \subseteq S(n)$: Այսպիսով 1-ին հետևությունը ապացուցվեց: Այժմ ցույց տանք 2-րդ հետևությունը՝ $\forall (x, y) \in S(n) \Rightarrow (x, y) \in [\alpha]$:

Եթե $\forall i$ -ի համար ցույց տանք, որ $\alpha^i \subseteq [\alpha]$, ապա միավորման գործողության հատկության համաձայն, α^i -ի միավորումը նույնպես կլինի ենթաբազմություն $[\alpha]$ – ից, այսինքն.

$$S(n) = \bigcup_{i=1}^{2^{n^2}} \alpha^i \subseteq [\alpha]:$$

Նշված պնդումը ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Ըստ կառուցման $\alpha^1 \subseteq [\alpha]$: Ընդունելով այդ որպես մաթեմատիկական ինդուկցիայի բազա ենթադրենք, որ $\alpha^i \subseteq [\alpha]$, ցույց տանք, որ $\alpha^{i+1} \subseteq [\alpha]$:

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումների շղթան.

$$\forall (x, y) \in \alpha^{i+1} \Rightarrow (x, y) \in \alpha^i \circ \alpha \Rightarrow \exists (z \in A), \text{ որ } (x, z) \in \alpha^i \text{ և } (z, y) \in \alpha: \quad (2)$$

Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի՝ $\alpha^i \subseteq [\alpha]$ և $\alpha \subseteq [\alpha]$ և (2)-ի հետևում է, որ $(x, z) \in [\alpha]$ և $(z, y) \in [\alpha]$: Այժմ օգտագործելով $[\alpha]$ – ի տրանզիտիվության հատկությունը՝ կստանանք, որ $(x, y) \in [\alpha]$, այսինքն $\alpha^{i+1} \subseteq [\alpha]$: Հետևաբար ճշմարիտ է 2-րդ հետևությունը:

Վերջ թեորեմի ապացույցին:

Բինար հարաբերության տրանզիտիվ փակման մասին թեորեմը տալիս է նաև այդ հարաբերության կառուցման հնարավորություն: Այդ նպատակով ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 4: Դիտարկենք աստիճանային բինար հարաբերությունների հաջորդականություն.

$$\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots:$$

Եթե որևէ առաջին k -ի համար տեղի ունի

$$\alpha^{k+1} \subseteq \alpha^1 \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k,$$

ապա ցանկացած $m > 1$ համար նույնպես տեղի կունենա

$$\alpha^{k+m} \subseteq \alpha^1 \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k:$$

Ապացույց: Մտցնենք նշանակում.

$$\bigcup_{i=1}^k \alpha^i = R_k:$$

Լեմմայի ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով ըստ m -ի: Վերցնենք $m=2$ դեպքը: Պետք է ցույց տալ, որ $\alpha^{k+2} \subseteq R_k$: Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումների շղթան.

$$\forall (x, y) \in \alpha^{k+2} = \alpha^{k+1} \circ \alpha \Rightarrow \exists (z \in A) (x, z) \in \alpha^{k+1} \text{ և } (z, y) \in \alpha:$$

Եթե $(x, z) \in \alpha^{k+1}$, ապա համաձայն լեմմայի պայմանի՝ $\exists (1 \leq i \leq k)$, որ $(x, z) \in \alpha^i$: Այստեղից ունենք $(x, z) \in \alpha^i$ և $(z, y) \in \alpha \Rightarrow (x, y) \in \alpha^{i+1}$:

Նկատենք, որ $(i+1 \leq k+1)$, հետևաբար $(x, y) \in \alpha^{k+1} \cup R_k = R_k$:

Վերջին հետևությունը բխում է լեմմայի պայմանից և բազմությունների միավորում գործողության հատկությունից:

Որպես մաթեմատիկական ինդուկցիայի բազա ընդունելով $m = 2$ դեպքը՝ ենթադրենք այդ պնդման ճշմարտացիությունը ցանկացած m -ի համար ($m > 1$).

$$\alpha^{k+m} \subseteq R_k:$$

Ցույց տանք նաև, որ $\alpha^{k+m+1} \subseteq R_k$: Վերցնենք ցանկացած էլեմենտ $\alpha^{k+(m+1)}$ -ից,

$$\forall (x, y) \in \alpha^{k+(m+1)} = \alpha^{(k+m)+1} = \alpha^{k+m} \circ \alpha:$$

Այստեղից կոմպոզիցիա գործողության համաձայն կստանանք, որ

$$\exists (1 \leq i \leq k) \text{ այնպես, որ } (x, z) \in \alpha^{k+m} \text{ և } (z, y) \in \alpha:$$

