

**ԻՄԱՑԱՐԱՆԱԿԱՆԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆԻ ՓՈԽՀԱՐԱՐԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՏՐԱՄԱՐԱՆԱԿԱՆ ՀԱԿԱՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ**

ՍԱՐԻՐԵԿ ՀԱԿՈՐՅԱՆ

Բազմությունների տեսության հիմնադրման դեռևս առաջին շրջանում բացահայտվեցին հակասություններ, որոնք հայտնի են բազմությունների տեսության պարադոքսներ անունով: Այդ պատճառով անհրաժեշտություն զգացվեց վերանայելու մաթեմատիկական խմացության ակունքները՝ նրա ելակետային հասկացություններն ու դրույթները, ինչպես նաև նրա տրամաբանական ապացուցման միջոցները: Շատ մաթեմատիկոսներ այս փաստը դիտեցին որպես ճգնաժամային իրավիճակ, որն առաջանում է ոչ միայն մաթեմատիկայի ինչ-որ մեկ մեկուսացված մասում, այլև դժվարություններ է ստեղծում մաթեմատիկական մտածելակերպի մեջ ընդհանրապես, քանի որ բազմությունների տեսությունն, ըստ էության, ոչ թե մաթեմատիկայի մի ուրույն բնագավառ է, այլ ինչ-որ իմաստով կազմում է այն ընդհանուր հիմքը, որի միջոցով մեկնաբանվում են գրեթե բոլոր մաթեմատիկական տեսությունները:

Բազմությունների տեսությունում հայտնի են հիմնականում երկու պարադոքսներ, որոնցից առաջինը կապված է հենց այդ տեսության հիմնադրողներից մեկի՝ Կանտորի անվան հետ: Եթե M -ը բոլոր բազմությունների բազմությունն է, ապա նրա հզորությունը մի կողմից ըստ Կանտորի հայտնի թեորեմի փոքր է իր ենթաբազմությունների բազմության հզորությունից, իսկ մյուս կողմից՝ քանի որ նրա ենթաբազմությունների բազմության յուրաքանչյուր տարր բազմություն է և, հետևաբար, պատկանում է M -ին, ուրեմն M -ի հզորությունը ենթաբազմությունների բազմության հզորությունից փոքր չէ: Ստացված հակասությունը կոչվում է Կանտորի պարադոքս: Եթե դիտարկում ենք Ռասելի բազմությունը, այսինքն այն բազմությունների բազմությունը՝ S -ը, որոնք իրենք իրենց չեն պատկանում, առաջանում է մեկ այլ հակասություն: Այս դեպքում S -ը S -ին պատկանում է, թե ոչ հարցը հանգում է Ռասելի պարադոքսին:

Իրոք, եթե S -ը պատկաներ S -ին, ապա S -ը S -ին չպետք է պատկաներ, քանի որ S -ին պատկանում են միայն իրենք իրենց չպատկանող բազմությունները: Իսկ եթե S -ը S -ին չպատկաներ, ապա S -ը S -ին պետք է պատկաներ, որովհետև իրենք իրենց չպատկանող բազմությունները պատկանում են S -ին:

Այսպիսով, ստացվում է $S \in S = S \notin S$ հակասությունը:

Պարադոքսների հրապարակման առաջին տարիներին դրանց քննությամբ

դրադվում էին հիմնականում մաթեմատիկոսները: Հետագայում դրանք ամենալայն ուսումնասիրության առարկա դարձան տրամաբանությունում, մեթոդաբանությունում, փիլիսոփայությունում և շատ այլ մասնագիտություններում: Չբաղվողներին համար: Եվ սա միանգամայն հասկանալի է, քանի որ մաթեմատիկայի հիմնավորման խնդիրը, ըստ էության, մարդկային գիտելիքի ճշմարտության հարցն է, որը և կազմում է ընդհանուր իմացության հիմքը:

Պարագոքսներով զբաղվող բոլոր մտածողներն էլ (տրոշ բացառությամբ) ներքնապես համոզված են եղել, որ դրանք ժամանակավոր և անցողիկ բնույթ ունեն և կհաղթահարվեն կարճ ժամանակում: Այն փաստը, որ շատերը գերադասել են ստեղծված իրավիճակը անվանել ոչ թե ճակատագրային, այլ պարագոքս կամ անտիդոմիա, վկայում է, որ ժամանակի մաթեմատիկոսների մեծ մասը հոգեբանորեն պատրաստ չի եղել «արտաքսվելու այն դրախտից», դեպի ուր իրենց տարել են Կանտորի հայտնագործությունները: Այնուամենայնիվ, առ այսօր պարագոքսների առաջացման ու հաղթահարման խնդիրը մնում է որպես տարածայնությունների առարկա և հայտնի տրամաբան, Կլինիի վկայությամբ՝ մաթեմատիկական աշխարհում այդ հարցում ոչ միայն չկա լրիվ համաձայնություն, այլև խիստ կասկածելի է, թե երբեք այն կլինի: Նշված խնդրի դժվարություններից մեկն էլ այն է, որ պարագոքսները երբեմն քննվում են կամ ընդհանուր աշխարհայացքային մակարդակով, կամ էլ զուտ մաթեմատիկական տեսանկյունից, ընդ որում, շատ հաճախ՝ տարբեր դիրքերից և, հետևաբար, տարբեր ծրագրերով: Մինչդեռ, դրանց լիարժեք բացահայտման համար, ըստ երևույթին, պահանջվում է բազմակողմանի և համատեղ վերլուծություն: Դա ակնհայտ է դառնում, երբ քննում ենք պարագոքսների տեղը գիտական իմացության պրոցեսում:

Պարագոքսների առաջացումն առնչվում է մի կարևոր հարցի՝ մաթեմատիկական գոյության պրոբլեմի հետ: Ո՞ր օբյեկտը համարել մաթեմատիկական գոյություն ունեցող: Մասնավորապես գոյություն ունեն արդյոք բոլոր բազմությունների բազմությունը կամ Ռասելի բազմությունը (դրանք կհամարենք M և S բազմություններ), որոնց հետ կապվում են վերը բերված պարագոքսները: Ընդհանրապես, երբ մաթեմատիկական օբյեկտներ գտնվում կամ դրանց գոյության հարցն է բարձրացվում, ապա մաթեմատիկայում հենվում են գոյության երկու տիպի ապացույցների վրա.

1. Ոչ-էֆեկտիվ ապացուցում, երբ օբյեկտի գոյությունը ապացուցված է համարվում, եթե նրա գոյության մերժումը հանգեցնում է հակասության: Այս դեպքում որոնելի օբյեկտը կոնկրետ ձևով չի կառուցվում: Գոյության այս ապացույցի մասին Ա. Պուանկարեն գրել է. «Մաթեմատիկայում գոյություն ունենալ բառը կարող է արտահայտել միայն մեկ իմաստ— դա նշանակում է հակասությունների բացառում»²:

2. էֆեկտիվ ապացուցում, երբ մաթեմատիկական օբյեկտի գոյությունը ապացուցված է համարվում, եթե այդ օբյեկտը կոնկրետ ձևով կառուցված է. կամ հաշվված: Մինչև մեր գարի սկիզբը այս երկու ապացույցներն ըստ էության չեն տարբերվել: Սակայն դարասկզբում ապացուցման ոչ-էֆեկտիվ ձևը, որոշ մաթեմատիկոսների կողմից քննադատության ենթարկվեց: Ինտուիցիոնիզմի համաձայն, մաթեմատիկական օբյեկտը համարվում է գոյություն:

² А. Пуанкаре, Наука и метод, СПб., 1910, стр. 124.

ունեցող միայն այն դեպքում, եթե այն կարելի է կառուցել կամ հաշվել էֆեկտիվ եղանակով: Ինչպես գրում է Հեյթինգը, «Գոյություն ունենալ նշանակում է կառուցված լինել»³:

Համաձայն այն խնդրի, թե օբյեկտների գոյության ո՞ր ապացույցն է հիմք ընդունվում, մաթեմատիկայում ստեղծվել են մի քանի ուղղություններ, որոնք յուրովի են մեկնաբանում պարադոքսների հարցը: Սակայն պարզվում է, որ անկախ էֆեկտիվ և ոչ-էֆեկտիվ ապացուցման կողմնակից լինելուց, պարադոքսալ օբյեկտները (ինչպես, օրինակ՝ բոլոր բազմությունների բազմությունը և Ռասելի բազմությունը) չեն կարող գոյություն ունեցող համարվել ո՛չ էֆեկտիվ և ո՛չ էլ ոչ-էֆեկտիվ իմաստով: Կարելի է ցույց տալ, որ դրանք ոչ միայն չունեն կոնստրուկտիվ բնույթ, այլև չեն բավարարում նաև անհակասելիության պայմանին: Հետևաբար, այն օբյեկտները, որոնց հետ կապվում են պարադոքսները (M-ը և S-ը) որոշ առումով մաթեմատիկական օբյեկտներ չեն: Սա նշանակում է, որ պարադոքսների քննությունը, խիստ ասած, մաթեմատիկայի ներքին հարց չէ այնքանով, որքանով դրանց հետ առնչվող օբյեկտները մաթեմատիկական չեն: Ուստի, այդ հարցի պարզաբանման համար պահանջվում է նաև ընդհանուր իմացաբանական, փիլիսոփայական վերլուծություն: Մյուս կողմից՝ պարադոքսալ օբյեկտները ծնվում են մաթեմատիկայի ոլորտում և նրա զարգացման տրամաբանական արդյունքն են: Այս առումով դրանց վերլուծությունը պահանջում է նաև մաթեմատիկական մեթոդ:

Այսպիսով, որքանով որ պարադոքսները ծնվել և աճել են բուն մաթեմատիկայում ու դուրս են եկել նրա սահմաններից, այնքանով էլ դրանց հաղթահարումը պահանջում է մաթեմատիկական և փիլիսոփայական համատեղ վերլուծություն:

Վերահիշյալ պարադոքսալ օբյեկտները, այնուամենայնիվ, ունեն որոշակիություն, առանձնատկություններ, որոնցով և զանազանվում են միացած օբյեկտներից: Հազիվ թե գտնվի մեկը, որ, ասենք, բոլոր բազմությունների բազմությունը կամ Ռասելի բազմությունը շփոթի մեկ ալ օբյեկտի հետ: Նշանակում է, դրանց բնույթի բացահայտումը միանգամայն օրինական հարց է:

Կանտորի պարադոքսը, ինչպես նշվեց, առաջանում է, երբ դրվում է այն հարցը, թե բոլոր բազմությունների բազմության հզորությունը մեծ է, թե փոքր իր ենթաբազմությունների բազմության հզորությունից: Քանի որ այս հարցը սերտորեն կապված է Կանտորի թեորեմի հետ, և վերջինս կարևոր գեր ունի նաև բազմությունների տեսության հիմնական հասկացություններից մեկի՝ բազմությունից հզորության և կարդինալ թվի գաղափարի ըմբռնման հարցում, ուստի հարկ է ընդգծել, որ, ինչպես կտեսնենք ստորև, նրա ապացուցման մեջ առկա են որոշ անորոշություններ: Թեորեմի ապացուցման ընթացքում կիրառված է մի լրացուցիչ օբյեկտ, որը, ինչպես ցույց է տալիս վերլուծությունը, որոշակի բազմություն չէ: Մասնավորապես, եթե ապացույցը կիրառվում է բոլոր բազմությունների բազմության համար, ապա այդ լրացուցիչ

³ Гейтинг, Интуиционизм, М., 1965, стр. 11.

բազմությունը Ռասելի հենց այն բազմությունն է, որի հետ հակասություն և պարադոքս է առնչվում:

Այժմ անդրադառնանք Կանտորի թեորեմի ապացուցմանը: Այստեղ, որպեսզի ցույց տրվի, որ M բազմության ենթաբազմությունների բազմությունը՝ M_2 -ը M -ից հզոր է, փորձ է արված ցույց տալ, որ ինչպիսի F փոխմիարժեք համապատասխանություն էլ լինի M -ի կամայական ենթաբազմություն T -ի $\Gamma \subset M$ և M -ի ենթաբազմությունների բազմություն M_2 -ի միջև, կա մի Z բազմություն, որը պատկանում է M_2 -ին, սակայն չունի իրեն համապատասխանող տարրը T -ում: Այն որոշվում է այսպես՝ $Z = \{X : (X \in T) \& (X \notin F(X))\}$, որտեղ $F(X)$ -ը X -ին համապատասխանող տարր է: Z -ը M -ի այն տարրերի բազմությունն է, որոնք իրենց համապատասխանող տարրին չեն պատկանում: Իրոք, եթե Z -ին համապատասխաներ ինչ-որ տարր 1 -ը՝ M -ից ($F(1) = Z$), ապա այդ դեպքում կատացվեր հակասություն՝ $1 \in Z \equiv 1 \notin F(1)$, ալիսինքն՝ $1 \in Z \equiv 1 \notin Z$:

Դիտարկենք հենց այդ Z բազմությունը: Եթե M -ը բոլոր բազմությունների բազմությունն է, ապա, քանի որ $T \subset M$ կամայական ենթաբազմություն է, և քանի որ M_2 -ը ևս M -ի ենթաբազմություն է, ապա T -ն կարող է հավասար լինել M_2 -ին: Այս դեպքում F համապատասխանությունը (այն կարող է լինել կամայական) մասնավոր դեպքում լինում է նույնական համապատասխանություն՝ $F(X) = X$, իսկ Z -ը՝ այն բազմությունների բազմությունը, որոնք իրենք իրենց չեն պատկանում, այսինքն՝ $Z = \{X : (X \text{ բազմություն է } \& (X \notin X))\}$: Ինչպես հայտնի է, այս ձևով ներկայացված Z -ը հենց Ռասելի այն հանրահայտ բազմությունն է, որը բնորոշվում է $Z \in Z \equiv Z \notin Z$ պարադոքսով: Ստացվում է, որ Կանտորի թեորեմի ապացուցման ընթացքում կիրառված է մեկ այլ պարադոքսալ բազմություն: Հետևաբար, այն թեորեմը, ըստ որի կամայական բազմության հզորությունը փոքր է իր ենթաբազմությունների բազմության հզորությունից, իր իսկ ապացուցման մեջ պարունակում է պարադոքսալության մոմենտ: Ուրեմն, Կանտորի պարադոքսը Ռասելի պարադոքսի հետևանքն է, նրա այլ դրսևորման արդյունքը: Ուստի, այսուհետև բազմությունների տեսության պարադոքսների մասին խոսելիս կարելի է նկատի ունենալ միայն Ռասելի պարադոքսը: Քննենք այդ պարադոքսը:

Ռասելի բազմությունը որոշվում էր հետևյալ կերպ $X \in S \equiv (X \text{ բազմություն է}) \& (X \notin X)$: Պարզենք, թե S -ը պատկանում է S -ին, թե ոչ: Եթե X -ի տեղ տեղադրենք S -ը, կստանանք $S \in S \equiv (S \text{ բազմություն է}) \& (S \notin S)$: Քանի որ $S \in S$ և $S \notin S$ ասույթներն իրար ժխտող են, ապա նույնության աջ և ձախ մասերը միաժամանակ ճշմարիտ արժեք չեն կարող ընդունել: Ուրեմն, նույնություն կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ ձախ մասը՝ $S \in S$ կեղծ արժեք ընդունելիս, աջ մասը նույնպես ընդունի կեղծ արժեք: Դրա համար անհրաժեշտ է, որ « S -ը բազմություն է» ասույթը ևս լինի կեղծ:

Այսպիսով, ստացվում է հետևյալ պատկերը. ճիշտ չէ, որ S -ը բազմություն է և ճիշտ չէ, որ S -ը պատկանում է S -ին: Փաստորեն պարադոքսը նեղ իմաստով լուծվում է, քանի որ հարցն այն է, թե S -ը պատկանում էր S -ին,

թե ոչ, պարզվեց, որ S-ը չի պատկանում S-ին, որովհետև այն բազմություն չէ: Այս լուծումը լուծում է նեղ իմաստով, քանի որ դրանից բխում է ևս մեկ այլ հարց. եթե S-ը բազմություն չէ, ապա ի՞նչ է և ինչո՞ւ է պատճառաբանվում նրա բազմություն չլինելը: Նախքան այս հարցին անցնելը պարզենք, թե ի՞նչ է բազմությունը:

Բազմությունների դասական տեսության մեջ բազմությունը դիտվում է որպես մի օբյեկտ, որին պատկանում են այլ օբյեկտներ (տարրեր): Ըստ Կանտորի բազմությունն ասելով պետք է հասկանալ իրական կամ վերացական օբյեկտների մի համախումբ, որ ընդհանրացվում է այն պայմանով, որ ցանկացած օբյեկտի համար հնարավոր լինի ասել, պատկանո՞ւմ է արդյոք այն տվյալ բազմությանը, թե ոչ: Բազմությունների տեսությունը հենվում է այն ենթադրության վրա, որ բոլոր օբյեկտները (լինեն դրանք իրականության, թե մտքի) իրենց էական տարբերությունների հետ միասին օժտված են նաև ընդհանրությամբ, որով կարող են ընդգրկվել մեկ ամբողջության մեջ: Բազմության գաղափարը սերտորեն առնչվում է անվերջության, առանձնապես ակտուալ անվերջության գաղափարի հետ և տարաձայնությունների տեղիք է տալիս: Մասնավորապես դժվար է անվերջ բազմությունների տրաման խնդրը, քանի որ այս դեպքում սկզբունքորեն հնարավոր չէ բազմության բոլոր տարրերը ստուգել: Ուստի, այն հարցը, թե պատկանո՞ւմ է արդյոք տվյալ տարրը տվյալ բազմությանը թե ոչ, որոշվում է ինտուիտիվ եղանակով: Այս տեսակետից որոշակի տարբերություն պետք է դրվի բազմության տարրերի ռոշման և այդ տարրերի նանաչման միջև: Ամեն անգամ որևէ բազմություն նշելիս, փաստորեն նշվում է որևէ հատկություն և բոլոր այն օբյեկտները, որոնք օժտված են այդ հատկությամբ, պատկանում են այդ բազմությանը: Նշված հատկությունը շունեցող օբյեկտները, որպես տարրեր, չեն պատկանում այդ բազմությանը: Երբ նշվում է որևէ հատկություն, ապա այն հարցը, թե կամայական օբյեկտը օժտված է տվյալ հատկությամբ, թե ոչ, այսինքն՝ պատկանում է տվյալ բազմությանը, թե ոչ, որոշվում է օբյեկտի ունեցած հատկություններից կախված: Հետևաբար, այդ հարցի լուծումը անկախ է մեզանից և ունի օբյեկտիվ բնույթ: Դիտարկումների շնորհիվ մենք միայն ստուգում, իմանում և ճանաչում ենք քննվող տարրը, իսկ նրա տվյալ բազմությանը պատկանելը կամ չպատկանելը անկախ է ինչպես մեր դիտարկումից, այնպես էլ նրա ճշտությունից:

Այսպիսով, ինտուիտիվ է բազմության մեր ճանաչումը, այլ ոչ թե բազմության որոշումը: Ուստի, այս հարցում մեր ըմբռնման, ինտուիցիայի հնարավոր սխալը մնում է բազմության տարրերի ճանաչման պրոցեսում և այն չպետք է շփոթել բազմության տարրերի որոշման հետ: Թեև բազմությունը որոշելու հատկությունը նշում ենք մենք, տակա՛ն դրանից հետո այդ հատկությունն ունեցող օբյեկտների բազմությունը որոշվում է արդեն մեզանից անկախ:

Բազմության մյուս առանձնահատկությունն այն է, որ այն որպես օբյեկտ ունի երկու հիմնական հատկություններ. ա) համախմբության հատկություն, որը նշանակում է, որ նրան պատկանում են այլ օբյեկտներ, նա որոշակի տարրերի համախմբում է, երբ նկատմամբ դրվում է այլ օբյեկտների պատկանելության հարցը, և բ) տարբայնության հատկություն, որը նշանակում է, որ բազմությունն իբրև մի ամբողջություն կարող է մտնել ուրիշ բազմության մեջ:

մոլորությունների մեջ, որպես տարր պատկանել ալ բազմությունների, ուստի նրա համար դրվում է ալ բազմություններին պատկանելու հարցը:

Կարևոր է նկատել, որ բազմությունների Կանտորյան տեսության համաձայն՝ բոլոր բազմություններն անվերապահորեն օժտված են այս երկու հատկություններով էլ: Մեր կարծիքով, դասական տեսության մեջ այս փաստն ընդունված է տարերայնորեն, ուստի վերանայման կարիք ունի:

Ինչպես վերը ցույց տրվեց, Ռասելի S բազմության համար, երբ առաջ ենք քաշում ինքն իրեն պատկանելու հարցը, պարզվում է, որ S-ը բազմություն չէ: Այստեղից էլ կարող ենք ասել, որ S-ը S-ի նկատմամբ չունի տարրայնության հատկություն, ուստի S-ի համար անիմաստ է S-ին պատկանելու հարցը:

S-ը այն բազմությունների բազմությունն է, որոնք իրենք իրենց չեն պատկանում: Փաստորեն տվյալ դեպքում վերցրել ենք բոլոր հնարավոր բազմությունները և փորձել ենք տրոհել դրանք, ստանալ իրենք իրենց չպատկանող բազմությունների բազմություն: Մեր կարծիքով՝ հենց տրոհմամբ կատարում ենք մի նոր վերացարկում և, ինչպես յուրաքանչյուր վերացարկման ժամանակ, բացասում ենք «բազմություն» օբյեկտի մի ինչ-որ հատկություն, ուստի և հանդում ենք որակապես մի նոր հասկացության: Այդ նոր հասկացությունն արդեն ոչ թե բազմություն է, այլ մի նոր երևույթ, որը կանվանենք համախմբություն: Քանի որ S-ը S-ի նկատմամբ չունի տարրայնության հատկություն, կարող ենք ասել, որ համախմբությունը բազմությունից տարբերվում է նրանով, որ այն միշտ չէ, որ ունի որպես մեկ ամբողջություն ի հայտ գալու, որպես տարր ալ օբյեկտի մեջ մտնելու, նրան պատկանելու հատկություն: Այլ կերպ ասած՝ համախմբության համար անիմաստ է ալ բազմության պատկանելու (կամ չպատկանելու) հարցը: Օրինակ՝ S-ը, որն այն բազմությունների համախմբությունն է, որոնք իրենք իրենց չեն պատկանում, բազմություն չէ, այլ համախմբություն է և S-ի նկատմամբ չունի որպես ամբողջություն ի հայտ գալու և պատկանելության հատկություն: Այդ պատճառով $S \in S$ արտահայտությունը բազմությունների տեսության հայեցակետից անիմաստ է, որքան և անիմաստ է $S \in S$ արտահայտությունը: Եվ քանի որ թե՛ մեկը և թե՛ մյուսը անիմաստ են, ապա ստանում են տրամաբանական կեղծ արժեք: Հետևաբար $S \in S \equiv S \notin S$ նույնաբար ճիշտ է, քանի որ կեղծ ասույթները միմյանց համարժեք են: Ուրեմն, այդտեղ խոսք չի կարող լինել ո՛չ պարադոքսի և ո՛չ էլ հակասության մասին:

Մաթեմատիկայի պատմական զարգացման ընթացքում նման իրադրություն առաջացել է ամեն անգամ, երբ ընդլայնվել է մաթեմատիկական օբյեկտների ոլորտը: Օրինակ՝ ռացիոնալ թվերի բազմության դեդեկինդյան տրոհում կատարելիս հանգում ենք այնպիսի թվի գոյության, որը և՛ պատկանում է որևէ դասի (օրինակ՝ վերին դասին), և՛ չի պատկանում $\alpha \in A \equiv \alpha \notin A$: Այս հակասությունից էլ հանգում ենք որակապես նոր թվի՝ իռացիոնալ թվի գաղափարին: Կամ, երբ ընդլայնվում է իրական թվի գաղափարը, հանգում ենք կոմպլեքս թվի գաղափարին: Այստեղ կեղծ միավորի՝ i-ի համար, կարող ենք գրել $i^2 < 0 \equiv 1 > 0$ նույնությունը, որը, սակայն, չի նշանակում թե i-ն և՛ դրական է, և՛ բացասական, այլ նշանակում է, որ ընդլայնելով իրական թվի գաղափարը, անցնելով նոր վերացության, բացասել ենք իրական թվի մի հատկություն ևս՝ համեմատելիության (մեկ ալ թվից մեծ կամ փոքր

լինելու) հատկությունը և այդ իսկ պատճառով $1 < 0 \equiv 1 > 0$ նույնությունը ճիշտ է, քանի որ աջ և ձախ մասերը լինելով անիմաստ, ընդունում են տրամաբանական կեղծ արժեք: Նման ձևով էլ $S \in S = S \bar{S}$ նույնությունը ճիշտ է, որովհետև աջ և ձախ մասերը լինելով անիմաստ, ընդունում են կեղծ արժեք, որը և նշանակում է, որ համախմբության համար անիմաստ է այլ համախմբության պատկանելու (կամ չպատկանելու) հարցը, համախմբությունը չունի որպես մի ամբողջություն, որպես տարր հանդես գալու հատկություն:

Բազմությունների տեսությունը օբյեկտներն ուսումնասիրում է մեկը մյուսի մեջ մտնելու, մեկը մյուսին պատկանելու հարաբերության մեջ: Մենք նշեցինք օբյեկտների երկու հատկությունները, համախմբության և տարրայնության: Ինչպես ցույց տվեց Ռասելի S համախմբության ուսումնասիրությունը, օբյեկտի համախմբություն լինելուց չի բխում նրա տարրայնության հատկությունը: Հետևաբար, ճիշտ չէ նրա համար միշտ դիտարկել այլ բազմության պատկանելության հարցը:

Այսպիսով, օբյեկտի տարրայնության և համախմբության հատկությունները անկախ են միմյանցից: Մինչդեռ դասական տեսությունում, ինչպես նշեցինք, յուրաքանչյուր բազմությանը անվերապահորեն վերագրվում էր նաև տարրայնության հատկությունը: Այնինչ դա եղել է ոչ թե կամայական համախմբության հատկություն, ոչ թե տրամաբանորեն բխեցվել է բազմությունների տեսության օրինաչափություններից, այլ այն, այսպես ասած, ծանոթ բազմությունների մոտ նկատված հատկություն է, որ տարբերանորեն վերագրվել է նաև մյուսներին, բոլորին, այդ թվում նաև անծանոթներին, որն էլ պատճառ է դարձել պարադոքսների առաջացման: Ուստի, դասական տեսությունը, որը երբեմն կոչվում է նաև նախնական տեսություն, նախվ կարող է համարվել նաև այս առումով:

Նման տեսակետի կարելի է հանդիպել նաև բազմությունների տեսության որոշ աքսիոմատիկ համակարգերում (Նեյման, Ռոբինս, Բեռնայս, Գյոդել և այլն), որտեղ օգտագործվող դաս հասկացությունը, թերևս, կարելի է համարել մեզ մոտ օգտագործվող համախմբության զուգանմանությունը (անալոգը):

Դասի և բազմության առանձնացման հարցը դեռևս անցյալ դարի 90-ական թվականներին շոշափել է նաև ինքը՝ Կանտորը, բայց Նեյմանին է պատկանում այն համարձակ գաղափարը, որ բազմությունների տեսության հակասությունները պայմանավորված են ոչ թե ծայր աստիճան ծավալուն բազմությունների գոյությամբ, այլ ուրիշ բազմություններին որպես տարր պատկանելու թույլտվությամբ (նրանց տարրայնությամբ): Այդ հիմքով էլ պարադոքսների առաջացումը կանխելու համար այդպիսի «վտանգավոր» բազմություններին «արգելվում» է պատկանել այլ բազմության⁴:

Այսպիսով, օբյեկտները բաժանվում են երկու տիպի՝ բազմության և դասի: Դասը համարվում է բազմություն, եթե այն ինչ-որ դասի տարր է: Ցուրաքանչյուր բազմություն միաժամանակ նաև դաս է: Ինչպես ասացինք, ներ-

⁴ С. Клини, Математическая логика, М., 1973, стр. 227; Н. Кондаков, Логический словарь-справочник, М., 1975, стр. 247; Мендельсон, Введение в математическую логику, М., 1971, стр. 176; А. Френкель, Бар-Хиллел, Основания теории множеств, М., 1966.

մուծված «դաս» հասկացությունը արտահայտում է մեր նշած համախմբության ինտուիտիվ իմաստը, որին հանգեցինք վերլուծության ընթացքում: Այդ գաղափարը, մեր կարծիքով, ոչ թե պարադոքսների հարցը ավելի արդյունավետ քննելու համար հորինված մի բան է, այլ Ռասելի պարադոքսի վերլուծության անհրաժեշտ արդյունքը: Ի դեպ, նկատենք նաև, որ եթե որևէ համախմբություն ինչ-որ համախմբության նկատմամբ չունի տարրայնության հատկություն, ապա դա չի նշանակում, թե բացառվում է այդ օբյեկտի տարրայնության հատկությունն ընդհանրապես: Օրինակ S-ը չունի տարրայնության հատկություն S-ի նկատմամբ, բայց ունի այդ հատկությունը, օրինակ՝ բնական թվերի բազմության՝ N-ի նկատմամբ: Իրոք, քանի որ S-ը թիվ չէ, ապա $S \notin S$: Եվ դա կարելի է պնդել առանց որևէ անորոշության: Կամ՝ եթե դիտարկենք մի տարր ունեցող այն բազմությունը, որի տարրը հենց S-ն է, այսինքն վերցնենք {S} բազմությունը, ապա չի կարելի ասել, որ {S} վերջավոր բազմությունը որոշակի չէ:

Անդրադառնալով օբյեկտների ընդհանուր հատկանիշների և նրանց միջև հարաբերության հարցին, կարևոր է նշել, որ եթե որևէ A օբյեկտ B օբյեկտի նկատմամբ չունի տարրայնության հատկություն, ապա B օբյեկտն էլ A-ի նկատմամբ չի ունենա համախմբության հատկություն: Հետևաբար, օբյեկտը կարող է չունենալ տարրայնության հատկություն որևէ համախմբության նկատմամբ, ինչպես նաև կարող է չունենալ համախմբության հատկություն որևէ տարրի նկատմամբ:

Դասական տեսությունում բոլոր համախմբությունները համարվել են բազմություններ և միաժամանակ ընդունվել է, որ կամայական բազմությունն ունի տարրայնության հատկություն: Մինչդեռ, եթե հետևենք Կանտորի ուսմունքին, որի համաձայն բազմությունը տված է, եթե կամայական տարրի համար որոշվում է այդ բազմությանը պատկանում է, թե ոչ, ապա այստեղից պարզորոշ հետևում է, որ օբյեկտի բազմություն լինելու պահանջից անհրաժեշտաբար չի բխում նրա տարրայնությունը: Օբյեկտը բազմություն լինելու համար կարևոր է, որ նրա տարրերը որոշակի լինեն, այն որ որևէ կամայական օբյեկտ նրա նկատմամբ ունենա տարրայնության հատկություն, այսինքն՝ որոշակի լինի նրա նկատմամբ պատկանելության հարցը: Իսկ այն հարցը, թե տվյալ համախմբությունը ուրիշ համախմբության նկատմամբ ինչպիսի՞ հատկություն ունի, տարր է, թե՞ ոչ, ըստ Կանտորի ձևակերպման, անմիջապես չի առնչվում այդ օբյեկտի բազմություն լինելու հարցի հետ: Այլ կերպ ասած, բազմության համար կարևորն այն է, թե ինչ կա իր ներսում և ոչ թե այն, թե ինչ կա իրենից դուրս, այսինքն այն՝ թե ինչն է իրեն պատկանում և ոչ թե՞ ինչին է ինքը պատկանում: Այսպիսով, օբյեկտը բազմություն համարվելու համար առաջնայինը նրա համախմբության և ոչ թե տարրայնության հատկությունն է: Հետևաբար, բազմությունն այն համախմբությունն է, որի նկատմամբ կամայական օբյեկտը ունի տարրայնության հատկություն, որի նկատմամբ յուրաքանչյուր տարրի համար իմաստ ունի պատկանելության հարցը:

Բազմությունների տեսության հիմնական հարցը օբյեկտների ճանաչումն ու նրանց միջև եղած հարաբերության ուսումնասիրումն է. այսինքն՝ թե տվյալ համախմբության համար գոյություն ունի՞ ախպիսի օբյեկտ, որ չունի տարրայնության հատկություն, այսինքն որի համար անիմաստ է նրան պատկանելության հարցը: 3—4

կանելության հարցը Այս հարցով էլ որոշվում է, թե սովորական համախմբությունը բազմություն է, թե ոչ: Իր նկատմամբ տարրայնության հատկությունը չունեցող օբյեկտների գոյության հերքումն էլ հենց այն չափանիշն է, որով բազմությունը առանձնացվում է համախմբությունից:

СООТНОШЕНИЕ ГНОСЕОЛОГИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО В ЛОГИЧЕСКИХ ПРОТИВОРЕЧИЯХ

САРИБЕК АКОПЯН

Резюме

На пути обоснования математики (это, по существу, и вопрос выявления истинности человеческого познания) в основах математики появились такие логические противоречия, как, например, парадоксы теории множеств. Парадоксы родились в математике и вышли за ее пределы. Следовательно, для их исследования необходимо проводить совместный философский и математический анализ.

Множество как объект может иметь два основных свойства: свойство совокупности и элементности. В классической теории множество может одновременно выступать и в качестве совокупности, и в качестве элемента. Однако, как показывает анализ, эти свойства независимы друг от друга. Для признания объекта множеством в качестве основного его свойства должна выступать совокупность, а не элементность.

Математический и философский анализ противоречий позволит в основном решить их в широком и узком смысле.