

ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОЛЯ И ПОЛЯ ЗАРЯДОВ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ВЕКТОР ГЕРЦА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

М.К. БАЛЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: mbalyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 31 октября 2022 г.)

В первой части данной работы с помощью найденной векторной функции Грина электромагнитное поле в произвольном образом выбранном объеме представлено в векторной форме с помощью поверхностных и объемных интегралов, причем поверхностные интегралы описывают дифракцию поля, создаваемого внешними к объему зарядами, а объемные интегралы описывают поля, создаваемые зарядами, движущимися внутри объема. Для функции Грина была использована одна из двух найденных форм. В этой работе получены выражения для электромагнитного поля с использованием второй формы найденной функции Грина. При использовании второй формы векторной функции Грина поля зарядов, движущихся внутри объема, выражаются через обобщенный вектор Герца. Полученные в этой работе выражения имеют свои преимущества для определения полей в выбранном объеме.

1. Введение

В электродинамике электромагнитное поле зарядов обычно определяют с помощью векторного и скалярного потенциалов [1,2]. Но есть и другой способ определения полей – с помощью вектора Герца [3,4]. Хотя вектор Герца вводится в общем случае для зависящих от времени полей [4], но обычно в явном виде определяется и используется для гармонически зависящего от времени случая. В работе [5] в зависящем от времени случае было найдено электромагнитное поле в произвольном образом выбранном объеме, когда и внутри объема, и вне его находятся движущиеся заряды. Поля зарядов вне объема выражаются через поверхностные интегралы, а заряды внутри объема создают поля, которые выражаются объемными интегралами. Поля были найдены с использованием векторной функции Грина, найденной в той же работе. Причем для векторной функции Грина были найдены два выражения. В [5] была использована первая из этих форм, что привело к выражению полей зарядов внутри объема через вектор и скалярный потенциалы.

В этой работе мы будем использовать вторую форму векторной функции Грина, что приведет к другой форме представления полей внутри объема. Именно, поля зарядов внутри объема будут выражаться через вектор Герца для негармонического случая, причем, для негармонического случая впервые найдено выражение для запаздывающего вектора Герца через интеграл от плотности тока.

2. Две формы зависящей от времени векторной функции Грина

Электромагнитное поле определяется уравнениями Максвелла [1,2], к которым мы добавим еще уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь первые четыре уравнения являются уравнениями Максвелла, а последнее уравнение – уравнение непрерывности, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – электрическое и магнитное поля, c – скорость света, ρ – плотность заряда, $\mathbf{j}$ – плотность тока. Согласно (1) поля удовлетворяют волновым уравнениям

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}.\tag{2}$$

Соответствующая векторная функция Грина удовлетворяет уравнению [5]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \delta(t - t_p).\tag{3}$$

Здесь $(\mathbf{r}, t)$ – текущая координата и время, а $(\mathbf{r}_p, t_p)$ – координата точки наблюдения p и время наблюдения, $\mathbf{f}$ – произвольный постоянный вектор, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. В первой части данной работы были найдены две равные друг-другу формы для запаздывающей векторной функции Грина

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}, t_p - t) = \frac{\mathbf{f}}{4\pi R} \delta\left(t_p - t - \frac{R}{c}\right) - \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c}\right) \theta\left(t_p - t - \frac{R}{c}\right) \right)\tag{4a}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}, t_p - t) &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{c^2 \mathbf{f}}{4\pi R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \\ &\quad + c^2 \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t).\end{aligned}\tag{4b}$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|$. Используя первую форму (4a) в произвольно выбранном объеме V с поверхностью S для электромагнитного поля в [5] были найдены следующие формулы

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) &= \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t_p} \oint_S \frac{[(\mathbf{n} \times \mathbf{B})]}{R} dS + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_p \oint_S \frac{[(\mathbf{E} \times \mathbf{n})]}{R} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \nabla_p \oint_S \frac{[\mathbf{E} \mathbf{n}]}{R} dS - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_p} \int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R} dV - \operatorname{grad}_p \int_V \frac{[\rho]}{R} dV, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_p \oint_S \frac{[(\mathbf{n} \times \mathbf{B})]}{R} dS + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t_p} \oint_S \frac{[(\mathbf{E} \times \mathbf{n})]}{R} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \nabla_p \oint_S \frac{[\mathbf{B} \mathbf{n}]}{R} dS + \frac{1}{c} \operatorname{rot}_p \int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R} dV.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь символ $[-]$ означает, что функция берется не в момент времени t_p , а в запаздывающий момент $t_p - R/c$. Поверхностные интегралы описывают дифракционные поля, обусловленные полями движущихся вне объема зарядами, а объемные интегралы определяют поля движущихся внутри объема зарядов. Это следует из того, что объемные члены исчезают при отсутствии зарядов внутри объема и, следовательно, являются решениями неоднородных уравнений (2), в то время как поверхностные интегралы не зависят от присутствия зарядов внутри объема и являются решениями однородных уравнений, соответствующих уравнениям (2). Хотя выражения (5) были получены как решения уравнений (2), не используя понятия векторного и скалярного потенциалов [1,2], нетрудно в выражении (5) увидеть хорошо известные вектор и скалярные потенциалы $\mathbf{A} = c^{-1} \int_V [\mathbf{j}] / R dV$, $\phi = \int_V [\rho] / R dV$. Поля зарядов, движущихся внутри объема, как видно из (5) (объемные интегралы), выражаются через вектор и скалярные потенциалы как (соответственно электрическое и магнитное поля) $-c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t_p - \text{grad}_p \phi$ и $\text{rot}_p \mathbf{A}$. В этой работе вторая форма векторной функции Грина (4b) будет использована для получения формул для электромагнитного поля в произвольном образом выбранном объеме V .

3. Электрическое и магнитное поля

В работе [5] для нахождения электромагнитного поля были получены следующие формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{fE}(\mathbf{r}_p, t_p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot} \mathbf{G}) d\mathbf{S} dt - \frac{4\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} dV dt, \\ \mathbf{fB}(\mathbf{r}_p, t_p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{G}) d\mathbf{S} dt + \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{G} \text{rot} \mathbf{j} dV dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Найдем формулы для полей исходя из выражений (6) и для векторной функции Грина используя формулу (4b), а не (4a), как в работе [5].

3.1. Электрическое поле

Сначала обратимся к нахождению электрического поля по первой формуле (6). Рассмотрим член $-(4\pi / c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{G} \partial \mathbf{j} / \partial t dV dt$. Согласно (4b) вторая форма векторной функции Грина состоит из двух слагаемых. Обозначим первый из них через $\mathbf{G}_1$, а второй – через $\mathbf{G}_2$. Рассматриваемый член для первого слагаемого имеет вид $-(4\pi / c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{G}_1 \partial \mathbf{j} / \partial t dV dt$. Подставляя из (4b) $\mathbf{G}_1$ и выполняя интегрирование по времени по частям, получим

$$-\frac{4\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{G}_1 \partial \mathbf{j} / \partial t dV dt = \text{frot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\mathbf{j} \theta(t_p - t - R/c)}{R} dV dt. \quad (7)$$

Индекс « p » у знаков дифференцирования означает дифференцирование по координатам точки наблюдения. В (7) мы учли, что в силу того, что $R = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|$,

дифференцирование функций от R по текущим координатам равно со знаком минус дифференцированию по соответствующим координатам точки наблюдения и как следствие $\text{rotrot}\left(\left(\mathbf{f}/R\right)\theta(t_p - t - R/c)\right) = \text{rot}_p \text{rot}_p\left(\left(\mathbf{f}/R\right)\theta(t_p - t - R/c)\right)$. При интегрировании по частям мы учли, что члены, получающиеся на бесконечных пределах, равны нулю. Это является следствием обращения в нуль на бесконечностях векторной функции $\text{rotrot}(\mathbf{f}(t_p - t - R/c)\theta(t_p - t - R/c)/R)$ и было доказано в первой части работы [5]. Кроме того, мы учли, что $(t_p - t - R/c)\delta(t_p - t - R/c) = 0$. Перейдем к слагаемому, связанной с $\mathbf{G}_2$:

$$-\frac{4\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{f} c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)(t_p - t) \theta(t_p - t) \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} dV dt = -4\pi \mathbf{f} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_p - t) \mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t) dt. \quad (8)$$

Здесь опять же мы выполнили интегрирование по времени по частям, причем член при $t = -\infty$ исчезает при предположении $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)|_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$. Это означает предположение, что заряды в бесконечном прошлом были неподвижны, а затем пришли в движение [6]. Член при $t = +\infty$ исчезает из-за обращения в нуль функции $\theta(t_p - t)$ при $t = +\infty$.

Теперь, согласно (6), рассмотрим член $\int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot} \mathbf{G}) d\mathbf{S} dt$. В этом члене дает вклад только $\mathbf{G}_1$, так как $\mathbf{G}_2$ содержит пространственную дельта функцию, которая обращается в нуль на поверхности, так как точка наблюдения лежит внутри объема. Для первого слагаемого этого члена имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} dt \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \text{rotrot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} dt \\ &= -\frac{c\mathbf{f}}{4\pi} \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{B} \theta(t_p - t - R/c)}{R} d\mathbf{S} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль элемента поверхности $d\mathbf{S}$. Здесь мы использовали первое уравнение (1), выполнили интегрирование по времени по частям, причем на бесконечных пределах по времени при интегрировании по частям полученные члены исчезают в силу свойств функции $\text{rotrot}(\mathbf{f}(t_p - t - R/c)\theta(t_p - t - R/c)/R)$ [5]. Для второго слагаемого этого члена имеем

$$\begin{aligned} & -\int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \mathbf{E} \times \text{rot} \mathbf{G} d\mathbf{S} dt = -\frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \text{rot} \Delta \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) d\mathbf{S} dt \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \text{rot} \frac{\mathbf{f}}{4\pi R} \delta(t_p - t - R/c) d\mathbf{S} dt = -\frac{\mathbf{f}}{4\pi} \text{rot}_p \oint_S \frac{[(\mathbf{n} \times \mathbf{E})]}{R} d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь мы воспользовались формулой $\text{rotrot} = \text{graddiv} - \Delta$, а также доказанной в работе [5] формулой

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{4\pi} \Delta \left(\frac{(t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c)}{R} \right) + c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t) \\ &= \frac{1}{4\pi R} \delta(t_p - t - R/c), \end{aligned} \quad (11)$$

и учли, что член $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)$ дает нуль на поверхности из-за пространственной дельта функции (точка наблюдения находится внутри объема). Объединяя формулы (7)–(10), согласно (6), для электрического поля получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) &= -\frac{c}{4\pi} \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{B} \theta(t_p - t - R/c)}{R} dS dt \\ &- \frac{1}{4\pi} \text{rot}_p \oint_S \frac{[(\mathbf{n} \times \mathbf{E})]}{R} dS + \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\mathbf{j} \theta(t_p - t - R/c)}{R} dV dt \\ &- 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_p - t) \mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь поверхностные интегралы представляют дифракционные поля, обусловленные полями заряженных частиц, находящиеся за пределами рассматриваемого объема, объемный интеграл представляет поле движущихся внутри объема зарядов, а последний член связан с тем, что мы поле вычисляем также в местах, где находятся заряды. В (12) нужно выделить особое внимание вектору

$$\mathbf{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\mathbf{j} \theta(t_p - t - R/c)}{R} dV dt. \quad (13)$$

Этот вектор является вектором Герца [4] в общем случае зависящего от времени плотности тока. Чтобы это показать, поступим как в [4] и представим плотность тока и плотность заряда одним вектором $\mathbf{P}$ в виде

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho = -\text{div} \mathbf{P}. \quad (14)$$

Подставляя плотность тока из (14) в (13) и выполняя интегрирование по времени по частям, находим

$$\mathbf{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \frac{\theta(t_p - t - R/c)}{R} dV dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\mathbf{P} \delta(t_p - t - R/c)}{R} dV dt = \int_V \frac{[\mathbf{P}]}{R} dV. \quad (15)$$

Это выражение совпадает с выражением запаздывающего электрического вектора Герца [3]. Как уже было сказано, обычно используется вектор Герца для гармонического случая. Считая $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ и подставляя в (15), получим

$$\mathbf{Z} = e^{-i\omega t_p} \int_V \mathbf{P}_0(\mathbf{r}) \frac{e^{i\omega R/c}}{R} dV, \quad (16)$$

что совпадает с выражением вектора Герца в гармоническом случае [4]. Кроме того, выражение электрического поля $\text{rot}_p \text{rot}_p \mathbf{Z}$ заряженных частиц, движущихся внутри объема через вектор $\mathbf{Z}$ совпадает с выражением электрического поля через вектор Герца [3]. Вводя вектор Герца (13), выражение электрического поля (12) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) = & -\frac{c}{4\pi} \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{B} \theta(t_p - t - R/c)}{R} dS dt \\ & - \frac{1}{4\pi} \text{rot}_p \oint_S \frac{[(\mathbf{n} \times \mathbf{E})]}{R} dS + \text{rot}_p \text{rot}_p \mathbf{Z} - 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_p - t) \mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

3.2. Магнитное поле

Перейдем к магнитному полю. Мы должны исходить из второго уравнения (6). Первый из поверхностных интегралов приводит к выражению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{B} dS dt = -\frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right) dS dt. \quad (18)$$

Для первого из этих членов имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS dt \\ & = -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \mathbf{n} \times \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS dt \\ & = \frac{c\mathbf{f}}{4\pi} \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{R} \theta(t_p - t - R/c) dS dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь было выполнено интегрирование по времени по частям. Для второго члена получим

$$\begin{aligned} & -\frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \times \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} dS dt \\ & = -c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \text{div} \left(\text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \times \mathbf{j} \right) dV dt \\ & = -c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \left(\mathbf{j} \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \right. \\ & \quad \left. - \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} (t_p - t - R/c) \theta(t_p - t - R/c) \right) \text{rot} \mathbf{j} \right) dV dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим первое слагаемое (20) (второе слагаемое в (20), оставим так как есть):

$$\begin{aligned} & -c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \text{rot} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) dV dt \\ & = c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \text{rot} \Delta \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) dV dt \\ & = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \text{rot}_p \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \delta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) dV dt - 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \text{rot} (\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot}_p \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \delta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) dV dt - 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot} \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t) dV dt \\
& = \frac{\mathbf{f}}{c} \operatorname{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\mathbf{j}}{R} \delta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) dV dt - 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot} (\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt \\
& = \frac{\mathbf{f}}{c} \operatorname{rot}_p \frac{\partial}{\partial t_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\mathbf{j}}{R} \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) dV dt - 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot} (\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt \\
& = \frac{\mathbf{f}}{c} \operatorname{rot}_p \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t_p} - 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot} (\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь мы воспользовались формулой (11). Рассмотрим теперь объемный интеграл во второй формуле (6):

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{G} \operatorname{rot} \mathbf{j} dV dt & = -c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) \operatorname{rot} \mathbf{j} dV dt \\
& + 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \operatorname{div} (\mathbf{j} \times \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt \\
& + 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot} (\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt \\
& = -c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) \operatorname{rot} \mathbf{j} dV dt \\
& + 4\pi c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j} \operatorname{rot} (\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) (t_p - t) \theta(t_p - t)) dV dt
\end{aligned} \tag{23}$$

Теперь собирая члены (19), второе слагаемое (20), (21), (22) и (23), получим

$$\frac{c\mathbf{f}}{4\pi} \operatorname{rot}_p \operatorname{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{R} \theta(t_p - t - R/c) dS dt + \frac{\mathbf{f}}{c} \operatorname{rot}_p \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t_p}. \tag{24}$$

Осталось рассмотреть второй поверхностный интеграл во второй формуле (6). Для этого члена имеем

$$\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{G} dS dt & = -\int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \Delta \left(\frac{c^2}{4\pi} \frac{\mathbf{f}}{R} \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) dS dt \\
& = -\int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{f}}{4\pi R} \delta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) \right) dS dt = -\frac{\mathbf{f}}{4\pi} \operatorname{rot}_p \oint_S \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]}{R} dS.
\end{aligned} \tag{25}$$

Комбинируя (24) и (25), для магнитного поля окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) & = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_p \oint_S \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]}{R} dS \\
& + \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot}_p \operatorname{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{R} \theta \left(t_p - t - \frac{R}{c} \right) dS dt + \frac{1}{c} \operatorname{rot}_p \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t_p}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь также, как и для электрического поля имеются поверхностные интегралы,

выражающие дифракционные поля внешних источников и последний член, который через вектор Герца выражает магнитное поле движущихся внутри объема зарядов. Таким образом, для определения электромагнитного поля имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) = & -\frac{c}{4\pi} \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{B} \theta(t_p - t - R/c)}{R} dS dt \\
& - \frac{1}{4\pi} \text{rot}_p \oint_S \frac{[(\mathbf{n} \times \mathbf{E})]}{R} dS + \text{rot}_p \text{rot}_p \mathbf{Z} - 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_p - t) \mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t) dt, \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) = & -\frac{1}{4\pi} \text{rot}_p \oint_S \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]}{R} dS + \frac{c}{4\pi} \text{rot}_p \text{rot}_p \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{R} \theta\left(t_p - t - \frac{R}{c}\right) dS dt \\
& + \frac{1}{c} \text{rot}_p \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t_p}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Как уже было сказано, последний член в выражении электрического поля в (27) связан с тем, что мы вычисляем поле также в тех точках, где имеются заряды. Действительно, если точка наблюдения лежит в точке, где нет зарядов, то $\mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t) = 0$ и этот член исчезает. Но в общем случае он обеспечивает выполнение уравнения Максвелла $\text{div}_p \mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) = 4\pi \rho(\mathbf{r}_p, t_p)$. Это можно доказать, беря дивергенцию от обеих частей формулы для электрического поля в (27)

$$\begin{aligned}
\text{div}_p \mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) = & -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_p - t) \text{div}_p \mathbf{j}(\mathbf{r}_p, t) dt = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_p - t) \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_p, t)}{\partial t} dt \\
= & 4\pi \theta(t_p - t) \rho(\mathbf{r}_p, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 4\pi \rho(\mathbf{r}_p, t_p) = 4\pi \rho(\mathbf{r}_p, t_p).
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь мы воспользовались уравнением непрерывности, проинтегрировали по частям по времени и полученные на бесконечностях члены представили равными нулю, налагая условие $\rho(\mathbf{r}, t) \Big|_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$, что согласуется с использованным ранее условием $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$.

4. Заключение

В этой работе, являющейся продолжением работы [5], исследуется зависящая от времени векторная теория дифракции и полей заряженных частиц. В [5] получены выражения для электромагнитного поля с использованием векторной функции Грина, причем получены две формы векторной функции Грина. В работе [5] использована одна из этих форм, что привело к выражениям электромагнитных полей через поверхностные интегралы, представляющие дифракционные поля зарядов движущихся вне рассматриваемого объема, и через объемные интегралы, представляющие поля движущихся внутри объема зарядов. Причем для этих последних полученные выражения совпадают с выражениями через векторный и скалярный потенциалы. В данной работе использована вторая форма векторной функции Грина, что привело к другому интегральному представлению полей. Здесь объемные интегралы, представляющие поля движущихся внутри объема зарядов, выражаются через обобщенный вектор Герца. В данной работе для вектора Герца получено выражение через плотность тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. **J.D. Jackson.** Classical Electrodynamics. 3rd ed., New York: Wiley, 1998.
2. **L.D. Landau, E.M. Lifshits.** Course of Theoretical Physics, v. 2. The Classical Theory of Fields, 4th rev. engl. Ed., London: Athenaum Press LTD, 1996.
3. **M. Born, E. Wolf.** Principles of Optics, Oxford: Pergamon Press, 1980.
4. **U.J.A. Stratton.** Electromagnetic theory, New York: McGraw-Hill Book Company, 1941.
5. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys., **57**, 331 (2022).
6. **B.G. Levich.** Theoretical Physics, an Advanced Text, vol. 1, Theory of the Electromagnetic Field, Theory of Relativity, Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1970.

ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ԵՎ ԼԻՑՔԵՐԻ ԴԱՇՏԵՐԸ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎԱԾ ՀԵՐՑԻ ՎԵԿՏՈՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ

Մ.Կ. ԲԱԼՅԱՆ

Նախորդ աշխատանքում, օգտագործելով գտնված վեկտորական Գրինի ֆունկցիան, էլեկտրամագնիսական դաշտերը կամայական վերցված ծավալում ներկայացված են վեկտորական տեսքով՝ օգտագործելով մակերևութային և ծավալային ինտեգրալներ, ընդ որում մակերևութային ինտեգրալները նկարագրում են դիֆրակցված դաշտը, որը ստեղծվել է ծավալից դուրս գտնվող լիցքերով, իսկ ծավալային ինտեգրալները նկարագրում են ծավալում շարժվող լիցքերի կողմից ստեղծված դաշտերը: Գրինի ֆունկցիայի համար օգտագործվել է գտնված երկու ձևերից մեկը: Այս աշխատանքում էլեկտրամագնիսական դաշտերի արտահայտություններն ստացվում են՝ օգտագործելով գտնված Գրինի ֆունկցիայի երկրորդ ձևը: Վեկտորական Գրինի ֆունկցիայի երկրորդ ձևն օգտագործելիս ծավալի ներսում շարժվող լիցքերի դաշտերն արտահայտվում են ընդհանրացված Հերցի վեկտորով: Աշխատանքում ստացված արտահայտություններն ունեն իրենց առավելությունները ընտրված ծավալում դաշտերը որոշելու համար:

DIFFRACTION FIELDS AND FIELDS OF CHARGES, EXPRESSED IN TERMS OF HERTZ VECTOR IN ELECTRODYNAMICS

M.K. BALYAN

In the first part of this work, using the found vector Green's function, the electromagnetic fields in an arbitrary chosen volume are presented in vector form using surface and volume integrals, at that the surface integrals describe the diffraction of the field of charges external to the volume, and the volume integrals describe the fields of the charges, moving within the volume. For the Green's function, one of the two found forms was used. In this work, expressions for the electromagnetic fields are obtained using the second form of the found Green's function. When using the second form of the vector Green's function, the fields of charges moving inside the volume are expressed in terms of the generalized Hertz vector. The expressions obtained in this work have their advantages for determining the fields in a selected volume.