Քանի որ $(x, z) \in \alpha^{k+m}$ և ըստ ինդուկցիայի պնդման $\alpha^{k+m} \subseteq R_k$, հետևաբար՝ $\exists (1 \leq i \leq k)$, այնպես, որ $(x, z) \in \alpha^i$ և $(z, y) \in \alpha$: Այսինքն՝ $(x, y) \in \alpha^i \circ \alpha = \alpha^{i+1} \subseteq \alpha^{k+1} \cup R_k = R_k$: Ուրեմն՝ $(x, y) \in \alpha^{k+(m+1)} \Rightarrow (x, y) \in R_k$, հետևաբար $\alpha^{k+m+1} \subseteq R_k$:

Նշված լեմմայի պնդումից կարող ենք կառուցել α -ի տրանզիտիվ փակում հարաբերությունը α^+ : Ընտրենք, որպես k առաջին հերթական համարը, որի համար տեղի ունի

$$\alpha^{k+1} \subseteq \alpha^1 \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k:$$

Այդ դեպքում համաձայն լեմմայի պնդմանը՝ $\forall (m > 1) \alpha^{k+m+1} \subseteq \alpha^1 \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k$: Հիմք ընդունելով տրանզիտիվ փակման մասին թեորեմը և օգտագործելով բազմությունների միավորում գործողության հատկությունը, կստանանք որ.

$$\alpha^+ = \bigcup_{i=1}^{2^{n^2}} \alpha^i = \alpha^1 \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k:$$

Այս ներկայացման հիման վրա աշխատանքում է մշակված է նաև α^+ - ի կառուցման ալգորիթը:

Տրանզիտիվ փական կառուցման ալգորիթ

Քայլ 1: Մուտքային տվյալներ

$$M(\alpha^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\alpha^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $k = 1$, $M(\alpha^k)$ -ն ներկայացնել գրաֆի տեսքով:

Քայլ 2: Ստանալ կոմպոզիցիա հարաբերությունը

$$M(\alpha^{k+1}) = M(\alpha^k)M(\alpha^1):$$

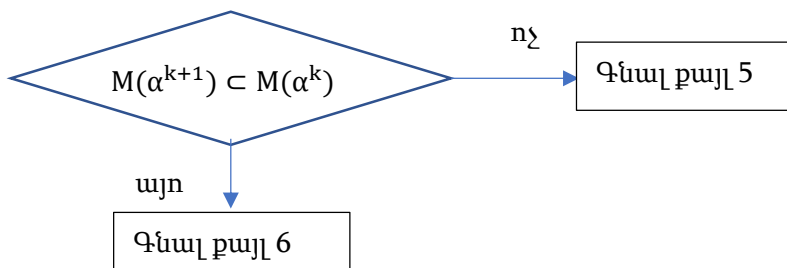
Մատրիցաների բազմապատկումը կատարել տրամաբանորեն

$$(\alpha^{k+1})_{ij} = \sum_{s=1}^4 (\alpha^k)_{is} (\alpha^1)_{sj},$$

որտեղ բազմապատկումը կատարվում է տրամաբանական կոնյուկցիայի կանոնով, իսկ գումարումը՝ դիզյունկցիայի կանոնով: Ստանալ $M(\alpha^{k+1})$ մատրիցան և այն պահպանել:

Քայլ 3: Կատարել հարաբերությունների միավորում $(\alpha^1 \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k)$

$$M(\alpha^{k+1}) = M(\alpha^k) + M(\alpha^{k-1}):$$

Քայլ 4: Կատարել ստուգում $(\alpha^{k+1} \subset \alpha \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k)$  $\subset$ - գործողությունը կատարել տրամաբանորեն, հենց որ առաջին անգամ $M(\alpha^{k+1})$ -ի էլեմենտը չհամընկավ $M(\alpha^k)$ - ի էլեմենտի հետ $\Rightarrow M(\alpha^{k+1}) \not\subset M(\alpha^k)$:Քայլ 5: $k = k + 1$ և գնալ քայլ 2-ի:Քայլ 6: Տպել $M(\alpha^+) = M(\alpha^k)$ մատրիցան $(\alpha^+ = \alpha \cup \alpha^2 \cup \dots \cup \alpha^k)$: $M(\alpha^+)$ - ը ներկայացնել գրաֆի տեսքով:

Գրականություն

1. Տոնոյան Ռ.Ն. Դիսկրետ մաթեմատիկայի դասընթաց: Եր., ԵՊՀ., 1999:
2. Хаггарти Р., Дискретная математика для программистов. М., Техносфера, 2003.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ. Սահակյանը: