Известия НАН Армении, Математика, том 58, н. 1, 2023, стр. 3 – 21.

НАИЛУЧШИЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В УГЛАХ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

С. А. АЛЕКСАНЯН

Институт Математики РАН Республики Армении
E-mail: *asargis@instmath.sci.am*

Аннотация. В данной работе исследуется задача об наилучшеМ равномерном приближении в угле целыми функциями. Полученные новые результаты по равномерному приближению являются уточнением ранее известных результатов. Здесь мы также даем положительный ответ на проблему предложенную Кобером: Пусть функция f голоморфна внутри Δ_α, непрерывна и ограничена на Δ_α для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$. Если функция $f\left(z^{1/\rho}\right)$ равномерно непрерывна на лучах $\pm l_{\alpha\rho/2}$, то функция f допускает равномерное приближение на Δ_α целыми функциями порядка ρ и конечного типа.

MSC2020 number: 35J25.

Ключевые слова: Равномерное приближение; угол; целая функция.

1. Введение и вспомогательные леммы

Функции f, подлежащие приближению на E целыми функциями, предполагаются из класса $A(E)$: непрерывные на E и голоморфные на внутренности E^o множества E. Такая функция может иметь произвольный рост на E вблизи бесконечности, причем то же самое верно для возможного роста приближающей целой функции.

В этой ситуации, аналогом полиномиального приближения *наилучших* и *Джексоновских* задач являются следующие задачи: для канонического множества E и функции $f \in A(E)$ построить приближающие целые функции g таким образом, чтобы их *рост* в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ был *оптимальным* в некотором смысле, этот рост должен быть выражен через рост функции f и величин, характеризующих структуру f на E, в частности - рост некоторых *производных* функции f на границе ∂E области E. С точки зрения классической теории целых функций, задача представляет особый интерес для описания классов функций на канонических множествах, допускающих равномерное и/или касательное приближение целеыми функциями заданного *конечного* порядка, с точными оценками их типа. Для краткости, будем называть такой тип равномерного приближения *оптимальным.*

Задача оптимального равномерного приближения целыми функциями в углах исследовалось в работах [1]-[8]. В данной статье мы ограничиваемся рассмотрением этой проблемы для случая приближения на замкнутых углах $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha/2\}$ (см. работы Х. Кобера [3], М.В. Келдыша [4] и Н. Аракеляна [5]). Как это показано в работе [4] (подробности доказательства см. в [1], гл. 2), функцию $f \in A(\Delta_{\alpha+\delta})$ $(\delta > 0)$ можно равномерно приблизить на Δ_α целыми функциями g, для роста которых получены оценки, зависящие лишь от α, δ и роста функции f на $\Delta_{\alpha+\delta}$; эти оценки точно указывали на возможный оптимальный *порядок* функции g в $\mathbb{C}$, но ничего не говорили об их *типе.* Позже более точные результаты были получены в работе [6], в предположении, что $f \in A(\Delta_\alpha)$ с некоторыми дополнительными свойствами функции f на границе Δ_α. Особо отметим следующий результат: если $f \in A(\Delta_\alpha)$ и функция $z \to f\left(z^{1/\rho}\right)$ с $\rho = \pi/\left(2\pi - \alpha\right)$ *равномерно непрерывна* на $\Delta_{\alpha\rho}$, тогда можно функцию f равномерно приблизить на Δ_α целыми функциями g порядка $\leq \rho$. Это дает частичный ответ на гипотезу Х. Кобера [3]; полный ответ смотрите ниже в разделе 2. В частности, в работе [12] также оценивается тип приближающих целых функций для некоторых специальных классов функций.

Целью данной статьи является окончательное уточнение основных результатов об оптимальном равномерном приближении на углах Δ_α целыми функциями, включая прямые теоремы типа Джексона и обратные результаты типа Бернштейна. Отметим, что такое уточнение для случая приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ было достигнуто в работе [6], а для случая приближения на замкнутых полосах - в работе [7]. В данной работе мы будем использовать некоторые аппроксимационные конструкции, развитые в [5] - [7] и [12].

Работа состоит из двух разделов. Первый содержит введение и вспомогательные леммы; а второй - доказательства результатов об оптимальном равномерном приближении на углах целыми функциями.

1.1. **Некоторые обозначения.** 1^0. *Внутренность, замыкание и границу* множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим соответственно через E^0, $\overline{E}$ и ∂E. *Дополнение* E в $\mathbb{C}$ - через E^c. Для $E \subset \mathbb{C}$ пусть $C\left(E\right)$ будет классом непрерывных функций $f : E \to \mathbb{C}$ с равномерной нормой $\|f\|_E = \sup_{z\in E}|f(z)|$, и положим

$$C_b(E) = \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\},$$

так что $C(E) = C_b(E)$ для компактного множества E. *Модуль непрерывности* $\omega_f(\delta)$ для $f \in C_b(E)$ определяется для $\delta > 0$ следующим образом:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{z,\zeta \in E} \{|f(z) - f(\zeta)| : |z - \zeta| \leq \delta\}.$$

Для открытого множества Ω в $\mathbb{C}$, пусть $C'(\Omega)$ - класс непрерывно дифференцируемых (в смысле $\mathbb{R}^2$) комплексных функций на Ω.

2^0. Предположим теперь, что G - жордановая область с положительно ориентированной кусочно гладкой границей Γ. Класс $C'(\overline{G})$ определим стандартным путем, как класс функций $\varphi \in C(\overline{G}) \cap C'(G)$, допускающих непрерывное продолжение производных φ'_x и φ'_y из G к $\overline{G}$; это определяет их однозначно на Γ. Следующая формула является комплексным вариантом известной *теоремы о дивергенции* для $\varphi \in C'(\overline{G})$:

$$_\Gamma \varphi\,(z)\,dz = i_G 2\overline{\partial}\varphi d\sigma, \tag{1.1}$$

где σ - лебегова плоская мера на G и оператор $\overline{\partial}$ определяется следующим образом:

$$2\overline{\partial}\varphi = \varphi'_x + i\varphi'_y. \tag{1.2}$$

В *полярных* координатах $z = re^{i\theta}$ частные производные функции φ по r и θ обозначим соответственно через φ'_r и φ'_θ. В этих терминах

$$2\overline{\partial}\varphi = e^{i\theta}[\varphi'_r + (i/r)\varphi'_\theta]. \tag{1.3}$$

Отметим также следующее свойство оператора $\overline{\partial}$ для $\varphi, \psi \in C'(\overline{D})$

$$\overline{\partial}(\varphi\psi) = \psi\overline{\partial}\varphi + \varphi\overline{\partial}\psi. \tag{1.4}$$

$H\,(\Omega)$ обозначает класс голоморфных в Ω функций, таких что условие $f \in H\,(\Omega)$ означает, что $f \in C^1\,(\Omega)$ и $\overline{\partial}f \equiv 0$ в Ω. Для замкнутого множества $E \subset \Omega$ обозначим $A\,(E) = C\,(E) \cap H\,(E^o)$ и $A_b\,(E) = C_b\,(E) \cap H\,(E^o)$. Обозначим через $A'\,(E)$ класс функций $E \to \mathbb{C}$, один раз непрерывно дифференцируемых на E в смысле $\mathbb{C}$.

Предположим теперь, что $\varphi \in A'(\overline{G})$ и $\psi \in C'(\overline{G})$. Тогда по (1.4) имеем

$$\overline{\partial}(\varphi\psi) = \varphi\overline{\partial}\psi \text{ на } \overline{G}. \tag{1.5}$$

Следующая формула является важным приложением формулы (1.1), известной для $\varphi \equiv 1$ как обобщенная формула Коши или иногда как *формула Бореля-Помпейю* для ψ, указывающая, что

$$\frac{1}{2\pi i}{}_{\Gamma}\frac{(\varphi\psi)(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}{}_{D}\frac{\varphi(\zeta)\overline{\partial\psi}(\zeta)}{\zeta - z}d\sigma = \begin{cases} (\varphi\psi)(z), & \text{для} \quad z \in G, \\ 0, & \text{для} \quad z \in \overline{G}^{c}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Заметим, что при $\psi \equiv 1$ (подразумевая $\overline{\partial}\psi \equiv 0$) формула (1.6) является классической формулой Коши для $\varphi \in H\left(\Omega\right)$ с $\overline{G} \subset \Omega$. Заметим также, что формула (1.6) следует из отмеченного выше частного случая $\varphi \equiv 1$, с заменой ψ на $\varphi\psi$ и с учетом (1.5). Обозначим через $C_{\zeta}(z)$ ядро Коши:

$$C_{\zeta}\left(z\right) = \left(\zeta - z\right)^{-1} \text{ для } z \in \Delta_{\alpha},\ \zeta \in \Delta_{\alpha}^{c}.$$

Ниже мы будем обозначать через Δ_{∞}^{o} область голоморфности функции $z \to \log z$, с точками ветвления 0 и бесконечностью. На римановой поверхности Δ_{∞} можно использовать глобальную полярную параметризацию $z = re^{i\theta}$ с $r > 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$. В этих терминах функция $z \to \log z := \log r + i\theta$ удовлетворяет в силу (1.3) условию голоморфности $\overline{\partial}(\log z) = 0$. Приведенное выше понятие $A(E)$ может быть легко расширено для $E \subset \Delta_{\infty} \cup \{0\}$.

3^{0}. Положим также:

$d_E(z) := \inf\{|z - z'| : z' \in E\}$ - расстояние $z \in \mathbb{C}$ от $E \subset \mathbb{C}$;

$E^{d} := \{\zeta \in \mathbb{C} : d_E(\zeta) \le d\}$ - d - окрестность множества $E \subset \mathbb{C}$;

$D_r\left(a\right) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ для $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ - открытый круг; $D_r = D_r\left(0\right)$;

$l_{\theta} := \{z = te^{i\theta} : t \in [0, +\infty)\}$ для $\theta \in \mathbb{R}$ - луч;

$\Delta_{\alpha,\beta} := \{l_{\theta} : \theta \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}\}$ - сектор на $\Delta_{\infty} \cup \{0\}$ (на $\mathbb{C}$, если $\beta - \alpha < 2\pi$);

$\Delta_{\alpha}(\beta) := \Delta_{\beta-\alpha/2,\beta+\alpha/2}$ для $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ - угол с биссектрисой l_{β} и отверстием α;

$\Delta_{\alpha} := \Delta_{\alpha}(0)$; $\gamma_{\alpha} := l_{\alpha/2} \cup l_{-\alpha/2}$ - граница Δ_{α};

$x^{+} := \max\{x, 0\}$ для $x \in \mathbb{R}$; $\log^{+} x = (\log x)^{+}$ для $x > 0$ и $\log^{+} 0 = 0$;

$s_z := \begin{cases} z/\left|z\right| & \text{для } z \neq 0, \\ 0 & \text{для } z = 0 \end{cases}$ - функция *знак.*

4^{0}. Пусть теперь $f \in C\left(E\right)$, где $E \subset \mathbb{C}$ замкнутое и неограниченное множество, так что $E \cap \partial D_r \neq \varnothing$ для $r \ge r_0 \ge 0$. Для $r \ge r_0$

$$M_f\left(r\right) = M_f\left(r, E\right) := \left\|f\right\|_{E \cap \overline{D}_r}.$$

Остальные обозначения и понятия мы введем ниже.

1.2. **Предварительные результаты типа Фрагмен-Линделефа.** 1^{o}. Сначала нам понадобится следующая теорема.

Теорема A. *Пусть* $h \in A(\Delta_\alpha)$ *для* $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\rho = \pi/\alpha$ *и*

$$\liminf_{r\to\infty} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r^{-\rho} \log^+ \left|h(re^{i\theta})\right| \cos(\rho\theta) d\theta = 0. \tag{1.7}$$

Тогда из условия $\|h\|_{\gamma_\alpha} < +\infty$ следует, что $\|h\|_{\Delta_\alpha} = \|h\|_{\gamma_\alpha} < +\infty$.

Теорема A для $\rho = 1$ является версией братьев Неванлинна теоремы Фрагмена-Линделефа для полуплоскости Δ_π (см. [9] и [10, Теорема ??????????]), и легко следует из этого случая.

Следствие 1.1. *Пусть* $g \in A'(\Delta_\alpha)$ *для* $\alpha \in (0, 2\pi)$ *с* $\|g\|_{\Delta_\alpha} < +\infty$. *Тогда из условия*

$$g'(z) = O(|z|^\mu) \text{ при } z \to \infty,\ z \in \partial\Delta_\alpha \tag{1.8}$$

с постоянной $\mu \in \mathbb{R}^+$ *следует, что*

$$g'(z) = O(|z|^\mu) \text{ при } z \to \infty,\ z \in \Delta_\alpha. \tag{1.9}$$

Доказательство. Определим функцию $h \in A(\Delta_\alpha)$ по формуле

$$h(z) = (z+1)^{-\mu} g'(z),\ z \in \Delta_\alpha, \tag{1.10}$$

удовлетворяющую неравенству $\|h\|_{\gamma_\alpha} < +\infty$ по (1.8). Пусть $d(z) = d_{\gamma_\alpha}(z)$ будет *расстоянием* $z = re^{i\theta} \in \Delta_\alpha$ от γ_α. Поскольку для $r \geq 1$

$$d(z) \geq r\sin(\alpha/2 - |\theta|) \geq c_\alpha(\alpha/2 - |\theta|)$$

с $c_\alpha = (2/\alpha)\sin(\alpha/2)$, из неравенства Коши следует, что

$$|g'(z)| \leq c(\alpha/2 - |\theta|)^{-1},\ \ c = c_\alpha^{-1} \|g\|_{\Delta_\alpha}.$$

Отсюда и из (1.10) для некоторого $r_0 > 1$ и $r \geq r_0$ следует, что

$$\left|h(re^{i\theta})\right| \leq 2cr^{-\mu}(\alpha/2 - |\theta|)^{-1},\ \ |\theta| \leq \alpha/2.$$

Отсюда получаем, что

$$\log^+ \left|h(re^{i\theta})\right| \leq (-\mu)^+ \log r + \log^+(\alpha/2 - |\theta|)^{-1} + \log^+(2c),$$

показывая, что условие (1.7) Теоремы A удовлетворяется также для h, так что $\|h\|_{\Delta_\alpha} = \|h\|_{\gamma_\alpha} < +\infty$, которая завершает доказательство (1.9). □

2. Следующая теорема другая версия принципа Фрагмен-Линделефа (см. [11], Гл. I, Теорема 22).

Теорема B. *Пусть* $g \in A(\Delta_\alpha)$ *для* $\alpha \in (0, 2\pi)$, *на* $\|g\|_{\gamma_\alpha} < +\infty$ *и функция* g *имеет конечный порядок* $\rho = \pi/\alpha$ *- и тип* σ Δ_α, *то есть*

$$\sigma := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ M_g(r)}{r^\rho} < +\infty.$$

Тогда для $z = re^{i\theta} \in \Delta_\alpha$ имеем

$$|g(z)| \le \|g\|_{\partial\Delta_\alpha} \exp\{\sigma r^\rho \cos(\rho\theta)\}. \tag{1.11}$$

Следствие 1.2. *Пусть* g *целая функция, удовлетворяющая условиям:*

i) $\|g\|_{\Delta_\alpha} = m < +\infty$ *для некоторого* $\alpha \in (0, 2\pi)$;

ii) g *имеет конечный порядок* $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$ *- и тип (*$= \sigma$*) на угле* $\Delta_{\pi/\rho}(\pi)$.

Тогда

$$g'(z) = O(|z|^{\rho-1}) \text{ при } z \to \infty,\ z \in \Delta_\alpha. \tag{1.12}$$

Доказательство. Положим $g_-(z) = g(-z)$ и $\beta = 2\pi - \alpha$. Пусть $d = d(\zeta)$ *расстояние* точки $\zeta = re^{i\theta} \in \Delta_\beta$ от $\partial\Delta_\beta$. Если, в частности, $|\theta| \ge (\pi - \alpha)^+/2$, то $d = r\sin(\beta/2 - |\theta|)$, так что

$$\cos(\rho\theta) = \sin\left[\rho \arcsin(dr^{-1})\right] \le \rho \arcsin(dr^{-1}) \le 2\rho dr^{-1}.$$

Пусть теперь $z \in \partial\Delta_\beta$, $\delta = |z|^{1-\rho}$ и $\zeta = z + \delta e^{i\theta}$ для $|\theta| \le \pi$, так что $d(\zeta) \le \delta$ и $|z|/r \to 1$ при $|z| \to \infty$. Применяя Теорему B к функции $g_- \in A(\Delta_\beta)$, из условия i) и (1.11) для достаточно больших $|z|$, получим:

$$|g(-\zeta)| \le m \exp(2\sigma\rho d r^{\rho-1}) \le c, \text{ где } c = m\exp(4\sigma\rho).$$

Для функции $g(-\zeta)$ и круга $\partial D_\delta(z)$ применяя неравенство Коши, получим

$$|g'(-z)| \le c\,|z|^{\rho-1} \text{ для } z \in \partial\Delta_\beta \text{ и } |z| \ge r_0 > 0.$$

Отсюда и Следствия 1.1 следует, что $g'(-z) = O(|z|^{\rho-1})$ при $z \to \infty$, $z \in \Delta_\beta$,что эквивалентно (1.12). □

Лемма 1.1. *Пусть функция* $f \in A_b(\Delta_{\alpha,\beta})$ *и* f *равномерно непрерывна на* $\partial\Delta_{\alpha,\beta}$. *Тогда функция* f *равномерно непрерывна также на* $\Delta_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. Отметим, что функция f равномерно непрерывна на каждом луче l_θ для $\theta \in (\alpha, \beta)$: поскольку функция $f \in A_b(\Delta_\delta(\beta))$ для некоторого $\delta > 0$, тогда по неравенству Коши, функция f' будет ограниченным на $l_\theta \cap \overline{D}_{r_0}$ для любого фиксированного $r_0 > 0$. Разделяя интервал $[\alpha, \beta]$ на небольшие промежутки длины $< \pi$, достаточно доказать лемму для соответствующих углов, т.е. для случая выпуклого сектора $\beta - \alpha < \pi$, который сводится к сектору Δ_α с $\alpha \in (0, \pi)$.

Пусть Δ_α^ν - параллельный перенос Δ_α с вершиной $\nu \in \Delta_\alpha$. Тогда (по неравенству Коши) функция f' ограничена на угле $\Delta_\alpha^{r_\alpha} \subset \Delta_\alpha$ с $r_\alpha = 2\cos(\alpha/2)$, так что функция f равномерно непрерывна на $\Delta_\alpha^{r_\alpha}$. Обозначим через $\omega_1(\delta)$ $(\omega_2(\delta))$ модуль непрерывности функции f на $\partial\Delta_\alpha$ (на $\Delta_\alpha \cap \overline{D}_{r_\alpha}$), и положим

$$\omega(\delta) = \max\{\omega_1(\delta), \omega_2(\delta)\} \text{ для } \delta > 0.$$

Таким образом, функция f равномерно непрерывна на *границах* замкнутых выпуклых областей

$$\Lambda^\pm = \Delta_\alpha \setminus (\Delta_\alpha^{\nu_\mp})^o \text{ с } \nu_\pm = \exp(\pm i\alpha/2).$$

Это значит, что функция $\lambda_\delta^\pm \in A_b(\Lambda_\pm)$, определенная по формуле

$$\lambda_\delta^\pm(z) = f(z + \delta\nu_\pm) - f(z) \text{ для } z \in \Lambda^\pm,\ \delta \in (0, 1], \tag{1.13}$$

будет удовлетворять (по принципу максимума модуля) условию

$$\sup_{z\in\Lambda^\pm} \left|\lambda_\delta^\pm(z)\right| = \sup_{\zeta\in\partial\Lambda^\pm} \left|\lambda_\delta^\pm(\zeta)\right| \le \omega(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0. \tag{1.14}$$

Теперь, по (1.13), (1.14), формула

$$\varphi_\delta^\pm(z) = (\delta\nu_\pm)^{-1} \int_z^{z+\delta\nu_\pm} \lambda_\delta^\pm(t)dt \text{ для } z \in \Lambda^\pm$$

определяет функцию $\varphi_\delta^\pm \in A'(\Lambda^\pm)$, для $z \in \Lambda^\pm$ удовлетворяющую условиям

$$\left|\varphi_\delta^\pm(z) - f(z)\right| \le \omega(\delta),\ \ \left|(\varphi_\delta^\pm)'(z)\right| \le \omega(\delta)/\delta.$$

Ограниченность функции $(\varphi_\delta^\pm)'$ на выпуклом множестве $\Lambda^\pm$ доказывает равномерную непрерывность функции $\varphi_\delta^\pm$ на $\Lambda^\pm$. Таким образом, функция f является равномерно непрерывной функцией на областях $\Lambda^\pm$ как равномерный предел равномерно непрерывных функций $\varphi_\delta^\pm$, при $\delta \to 0$. Это доказывает, что функция f равномерно непрерывна на $\Delta_\alpha = \Lambda^- \cup \Delta_\alpha^{r_\alpha} \cup \Lambda^+$, являющейся такой функцией на каждом выпуклом множестве. □

1.3. **Гладкое продолжение гладких функций.** Нам нужен некоторый специфический результат о C' - продолжении для функции $f \in A'(\gamma_\sigma)$, $\gamma_\sigma = \partial\Delta_\sigma$, $\sigma \in (0, 2\pi)$. Нашей целью является построение функции $f_* \in C'(\Delta_\sigma)$, удовлетворяющей условиям $f_* = f$ и $\overline{\partial} f_* = 0$ на γ_σ. Также мы ожидаем хороших оценок для функция $\overline{\partial} f_*$ на Δ_σ в терминах роста функции f'.

Лемма 1.2. *Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$ и $\sigma = 2\pi - \alpha$ и $\partial\Delta_\sigma(\pi) = \gamma_\alpha$. Тогда существует функция $f_* \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$, такая что*

(i) $f_* = f$ и $\overline{\partial} f_* = 0$ на γ_α;

(ii) рост функций f_* и $\overline{\partial} f_*$ для $z \in \Delta_\sigma(\pi)$ ограничен неравенствами

$$|f_*(z)| \leq 3M_f(|z| + 2d, \gamma_\alpha) \tag{1.15}$$

$$\left|\overline{\partial} f_*(z)\right| \leq k_\alpha M_{f'}(|z| + 2d, \gamma_\alpha), \tag{1.16}$$

где $d = d_\alpha(z)$ расстояния z от γ_α и $k_\alpha > 0$ зависит лишь от α.

Доказательство. Для $|\theta| \leq \sigma/2$ положим

$$\psi(\theta) = \sin^2(\tau\theta),\ \ e(\theta) = \exp(is_\theta \sigma/2) \tag{1.17}$$

с $\tau = \pi/\sigma$, и рассмотрим две функции $u, v \in C'(\Delta_\sigma)$, определенные для $z = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma$ по формуле

$$u = r\psi(\theta),\ \ v = (r/\tau)\cos(\tau\theta). \tag{1.18}$$

Определим финкции, ассоцированные с u и v

$$\zeta(z) = u(z)e(\theta) \ \text{ и } \ w(z) = v(z)e(\theta) \text{ для } z \in \Delta_\sigma. \tag{1.19}$$

Очевидно, что $\zeta \in C'(\Delta_\sigma)$ (несмотря на разрыв $e(\theta)$ при $\theta = 0$), поскольку u, u'_r, и u'_θ равны нулю на биссектрисе l_0 угла Δ_σ. Другая функция w даже разрывна на l_0; но отметим, что она имеет очевидные C'-расширения отдельно на углах $\Delta^+_\sigma := \Delta_{0,\alpha/2}$ и $\Delta^-_\sigma := \Delta_{-\alpha/2,0}$.

Отметим, что поскольку $u, v \geq 0$, то следует, что $\zeta, w \in l_{\sigma/2}$ для $z \in \Delta^+_\sigma$ и $\zeta, w \in l_{-\sigma/2}$ для $z \in \Delta^-_\sigma$. Отсюда слвгует, что $\zeta + w \in l_{\pm\sigma/2}$ для $z \in \Delta^\pm_\sigma$. Отметим также, что согласно (1.7) - (1.9), $\zeta(z) = z$ и $w(z) = 0$ для $z \in \Delta_\sigma$, тогда и только тогда, если $z \in \gamma_\sigma$.

Используя (1.17) - (1.19), легко проверяются следующие соотношения:

$$r\zeta'_r = \zeta,\ \ rw'_r = w,\ \ \zeta'_\theta = 2\tau^2 w \sin(\tau\theta),\ \ \psi(\theta)w'_\theta = -\zeta\sin(\tau\theta). \tag{1.20}$$

Пусть $d = d_\sigma(z)$ будет *расстоянием* $z = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma$ от γ_σ. Оценим $|w|$ сверху через d. Положим для этого $\nu = \sigma/2 - |\theta| \in [0, \sigma/2]$ и отметим, что в терминах ν,

$$|w| = v = (r/\tau)\sin(\tau\nu). \tag{1.21}$$

Теперь если $\sigma > \pi$ и $0 \leq \nu < (\sigma - \pi)/2$, то $d = r$, и по (1.21) следует, что $|w| \leq r/\tau \leq 2d$. Если $\sigma \leq \pi$ и $0 \leq \nu \leq \sigma/2$, то $d = r\sin\nu$. Отмечая, что

$$\tau^{-1}\sin(\tau\nu) \leq \nu \leq (\pi/2)\sin\nu, \tag{1.22}$$

по (1.21) снова получаем, что $|w| \leq 2d$. Суммируя, получаем, что

$$|w| \leq 2d_\sigma(z) \text{ для } z \in \Delta_\sigma. \tag{1.23}$$

Теперь определим искомую функцию $f_* \in C'(\Delta_\sigma)$, положив $f_*(z) = f(0)$ для $z = r \in l_0$ и

$$f_*(z) = f(\zeta) - is_\theta\psi(\theta)[f(\zeta + w) - f(\zeta)] \tag{1.24}$$

для $z = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma \backslash l_0$, с $\psi(\theta)$ определенной в (1.17).

а) Убедимся сначала, что функция $f_* \in C(\Delta_\sigma)$, несмотря на разрыв функций w и s_θ on l_0.

Упомянем для этого, что $f \circ \zeta \in C'(\Delta_\sigma)$, поскольку $f \in A'(\gamma_\sigma)$ и $\zeta \in C'(\Delta_\sigma)$. Кроме того, $f_*(z) \to f(0)$, при $z \to z_0 = r_0 \in l_0$, так как тогда $\theta \to 0$ и $\zeta \to 0$, что подразумевает $f(\zeta) \to f(0)$ и $\psi(\theta) \to \psi(0) = 0$.

Отметим также, что $f_*(z) = f(z)$ for $z \in \gamma_\sigma$, в этом случае $z = \zeta$ и $w = 0$, что подразумевает $\varphi(z) = 0$. С учетом (1.23), и то, что $|\zeta| \leq r = |z|$ с $|\psi(\theta)| \leq 1$, в силу (1.24) получаем оценку

$$|f_*(z)| \leq 3M_f(|z| + 2d, \gamma_\sigma) \text{ для } z \in \Delta_\sigma, \tag{1.25}$$

где $d = d_\sigma(z)$. Согласно (1.25), рост функции f_* на Δ_σ зависит лишь от роста функции f на γ_σ; в частности, если функция f ограничена на γ_σ, то функция f_* ограничена на Δ_σ.

б) Чтобы убедиться, что $f_* \in C'(\Delta_\sigma)$, достаточно проверить, что $(\varphi\psi)'_r \to 0$ и $(\varphi\psi)'_\theta \to 0$ при $z = re^{i\theta} \to r_0 \in l_0$, т.е. $r \to r_0$ и $\theta \to 0$; это очевидно следует из того факта, что $\varphi \in C'(\Delta_\sigma^-) \cup C'(\Delta_\sigma^+)$ и $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

Для расчета $\overline{\partial} f_*$ по (1.2), (1.3) отметим, что,

$$\overline{\partial} f(\zeta) = f'(\zeta)\overline{\partial}\zeta, \ \overline{\partial} f(\zeta + w) = f'(\zeta + w)\overline{\partial}(\zeta + w).$$

Теперь учитывая (1.4) и (1.17)-(1.19), для $z = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma$, получим

$$\begin{aligned} 2\overline{z}\overline{\partial} f_*(z) \quad = \quad & [f'(\zeta) - f'(\zeta + w)\sin(\tau\,|\theta|)]\zeta + \\ & s_\theta\psi(\theta)[f'(\zeta + w) - f'(\zeta)](\zeta'_\theta - i\zeta) \\ & + i[f'(\zeta)\zeta'_\theta - s_\theta\psi(\theta)f'(\zeta + w)w] \\ & + s_\theta\psi'(\theta)[f(\zeta + w) - f(\zeta)]. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Правая часть (1.24) равна нулю при $z \in \gamma_\sigma$, поскольку тогда $|\theta| = \sigma/2$ и $w = \zeta'_\theta = 0$ (см. (1.18) – (1.20)); это означает, что выражения в (1.26) в квадратных скобках равны нулю. Таким образом, мы получаем, что $\overline{\partial} f_*(z) = 0$ для $z \in \gamma_\sigma$.

Для оценки правой части (1.26), сначала отметим, что

$$|f(\zeta + w) - f(\zeta)| \leq \int_\zeta^{\zeta + w} |f'(t)|\,|dt| \leq M_{f'}(|z| + |w|\,, \gamma_\sigma)\,|w|\,, \tag{1.27}$$

так как $|\zeta| \le r$. Кроме того $|\psi(\theta)| \le 1$, $|\psi'(\theta)| \le \tau$ для $|\theta| \le \sigma/2$. Учитывая также (1.23), мы из (1.26) и (1.27) получаем, что

$$\left|\overline{\partial} f_*(z)\right| \le k_\sigma M_{f'}(|z| + 2d, \gamma_\sigma) \text{ для } z \in \Delta_\sigma, \tag{1.28}$$

где $d = d_\sigma(z)$ и $k_\sigma > 0$ зависят лишь от σ.

Чтобы определить функцию f_* на $\Delta_\sigma(\pi)$, отметим, что из $z \in \gamma_\alpha$ следует, что $-z \in \gamma_\sigma$. Таким образом, построение функции f_* на Δ_σ по формуле (1.24) для функции $f_- \in A'(\gamma_\sigma)$ вместо f, где $f_-(z) = f(-z)$, мы получаем искомую функцию, просто заменяя $f_*(z)$ на $f_*(-z)$ с $z \in \Delta_\sigma(\pi)$. Тогда неравенства (1.15) и (1.16) следуют соответственно из (1.25) и (1.28). □

Замечание 1.1. *Условие (i) гарантирует, что функция f_* копплексно дифференцируема на γ_α, так что частные производные функции f и f_* будут совпадать на γ_α.*

1.4. **Приближения на Δ_α функциями из класса $A(\Delta_\alpha^1)$.** Следующая лемма одна из основных результатов этой работы.

Лемма 1.3. *Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $F \in A(\Delta_\alpha^1)$ такая, что*

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \tag{1.29}$$

и

$$M_F(r) < 6M_f\,(2r) + c\varepsilon \exp(2 + c\varepsilon^{-1} M_{f'}(2r + 5)), \tag{1.30}$$

где $c = c(\alpha) > 0$.

Доказательство. Доказательство леммы реализуем в 2 шага. Сначала приблизим функцию f на Δ_α функциями h принадлежащими классу $A'(\Lambda)$, где область Λ мы выбераем внизу, потом на втором шаге функция $h \in A'(\Lambda)$ приближается функциями $F \in A(\Delta_\alpha^1)$ на Δ_α. Заменив f на $\varepsilon^{-1} f$ и F на $\varepsilon^{-1} F$, можно свести доказательство леммы к случаю $\varepsilon = 1$.

Шаг 1: Продолжим функцию f на $\mathbb{C}$ взяв в качестве C^1-расширение функции f_*, удовлетворяющее условиям Леммы 1.2.

Пусть $\zeta \to n = n\,(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \gamma_\alpha$ будет кусочно-постоянной функцией; фиксируем $n\,(|\zeta|)$ однозначно по условию

$$0 < n\,(|\zeta|) - \{M_{f'}(|\zeta|\,, \gamma_\alpha) + 1\} \le 1. \tag{1.31}$$

Определим новую функцию $Q(\zeta, z)$ такую, что $Q(\zeta,\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Lambda$:

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^n, \tag{1.32}$$

где

$$dist(\zeta, \gamma_\alpha) = (\ln^+ M_{f'}(|\zeta|, \gamma_\alpha) + 1)^{-1} \text{ для } \zeta \in \partial\Lambda;$$

так область будет определен; и ζ_0 определено так, что $dist(\zeta_0, \gamma_\alpha) = 2dist(\zeta, \gamma_\alpha)$ для $\zeta \in \partial\Lambda$. Очевидно, что $Q(\zeta, \cdot) \in H(\Lambda)$ для фиксированного $\zeta \in \Lambda\backslash\Delta_\alpha \equiv U$.

Определим функции h_r на Λ по формулей

$$h_r(z) = f_*(z) + I_r(z) \text{ для } r > 0 \text{ и } z \in \Lambda_r, \tag{1.33}$$

где

$$I_r(z) = \pi^{-1} \int_{\Lambda_r} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } r > 0 \text{ и } z \in \Lambda_r, \tag{1.34}$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = \left(\overline{\partial} f_*\right)(\zeta)\, Q(\zeta, z)\, C_\zeta(z)$ и $\Lambda_r = \Lambda \cap \overline{D}_r$.

Теперь докажем, что $I_r(z)$ локально равномерно сходится на Λ, при $r \to \infty$, к соответствующему несобственному интегралу

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_U G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.35}$$

Пусть K компактное множество и $K \subset \Lambda$. Тогда существует $r_0 > 1$, так, что $K \subset \overline{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < 2|z - \zeta_0|$ и по (1.31), (1.32) для $z \in \Delta_\alpha$ и $\zeta \in U$ имеем

$$|G_\zeta(z)| \le \frac{n}{2}\left(\frac{2}{\ln n}\right)^n \frac{1}{|z - \zeta_0|^2} < c_1 \frac{1}{|z - \zeta_0|^2}, \tag{1.36}$$

здесь и внизу обозначим через $c_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots$ постоянные зависящие лишь от α, таким образом по (1.36) получим

$$|I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \le c_2 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} \frac{1}{u^2} du < c_2 \left(\frac{1}{r' - r_0} - \frac{1}{r'' - r_0}\right) \to 0,$$

равномерно для $z \in K$, при $r'', r' \to \infty$. Это доказывает аблолютную и локально равномерную сходимость функции $I_\infty(z)$ для $z \in \Lambda$ и, что $I_\infty \in C(\Lambda)$. Затем по (1.33), (1.35) и (1.36) искомую функцию $h \in A(\Lambda)$ можем определит по формуле

$$h(z) = f_*(z) + I_\infty(z) \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.37}$$

По формуле (1.6) *Бореля-Помпейю* мы можем представить функцию h в виде:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_r} \frac{f_*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int\int_{\Lambda\backslash\Lambda_r} (\overline{\partial} f)(\zeta) \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\int_{\Lambda_r}(\overline{\partial}f)(\zeta)\frac{Q(\zeta,z)-1}{\zeta-z}d\sigma_\zeta. \tag{1.38}$$

Здесь все три интеграла голоморфные функции на Λ_r^o и не зависят от r. Таким образом, получаем, что $h \in A(\Lambda)$.

Из определения (1.37) следует

$$|f(z)-h(z)| = |I_\infty(z)| \text{ для } z \in \Delta_\alpha \tag{1.39}$$

и

$$|h(z)| \le |f_*(z)| + |I_\infty(z)| \text{ для } z \in \Lambda, \tag{1.40}$$

так что приближения функции f na Δ_α функцией $h \in A(\Lambda)$ и оценка роста функции h на Λ сводятся в этой схеме к оценке I_∞.

Для оценки роста $|f(z)-h(z)|$ для Δ_α, нам нужно оценить $|I_\infty(z)|$ для $z \in \Delta_\alpha$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы трех интегралов:

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi}\int_{U_1(z)} G_\zeta(z)\,d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{U_2(z)} G_\zeta(z)\,d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{U_3(z)} G_\zeta(z)\,d\sigma_\zeta, \tag{1.41}$$

где $U_1(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in U \text{ и } |\zeta - z| \ge 1\}$, $U_2(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in U \text{ и } 1/\ln n \le |\zeta - z| \le 1\}$ и $U_3(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in U \text{ и } |\zeta - z| \le 1/\ln n\}$. В силу (1.32) и (1.36) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{U_1(z)} |G_\zeta(z)|\,d\sigma_\zeta < \frac{n}{\pi}\left(\frac{2}{\ln n}\right)^n \int_{U_1(z)} \frac{1}{|z-\zeta|^2} < c_{3.} \tag{1.42}$$

По (1.32) и (1.35) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{U_2(z)} |G_\zeta(z)|\,d\sigma_\zeta < \frac{n\ln n}{\pi}\int_{-1}^{1} du \int_0^{1/\ln n}\left(1-\frac{v\ln n}{2}\right)^n dv <$$

$$< \frac{4n}{\pi(n+1)} < c_4 \tag{1.43}$$

Представив $\zeta - z = re^{i\theta}$ для $r \le 1/\ln n$ и $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{U_3(z)} |G_\zeta(z)|\,d\sigma_\zeta < \int_0^{1/\ln n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{n}{\ln n}\left(1-\frac{r\theta}{2}\right)^n d\theta dr < \int_0^{1/\ln n} c_6. \tag{1.44}$$

Таким образом суммируя (1.42)-(1.44) по (1.41) мы получаем, что $|I_\infty(z)| < c_7$ для $z \in \Delta_\alpha$.

Пусть теперь $z \in \Lambda$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ как сумму двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z)\,d\sigma_\zeta + \int_{U\setminus D(z)} G_\zeta(z)\,d\sigma_\zeta = I_4(z) + I_5(z), \tag{1.45}$$

где $D(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \le 3|z|\}$. Первый интеграл уже оценили в (1.42).

Учитывая, что $n2^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_4 \sqrt{mesD\,(z)},$$

по (1.25) и $|\zeta| > |z|$, получаем

$$|I_5\,(z)| < \exp\{2n\,(3l\,|z|)\}. \tag{1.46}$$

Суммируя (1.45) и (1.46), получаем

$$|I_\infty\,(z)| < \exp\{2n\,(3l\,|z|) + c_5\} \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.47}$$

Таким образом, получаем

$$|h\,(z)| < M_f\,(|z|) + \exp\{2n\,(3l\,|z|) + c_5\} \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.48}$$

Шаг 2: Теперь приблизим функцию $h \in A'(\Lambda)$ на Δ_α функциями F из класса $A(\Delta^1_\alpha)$. Это будет реализовано аналогично приближению функции f на Δ_α. Для этого мы во-первых должны оценить рост функции $\overline{\partial} h(\zeta)$ для $\zeta \in \Delta^1_\alpha \backslash \Lambda \equiv W$. Из (1.31) и (1.35) следует, что

$$\left|\overline{\partial} I_\infty(\zeta)\right| \le M_f\,(|\zeta| + 1) + 2M_{f'}\,(|\zeta| + 1)\,, \tag{1.49}$$

затем из определения функции h и представления (1.38) имеем

$$\left|\overline{\partial} h(\zeta)\right| \le M_f\,(|\zeta| + 1) + 3M_{f'}\,(|\zeta| + 1)\,. \tag{1.50}$$

Определим функции F_r на Δ^1_α по формуле

$$F_r\,(z) = h_*\,(z) + J_r\,(z) \text{ для } r > 0 \text{ и } z \in \Delta^1_{\alpha,r}, \tag{1.51}$$

где

$$J_r\,(z) = \pi^{-1} \int_{W_r} P_\zeta\,(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } r > 0 \text{ и } z \in W_r, \tag{1.52}$$

с подынтегральной функцией $P_\zeta\,(z) = \left(\overline{\partial} h_*\right)(\zeta)\, Q_1\,(\zeta, z)\, C_\zeta\,(z)$ и $W_r = W \cap \overline{D}_r$, где

$$Q_1\,(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right)^m,$$

где $dist\,(\zeta', \gamma_\alpha) = 2dist\,(\zeta, \gamma_\alpha)$ для $\zeta \in \partial\Delta^1_\alpha$ и $m = m\,(|\zeta|) = \max\{n, \ln^+ M_f\,(|\zeta|)\}$. Очевидно, что $F_r\,(z) \in A\left(\Delta^1_\alpha\right)$. Как и выше, мы имеем, что функция $J_r\,(z)$ абсолютно и локально равномерно сходится к функции $J_\infty\,(z)$ для $z \in \Delta^1_\alpha$, при $r \to \infty$.

По (1.51), искомую приближающие функции $F \in A\left(\Delta^1_\alpha\right)$ можем определить по формуле

$$h\,(z) := f_*\,(z) + I_\infty\,(z) \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.53}$$

Из определения (1.51) следует, что

$$|f(z)-h(z)|=|I_\infty(z)| \text{ для } z\in\Delta_\alpha \tag{1.54}$$

и

$$|F(z)|\le|f_*(z)|+|I_\infty(z)| \text{ для } z\in\Lambda, \tag{1.55}$$

поэтому, как и выше, мы должны оценить рост $J_\infty(z)$ на Δ_α и на Δ_α^1.

Тогда повторяя шаги доказательства первого шага и учитывая (1.49), (1.50), получаем

$$|h(z)-F(z)|<\varepsilon \text{ для } z\in\Delta_\alpha \tag{1.56}$$

и

$$M_F(r)<3M_f(2r)+c\varepsilon\exp(2+c\varepsilon^{-1}M_{f'}(2r+5)). \tag{1.57}$$

По (1.39) и (1.54) мы получаем оценку (1.29). По (1.47) и (1.57) мы получаем оценку (1.30). □

Следующая лемма доказана в [13].

Лемма 1.4. *Пусть $f\in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha<\beta<\min\{\alpha+\pi/2,\pi+\alpha/2\}$ и $\varepsilon>0$. Тогда существует функция $F\in A(\Delta_\beta)$ такая, что*

$$|f(z)-F(z)|<\varepsilon \text{ для } z\in\Delta_\alpha \tag{1.58}$$

и рост фунции F удовлетворяет этому неравенству на Δ_β

$$M_F(r)<3M_f(lr)+c\varepsilon\exp\left\{1+c\varepsilon^{-1}\lambda(3lr,f)\right\}, \tag{1.59}$$

для $r>0$, где

$$\lambda(r,f)=\max_{|\zeta|\le r}\{(|\zeta|+1)\,|f'_\partial(\zeta)|\}, \tag{1.60}$$

$l=1+\tan((\beta-\alpha)/2)>1$ и $c=c(\alpha,\beta)>0$ постоянная, зависящая только от α и β.

2. Приближение целыми функциями

Процесс оптимального равномерного приближения на угле Δ_α целыми функциями будет реализован в два шага. Сначала приблизим функцию $f\in A'(\Delta_\alpha)$ на Δ_α функциями F, голоморфными в большей области Ω, $F\in A(\Omega)$, с оценкой роста F на Ω - Лемма 1.3 и Лемма 1.4, тогда функция F будет равномерно приближаться на Δ_α целыми функциями. Наша основная задача состоит в том, чтобы сопровождать реализацию двух шагов: каждый шаг возможным оптимальным ростом приближающих функций.

2.1. **Приближение ядра Коши.** Реализация второго шага основано на построении соответствующих приближающих целых функций *ядра Коши* (см. Лемма 1 в [5]).

Пусть $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $d = d_{\alpha}(\zeta)$ *расстояние точки* $\zeta \in \Delta_{\alpha}^{c}$ *от* γ_{α}. Тогда для $b > 0$ *существует функция* $Q_b(\zeta, z)$, *непрерывная по* b и $(\zeta, z) \in \Delta_{\alpha}^{c} \times \mathbb{C}$ и *удовлетворяющая условиям*:

(i) $Q_b(\zeta, z)$ *целая функция по* z *для любого* $\zeta \in \Delta_{\alpha}^{c}$.

(ii) *Для* $\zeta \in \Delta_{\alpha}^{c}$ *и* $z \in \overline{D}_{|\zeta|/2} \cup \Delta_{\alpha}$ *имеем*

$$|Q_a(\zeta, z) - C_{\zeta}(z)| < (44/d)e^{-b}. \tag{2.1}$$

(iii) *Рост функции* Q_b *на* $\Delta_{\alpha}^{c} \times \mathbb{C}$ *ограничивается неравенством*

$$|Q_a(\zeta, z)| < d \exp\left\{\mu(b/d)\,|\zeta|^{1-\rho}\,(|z|+1)^{\rho}\right\}, \tag{2.2}$$

где $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$ *и* $\mu = \mu(\alpha) > 0$ *зависят лишь от* α.

Для случая $\alpha \geq \pi$ понадобится следующая лемма, доказанная в [5]:

Лемма 2.1. *Пусть* $\alpha \in (0, 2\pi)$, *тогда существует функция* $\Omega(\zeta, z)$ *целая по* z *и по* ζ, *удовлетворяющяя неравенствам:*

$$\Omega(\zeta, z) \equiv 1 \ \text{для} \ \zeta = z, \tag{2.3}$$

$$|\Omega(\zeta, z)| \leq c(\alpha)\left(1 + |\zeta - z|^2\right)^{-1} \tag{2.4}$$

если $\zeta \in \Delta_{\alpha}^{1} \backslash \Delta_{\alpha}^{-1}$ *и* $z \in \Delta_{\alpha}^{1}$.

В случае $\alpha \geq \pi$

$$|\Omega(\zeta, z)| \leq c(\alpha)\left(1 + |\zeta - z|^2\right)^{-1} \exp\left\{c(\alpha)(|z|+1)^{\rho}\right\} \tag{2.5}$$

если $\zeta \in \Delta_{\alpha}^{1}$, *и* $|\zeta| \leq 2|z|$.

Эти 2 леммы нам понадобяться ниже.

2.2. **Оптимальное равномерное целое приближение на Δ_{α}.** Следующие теоремы охватывают наиболее простую ситуацию, когда приближаемая функция предварительно голоморфна в большей угловой области, чем угол приближения.

Теорема 2.1. *Пусть* $F \in A(\Delta_\beta)$ *для* $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha < \beta < 2\pi$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует целая функция* G *такая, что*

$$|F(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \tag{2.6}$$

и рост функции G *удовлетворяет неравенству*

$$\log \frac{|G(z)|}{\varepsilon} < c(1 + |z|^\rho) \left\{ 2 + \log^+ \frac{M_F(2r)}{\varepsilon} \right\} \text{ для } z \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

где $c = c(\alpha, \beta) > 0$

Доказательство. Как в Лемме 1.3, можем привести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$. Докажем теорему, используя метод, развитый в [7].

Для функции Q, взятой из Леммы 2.1 с $d = 1$, положим

$$\Phi(\zeta, z) = Q_{b_{|\zeta|}}(\zeta, z) \text{ для } (\zeta, z) \in \partial\Delta_\beta \times \mathbb{C},$$

где

$$b_t = 1 + \log^+ M_F(t) + 2\log(|t| + 1).$$

Для $r > 0$ введем теперь несобственные интегралы

$$I_r(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial\Delta_\beta} R(\zeta, z)\, d\zeta, \text{ для } z \in \mathbb{C} \backslash \partial\Delta_\beta, \tag{2.8}$$

где

$$R(\zeta, z) = F(\zeta) \left[\Phi(\zeta, z) - (\zeta - z)^{-1} \right]. \tag{2.9}$$

Искомую функцию G определим по формуле

$$G(z) = I_0(z) + F(z) \text{ для } z \in \Delta_\beta I_0(z) \text{ и } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\Delta}_\beta. \tag{2.10}$$

Так как в [7] очевидно, что $G \in H(\mathbb{C})$.

Тогда, используя конструкцию доказательства Теоремы 1 работы [7], получаем доказательство этой теоремы. □

Следствие 2.1. *По теореме 2.1 и (2.6), (2.7), функцию* $F \in A(\Delta_\beta)$ *для* $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha < \beta < 2\pi < \infty$ *порядка* $\rho_F < +\infty$ *можно равномерно приблизить на* Δ_α *целыми функциями* G *порядка* $\rho_G \leq \rho_F + \rho$; *если в частности* $\sigma_F < +\infty$, *то либо* $\rho_G < \rho_F + \rho$, *либо* $\rho_G = \rho_F + \rho$ *и* $\sigma_G < k\sigma_F$, *где постоянная* $k > 0$ *зависит лишь от* α.

Теорема 2.2. *Пусть* $F \in A(\Delta^1_\alpha)$ *для* $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует целая функция* G *такая, что*

$$|F(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \tag{2.11}$$

и рост функции G удовлетворяет неравенству

$$\log \frac{|G(z)|}{\varepsilon} < c(1+|z|^{\rho}) \left\{ 2 + \log^{+} \frac{M_F(2r)}{\varepsilon} \right\} \text{ для } z \in \mathbb{C}, \tag{2.12}$$

где $c = c(\alpha) > 0$.

Доказательство. Как и в лемме 1.3, доказательство можно привести к случаю $\varepsilon = 1$. Докажем теорему как и выше, используя метод, развитый в [7].

Для функции Q, взятой из Леммы 2.1 при $d = 1$, положим

$$\Phi(\zeta, z) := Q_{b_{|\zeta|}}(\zeta, z) \text{ для } (\zeta, z) \in \partial\Delta_{\alpha}^{1} \times \mathbb{C}, \tag{2.13}$$

где $b_t = 1 + \log^{+} M_F(t)$. Очевидно, что $\Phi \in C(\partial\Delta_{\alpha}^{1} \times \mathbb{C})$ и целая функция по z для любого фиксированного $\zeta \in \partial\Delta_{\alpha}^{1}$.

Для $r > 0$ введем теперь несобственные интегралы

$$I_r(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial\Delta_{\alpha}^{1}} R(\zeta, z)\, d\zeta, \text{ для } z \in \mathbb{C} \backslash \partial\Delta_{\alpha}^{1}, \tag{2.14}$$

где

$$R(\zeta, z) = F(\zeta) \left[\Phi(\zeta, z) - (\zeta - z)^{-1} \right] \Omega(\zeta, z), \tag{2.15}$$

функция $\Omega(\zeta, z)$ взята из Леммы 2.2.

Искомую функцию G определим по формуле

$$G(z) = I_0(z) + F(z) \text{ для } z \in \Delta_{\alpha}^{1} I_0(z) \text{ и } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\Delta}_{\alpha}^{1}. \tag{2.16}$$

Так как и в [7], очевидно, что $G \in H(\mathbb{C})$.

После чего, используя конструкцию доказательства Теоремы 1 работы [7], получаем доказательство этой теоремы. □

Следствие 2.2. *По Теореме 1.2 и (2.13), (2.14), функцию $F \in A(\Delta_{\alpha}^{1})$ для $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ порядка $\rho_F < +\infty$ можно равномерно приблизить на Δ_{α} целыми функциями G порядка $\rho_G \leq \rho_F + \rho$; если, в частности, $\sigma_F < +\infty$, то либо $\rho_G < \rho_F + \rho$, либо $\rho_G = \rho_F + \rho$ и $\sigma_G < k\sigma_F$, где постоянная $k > 0$ зависит лишь от α.*

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 2.3. *Пусть $f \in A'(\Delta_{\alpha})$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует целая функция g, такая что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \tag{2.17}$$

и рост функции g удовлетворяет этому неравенству для $\alpha \geq \pi$

$$\log \frac{|g(z)|}{\varepsilon} < c(2+|z|^{\rho})\{2+\log^{+} \frac{M_f(r)}{\varepsilon} + \varepsilon^{-1} M_{f'}(r,\gamma_\alpha)\} \text{ для } z \in \mathbb{C}, \tag{2.18}$$

и для $\alpha < \pi$

$$\log \frac{|g(z)|}{\varepsilon} < c(2+|z|^{\rho})\{2+\log^{+} \frac{M_f(r)}{\varepsilon} + \varepsilon^{-1} \mu_f(r,\gamma_\alpha)\} \text{ для } z \in \mathbb{C} \tag{2.19}$$

где

$$\mu_f(r,\gamma_\alpha) = \max_{|z|\leq r,\ z\in\gamma_\alpha} \left|z^{1-\rho} f'(z)\right| \tag{2.20}$$

и $r = 2|z| + 3$ и $c = c(\alpha) > 0$.

Доказательство. Непосредственно следует из Леммы 1.3 и Теоремы 1.1 для случая $\alpha < \pi$ с использованием метода, развитого в Теореме 2 в работе [13]; и из Леммы 1.4 и Теоремы 1.2 для случая $\alpha \geq \pi$. □

Следующая теорема следует из Теоремы 2.4 и дает положительный ответ на проблему, предложенную Кобером в [3].

Теорема 2.4. *Пусть $f \in A_b(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$. Если $f\left(z^{1/\rho}\right)$ равномерно непрерывна на лучах $\pm l_{\alpha\rho/2}$, тогда функция f допускает равномерное приближение на Δ_α целыми функциями порядка ρ и конечного типа.*

Доказательство. Для случая $\alpha = \pi$ теорема уже доказана в [3] Г. Кобером.

Пусть $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности функции $f\left(z^{1/\rho}\right)$ и возьмем

$$\varphi(z) = \frac{\rho}{\delta} \int_z^{(z^\rho+\delta)^{1/\rho}} f(\zeta)\, \zeta^{1-\rho} d\zeta.$$

Очевидно, что $\varphi \in A'(\Delta_\alpha)$ и

$$|\varphi(z) - f(z)| \leq \omega(\delta) \quad \text{и} \quad |\varphi'(z)| \leq \rho \frac{\omega(\delta)}{\delta} |z|^{\rho-1}.$$

Тогда, применяя к φ Теорему 2.1, завершаем доказательство Теоремы 2.4. □

2.3. **Введение классов B_α.** Можно вывести некоторые результаты о целом приближении также для функций $A(\Delta_\alpha)$. Нам понадобятся следующие определения.

1) Для $\alpha > 0$ через B_α обозначим класс целых функций g порядка ρ, таких, что $\|g\|_{\Delta_\alpha} < +\infty$.

2) Для числа $\sigma > 0$ через $B_{\alpha,\sigma}$ обозначим подкласс функций $g \in B_\alpha$, где $g(z) \leq \exp\{\sigma |z|^\rho\}$.

Теорема 2.5. *Функция $f \in A_b(\Delta_\alpha)$ допускает равномерное приближение на Δ_α целыми функциями из класса B_α тогда и только тогда, когда $f\left(z^{1/\rho}\right)$ равномерно непрерывна на лучах $\pm l_{\alpha\rho/2}$.*

Доказательство. Достаточной частью этой теоремы является Теорема 2.2. $\square$

Список литературы

[1] С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", Успехи метематических наук, **VII**, вып. 2(48), 31 – 122 (1952).
[2] Н. У. Аракелян, "О равномерном приближении целыми функцивми на замкнутых множествах", Известия АН СССР, серия Математика, **28**, 1187 – 1206 (1964).
[3] H. Kober, "Approximation by integral functions in the complex plane", Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 7 – 31 (1944).
[4] М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми функциями", Доклады академии наук СССР, **47**, no. 4, 243 – 245 (1945).
[5] Н. У. Аракелян, "Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста", Сибирский математический журнал, **4**, no. 5, 977 – 999 (1963).
[6] Н. У. Аракелян, "О равномерном и касательном приближении на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста", Математический сборник, **113** (115), no. 1(9), 3 – 40 (1980).
[7] N. Arakelian, H. Shahgholian, "Uniform and tangential approximation on a stripe by entire functions, having optimal growth", Computational Methods and Function theory, **3**, no. 1, 359 – 381 (2003).
[8] Н. У. Аракелян, "Построение целых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угле", Известия АН Арм. СССР, серия Математика, **1**, no. 3, 162 – 191 (1966).
[9] F. Nevanlinna and R. Nevanlinna, "Uber die Eigenschaften einer analytischen Functionen in der Umgebung einer singularen Stelle oder Line", Acta Soc. Sci. Fenn., **50**, no. 5 (1922).
[10] L. de Branges, Hilbert spaces of entire functions, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1968).
[11] B. Ya. Levin, "Distribution of zeros of entire functions", GITTL, Moscow, 1956; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1964).
[12] S. H. Aleksanian and N. H. Arakelian, "Optimal uniform approximation on angles by entire functions", Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, **44**, No 3, 149 – 164 (2009).
[13] S. H. Aleksanian, "Uniform and tangential approximation on a sector by meromorphic functions, having optimal growth", Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, **46**, no. 2, 61 – 68 (2011).

Поступила 06 июля 2021

После доработки 18 октября 2022

Принята к публикации 25 октября 2022