

УДК 512

Математика

Георгий СААКЯН

к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ

E-mail: ter_saak_george@mail.ru

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Գ. Մահակյան

ՄԿԱԼԵԱՐ ԱՐՏԱՊԻՅԱԿ ԵՎ ՈՐՈՇ ԵՐԿՐԱԶՍՓԱԿԱՆ

ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇԱԿՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Հոդվածում դիտարկվում է որոշ ուռուցիկ երկրաչափական պատկերների որոշակիության հարցը նրանց կողմերից (անկյունագծերից) կազմված վեկտորների սկալյար արտադրյալների արժեքների միջոցով: Որոշվում են համապատասխան պայմաններ այդ պատկերների որոշակիության համար, ինչպես նաև որոշվում են նրանց հիմնական բնութագրիչները նշված սկալյար արտադրյալների միջոցով:

Բանալի բառեր՝ սկալյար արտադրյալ, պատկերների որոշակիություն

В работе рассматривается вопрос определенности некоторых выпуклых геометрических фигур с помощью значений скалярных произведений векторов, составленных из сторон (диагоналей) этих фигур. Находятся соответствующие условия для определенности этих фигур, а также определяются их основные характеристики с помощью указанных скалярных произведений.

Ключевые слова: скалярное произведение, определенность фигур.

G. Sahakyan

SCALAR PRODUCT AND THE DEFINITENESS OF SOME GEOMETRIC FIGURES

The paper deals with the question of the definiteness of some convex geometric figures using the values of the scalar products of vectors composed of the sides of these figures. The corresponding conditions for the definiteness of these figures are found, and also their main characteristics are determined by values of the indicated scalar products.

Key words: scalar product, definiteness of figures.

Под определенностью треугольника (многоугольника) мы будем понимать набор минимального количества данных-чисел (длин сторон, значений углов), при котором треугольник (многоугольник) однозначно (единственным образом) определяется. Например, нам известно, что для определенности треугольника (см., например, [1]) необходимо задать либо длины трех его сторон, либо длины двух стороны и значение одного угла, либо длину одной стороны и значения двух углов. Цель настоящей работы показать, что определенность как треугольника, так и любого выпуклого многоугольника может быть определена и с помощью скалярных произведений векторов, составленных из сторон (диагоналей) многоугольника.

Начнем рассмотрение данного вопроса с треугольника. Пусть a, b, c означают длины сторон треугольника ABC , а X, Y, Z - скалярные произведения векторов, исходящих из вершин треугольника соответственно: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, и $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Возможны случаи:

1. все три числа X, Y, Z положительны - $X > 0, Y > 0, Z > 0$, и, следовательно, треугольник ABC – остроугольный,
2. одно из чисел X, Y, Z отрицательно, а два других-положительны (к примеру $X > 0, Y > 0, Z < 0$), а значит, треугольник ABC – тупоугольный ($\angle A > \pi$).
3. одно из чисел X, Y, Z равно нулю, а два других-положительны (например, $X > 0, Y > 0, Z = 0$), треугольник ABC – прямоугольный ($\angle A = \pi/2$).

Используя определение скалярного произведения([2]-[4]), будем иметь

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = ac \cdot \cos \angle B \stackrel{def}{=} X,$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CA} = ab \cdot \cos \angle C \stackrel{def}{=} Y, \quad (1)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = bc \cdot \cos \angle A \stackrel{def}{=} Z.$$

Во всех трех случаях, воспользовавшись теоремой косинусов, найдем

$$\begin{aligned}
 X &= ac \cdot \cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{m + p - n}{2}, \\
 Y &= ab \cdot \cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{m + n - p}{2}, \\
 Z &= bc \cdot \cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{n + p - m}{2},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $m = a^2$, $n = b^2$, $p = c^2$. Из полученных соотношений относительно m, n, p получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 m + p - n &= 2X, \\
 m + n - p &= 2Y, \\
 n + p - m &= 2Z,
 \end{aligned} \tag{3}$$

откуда легко найти:

$$\begin{aligned}
 m &= a^2 = Y + Z, \\
 n &= b^2 = X + Z, \\
 p &= c^2 = X + Y,
 \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{Y + Z}, \\
 b &= \sqrt{X + Z}, \\
 c &= \sqrt{X + Y}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Из этих соотношений видно, что значения сторон треугольника a, b, c однозначно определятся при условии, что

$$X + Y > 0, \quad X + Z > 0, \quad Y + Z > 0. \tag{6}$$

Предположим теперь, что имеет место условие (6), и определим, при каких значениях X, Y, Z будет определяться треугольник. Очевидно, что для этого достаточно потребовать выполнения неравенства треугольника, а именно

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b.$$

Подставив, например, в первое из этих соотношений значения a, b, c из (5), получим

$$\sqrt{Y+Z} + \sqrt{X+Z} > \sqrt{X+Y}.$$

Или, после возведения в квадрат

$$Z + \sqrt{Y+Z}\sqrt{Y+Z} > 0. \quad (7)$$

Ясно, что при положительных X, Y, Z соотношение (7) и аналогичные ему два других будут иметь место.

В случае, когда одно из чисел отрицательно, например, Z , из (7) найдем

$$\sqrt{Y+Z}\sqrt{Y+Z} > -Z,$$

или, после возведения в квадрат

$$XY + YZ + XZ > 0. \quad (8)$$

Таким образом, выполнение условий (6) и (8) в случае положительных X, Y, Z или отрицательности только одного из них будет определяться единственный треугольник со сторонами, определяемыми формулами (5). Заметим далее, что если будем иметь для тройки чисел X, Y, Z условие

$$XY + YZ + XZ = 0, \quad (9)$$

то аналогично проведенным выше преобразованиям, но в обратном порядке, найдем, что имеет место одно из соотношений:

$$a + b = c, \quad b + c = a, \quad a + c = b.$$

Очевидно, что это условие будет означать вырождение треугольника в отрезок. Например, при $X = 3, Y = -2, C = 6$ найдем $a = 2, b = 3, c = 1$ ($a + c = b$).

Заметим, что если тройка чисел (X, Y, Z) , удовлетворяет условиям (6) и (8), то тройка $(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)$ при $\alpha > 0$ также удовлетворяет условиям (6) и (8).

Используя полученные выше результаты, можно сделать и следующие выводы:

1. Всякая тройка трех положительных или двух положительных и одного отрицательного чисел X, Y, Z , удовлетворяющих соотношениям (6) и (8),

определяет треугольник, длины сторон которого определяются из соотношений (5).

2. В случае равенства двух из этих трех чисел, мы будем иметь равнобедренный треугольник.

3. Треугольник будет тупоугольным, если одно из чисел X, Y, Z является отрицательным.

4. Треугольник будет прямоугольным, если одно из чисел X, Y, Z окажется равным нулю. Например, тройка чисел $0, 9, 27$ определит прямоугольный треугольник со сторонами $3, 6$ и $3\sqrt{3}$, а тройке $54, 54, -18\sqrt{3}$ будет соответствовать равнобедренный тупоугольный треугольник со сторонами $6, 6$ и $6\sqrt{3}$.

Замечание. Если для рассматриваемого треугольника известна длина одной из сторон, то для определенности такого треугольника достаточно знание двух скалярных произведений. Если же известны длины двух сторон – то понадобится лишь одно скалярное произведение. Действительно, предположим, что нам известна длина стороны c и два первых скалярных произведения X и Y из (1). Тогда из (2) найдем, что

$$X - Y = 2p - 2n,$$

откуда получим

$$b = \sqrt{\frac{X - Y + 2c^2}{2}}, \quad a = \sqrt{X + Y}.$$

Заметим, что с помощью заданных значений (1) можно, например, выразить и площадь треугольника. Действительно, будем иметь

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2} a^2 b^2 \sin \angle C = \frac{1}{4} (Y + Z)(X + Z) \left(1 - \frac{Z^2}{a^2 b^2} \right) = \frac{1}{4} (Y + Z)(X + Z) \left(1 - \frac{Z^2}{(Y + Z)(X + Z)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (XY + YZ + XZ). \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{XY + YZ + XZ}.$$

Очевидно, что полученное соотношение в силу (8) имеет смысл. Используя скалярные произведения, мы можем найти и углы треугольника. Из соотношений (1) и (5) найдем:

$$\cos \angle A = \frac{Z}{bc} = \frac{Z}{\sqrt{X+Z}\sqrt{X+Y}},$$

$$\cos \angle B = \frac{X}{ac} = \frac{X}{\sqrt{Y+Z}\sqrt{X+Y}},$$

$$\cos \angle C = \frac{Y}{ab} = \frac{Y}{\sqrt{X+Z}\sqrt{Y+Z}}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса определенности параллелограмма значениями скалярных произведений. Поскольку параллелограмм однозначно определится его половинкой-треугольником, составленным из двух смежных сторон и одной диагональю, то вопрос определенности его сведется к определенности этого треугольника. Таким образом, если задан параллелограмм $ABCD$, то, очевидно, что для его определенности достаточно будет знать значения, например, сторон AB, BD и диагонали AD . Предположим, что $AB = a, BD = b, AD = c$, тогда, согласно выше проведенным рассуждениям, для определенности параллелограмма нам достаточно знать, например, следующие три скалярных произведения:

$$X = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = ac \cdot \cos \angle BAD = ab \cdot \cos \alpha,$$

$$Y = \overline{BA} \cdot \overline{BD} = ab \cdot \cos \angle ABD = ad \cdot \cos \beta,$$

$$Z = \overline{DA} \cdot \overline{DB} = bc \cdot \cos \angle ADB = bc \cdot \cos(\pi - \alpha - \beta) = bd \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Воспользовавшись формулами (5), мы найдем значения $AB = a, BD = b, AD = c$.

Если рассмотреть произвольный выпуклый четырехугольник, то разбив его одной из диагоналей на два треугольника, и, учитывая, вышеприведенные рассуждения, мы приходим к выводу, что для определенности такого четырехугольника нам понадобятся 3 скалярных произведения для определенности одного из полученных треугольников и 2 для второго треугольника (поскольку одна из сторон этого треугольника уже будет определена). Очевидно, что эти рассуждения можно обобщить и на произвольный выпуклый многоугольник, разбив его на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины. В результате мы приходим к следующему выводу- для определенности произвольного выпуклого n -угольника (в том числе

и треугольника) необходимо задать $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ значений скалярных произведений из векторов, составленных из сторон и диагоналей. Покажем на примере пятиугольника какие скалярные произведения к примеру должны участвовать в этом процессе. Предположим для определенности, что нам задан пятиугольник $ABCDE$ (см. рис. 1). Очевидно, что для его однозначного определения нужно знать значения длин его пяти сторон и двух диагоналей.

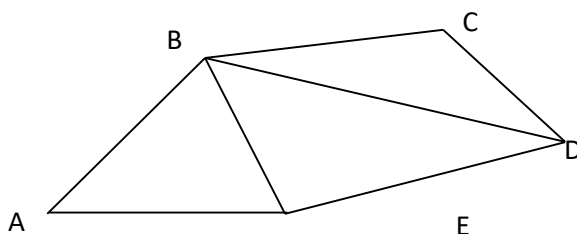


Рис. 1

Тогда для определенности этого пятиугольника мы можем задать, например, скалярные произведения следующих векторов:

1. $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$, $\overline{BA}$ и $\overline{BE}$, $\overline{EB}$ и $\overline{EA}$ (тем самым определится треугольник ABE),
2. $\overline{BE}$ и $\overline{BD}$, $\overline{EB}$ и $\overline{ED}$, (определится треугольник BED)
3. $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$, (определится треугольник BDC),

а в результате определится и сам пятиугольник. Заметим, что в данном случае нам понадобились $7 = 2 \cdot 5 - 3$ скалярных произведений.

В завершение получим одно интересное соотношение. Очевидно, что если ни одно из чисел не равно нулю, и имеют место неравенства (6), то будут иметь место и неравенства:

$$a^2 + b^2 > c^2, \quad a^2 + c^2 > b^2, \quad b^2 + c^2 > a^2,$$

и, следовательно, можно говорить о существовании треугольника с длинами сторон a^2 , b^2 , c^2 . Обозначим полупериметр такого треугольника через P . Тогда, из соотношений (5) и (2) найдем

$$P = \frac{X + Y + Z}{2},$$

$$XYZ = \sqrt{\frac{m+n-p}{2} \cdot \frac{m+p-n}{2} \cdot \frac{n+p-m}{2}} = \frac{\sqrt{P(P-m)(P-n)(P-p)}}{\sqrt{P}} = \frac{S_0}{\sqrt{X+Y+Z}},$$

откуда получим

$$S_0 = XYZ\sqrt{X+Y+Z},$$

где S_0 — площадь треугольника, длины сторон которого равны a^2 , b^2 , c^2 .

Вышеприведенные рассуждения относительно определенности выпуклых многоугольников позволяют решить вопрос определенности и тех многогранников, грани которых являются треугольниками или многогранниками. Покажем на примере треугольной пирамиды, что необходимо для ее определенности через скалярные произведения. Поскольку такая пирамида состоит из четырех треугольников, то последовательно переходя от условий определенности одной грани (одного треугольника) к другой, нетрудно найти, что для определенности треугольной пирамиды понадобятся $3+2+1=6$ скалярных произведений. Нетрудно показать, что для n -угольной пирамиды потребуется $2n+2$ скалярных произведений.

Լուծարար

1. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Решение> треугольников.
2. Векторная алгебра // Математическая энциклопедия (в 5 томах). — М.: [Советская Энциклопедия](#), 1977. — Т. 1. — С. 634.
3. [Calculus II - Dot Product](#). *tutorial.math.lamar.edu*. 2021.
4. http://mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html.
5. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Скалярное произведение>.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրմՀ
մաթեմատիկայի ամբիոնը: