Известия НАН Армении, Физика, т.34, №4, с.211-216 (1999)

УДК 538.2

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ БРЭГГА ДЛЯ СРЕД С НЕОБРАТИМОСТЬЮ ВОЛН

О.С. ЕРИЦЯН

Ереванский государственнный университет

(Поступила в редакцию 18 марта 1998 г.)

Рассмотрено дифракционное отражение электромагнитной волны в периодически неоднородной гиротропной среде. Показано, что фазовое условие Брэгга должно содержать две длины волн (а не одну, как обычно), соответствующие прямой (падающей) и обратной (рассеянной) волнам. Известная векторная диаграмма, выражающая уравнение Лауэ [1], перестает быть симметричной относительно плоскости, перпендикулярной вектору обратной решетки и делящей последний пополам. При нормальном к слоям падении период неоднородности перестает быть кратным полудлине волны в отличие от случая отсутствия необратимости волн.

1. Введение

а) Постановка задачи. Теория распространения электромагнитной волны в периодически неоднородных средах развита как для кристаллов в области рентгеновских длин волн [2], так и для холестерических жидких кристаллов [3], периодическая неоднородность которых эффективно проявляется в оптической области длин волн.

Во всех случаях, включая также дифракцию света на периодических неоднородностях, возбуждаемых внешними полями, имеем дело с распространением электромагнитной волны в среде с периодической зависимостью диэлектрической проницаемости или электронной плотности (см. [1]) от координат.

С другой стороны, в отличие от традиционных периодически неоднородных сред, в которых имеет место общеизвестная оптическая обратимость, известны среды, в которых имеет место необратимость волн [4-6]. Дисперсионное уравнение для таких сред не инвариантно относительно изменения знака волнового вектора на обратный. Такими средами являются естественно гиротропные среды в присутствии внешнего магнитного поля и среды со спиральной структурой (в частности, холестерические жидкие кристаллы) – также в присутствии магнитного поля.

В настоящей работе мы рассмотрим дифракционное отражение в средах с необратимостью волн и получим соотношения, выражающие уравнение Лауэ $\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i = \mathbf{b}$ ($\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_s$ – волновые векторы прямой и обратной волн соответственно, $\mathbf{b}$ – вектор обратной решетки). При этом условие Брэгга, представляющее собой результат проектирования уравнения Лауэ на направление $\mathbf{b}$, меняет свою форму.

б) Необратимость волн. Характерным свойством дисперсионного уравнения, описывающего распространение электромагнитной волны в изотропных, анизотропных, естественно гиротропных средах, является его инвариантность относительно изменения знака волнового вектора; это свойство математически выражается в том, что волновой вектор (или показатель преломления) входит в дисперсионное уравнение в четной степени [1]. Физически это означает, что скорость распространения электромагнитной волны одинакова для любых двух взаимно противоположных направлений распространения. Обратимость световых лучей, известная в оптике, обусловлена именно упомянутым свойством сред.

Если же среда одновременно обладает магнитооптической активностью и право-левой асимметрией пространственной структуры (такой структурой обладают, как известно, естественно гиротропные среды, вращающие плоскость поляризации благодаря такой асимметрии, а также холестерические жидкие кристаллы и кристаллы со спиральной магнитной структурой, также вращающие плоскость поляризации), то имеет место неэквивалентность прямого и обратного направлений распространения. Действительно, если при распространении волн в направлении внешнего магнитного поля (приводящего к появлению магнитооптической активности) магнитооптическое и естественное (т.е. обусловленное право-левой асимметрией структуры среды) вращения плоскости поляризации складываются (вычитаются), то при обратном направлении распространения они вычитаются (складываются), так как естественное вращение не меняет своего знака при обратном направлении распространения, а магнитооптическое меняет знак. Такая неэквивалетность прямого и обратного направлений распространения приводит к тому, что среди четырех фазовых скоростей $v_i^+, v_i^-, v_s^+, v_s^-$ (индексами i, s отмечены скорости прямых и обратных волн, значками + и – отмечены правая и левая эллиптические поляризации) нет равных между собой. В соответствии с этим, нет равных между собой среди четырех волновых чисел: k_i^+, k_i^-, k_s^+, k_s^-. А это означает, что дисперсионное уравнение не может быть инвариантным относительно замены $k \to -k$; оно содержит нечетные степени волнового вектора. Отсутствие совпадающих по модулю волновых векторов, один из которых соответствует прямой волне, другой – обратной, означает также отсутствие совпадающих по величине длин волн.

Ниже, в пункте 2, мы рассмотрим ситуацию дифракционного отражения, когда волновые векторы прямой (падающей) и обратной (рассеянной) волн не равны по модулю и не коллинеарны. Конкретный случай коллинеарности рассмотрен в пункте 3 в качестве простого примера: это холестерический жидкий кристалл во внешнем магнитном поле. Для такого случая известно решение дисперсионного уравнения только при распространении волн вдоль оси. Конкретным примером, соответствующим присутствию необратимости волн, для которого известно решение дисперсионного уравнения для произвольного направления распространения, является изотропная, естественно гиротропная среда в присутствии магнитного поля [5].

2. Брэгговское отражение в среде, обладающей необратимостью волн

На рис.1 схематически представлено дифракционное отражение в среде с необратимостью волн, описываемое уравнением Лауэ

$$\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i = \mathbf{b}\,. \qquad (1)$$

В отличие от обычно рассматриваемых сред, для которых имеет место равенство $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_s$, в рассматриваемой среде, в силу необратимости волн, такое соотношение не справедливо. Благодаря однородности среды в плоскостях слоев, тангенциальная к ним компонента волнового вектора не меняется (т. е. остается постоянной тангенциальная компонента импульса фотона):

$$\frac{2\pi}{\lambda_i}\cos\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda_s}\cos\varphi_s\,. \qquad (2)$$

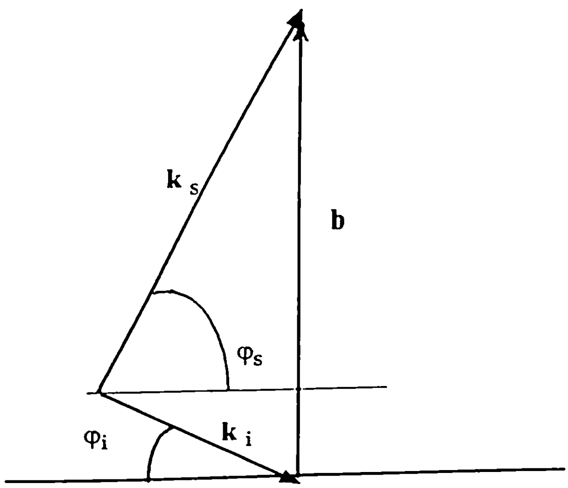

Рис.1.

В отсутствие необратимости волн соотношение (2) выполняется при $\sin\varphi_i = \sin\varphi_s$, что соответствует симметричному расположению $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ относительно $\mathbf{b}$, т.е. соответствует ситуации $\varphi_i = \varphi_s$, которая обычно подразумевается при рассмотрении Брэгговского отражения.

Для нормальных к отражающим слоям компонент волновых векторов имеем следующее соотношение, получаемое при проектировании (1) на $\mathbf{b}$:

$$\frac{2\pi}{\lambda_i}\sin\varphi_i + \frac{2\pi}{\lambda_s}\sin\varphi_s = n\frac{2\pi}{d}\,. \qquad (3)$$

(n – целое положительное число).

Таким образом, в общем случае $\lambda_i \neq \lambda_s$ соотношение (2) не сводится к равенству $\varphi_s = \varphi_i$. Кроме того, соотношение (3) даже при $\sin\varphi_i = \sin\varphi_s$ (что имеет место, например, при распространении волн перпендикулярно к слоям) не сводится к соотношению Брэгга $2d\sin\varphi = n\lambda$.

Если же $\lambda_i = \lambda_s = \lambda$, то из (2) имеем $\varphi_s = \varphi_i$ и тогда с помощью (3) приходим к соотношению Брэгга в обычной форме, содержащему одну длину волны:

$$2d\sin\varphi = n\lambda, \tag{4}$$

где λ – длина волны, одна и та же для прямой и обратной волн.

Влияние необратимости волн на картину дифракционного отражения наиболее просто проявляется при нормальном падении. В такой ситуации получаем:

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} + \frac{2\pi}{\lambda_s} = n\frac{2\pi}{d}. \tag{5}$$

Здесь также фазовое условие Брэгга содержит две длины волн, а не одну.

Отметим также, что из-за несовпадения λ_i и λ_s соотношение (5) не принимает форму $d = n\dfrac{\lambda}{2}$, т.е. период неоднородности среды не оказывается кратным какой-либо полудлине волны, в отличие от случая отсутствия необратимости волн.

3. Обсуждение

Несмотря на то, что в общем случае условие (4) должно быть заменено условием (3), оба они имеют одно и то же физическое содержание: разность фаз между вторичными волнами, возбуждаемыми первичной волной на соседних слоях, должна быть кратна 2π, что является универсальным условием усиления. Последнее может быть обеспечено как при одинаковой длине прямой и обратной волн, так и в случае, когда длины прямой и обратной волн разные. Как запись (3), так и запись (4) следуют непосредственно из уравнения Лауэ (1), в котором не затрагивается вопрос о том, равны ли $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ по модулю или нет; выше рассмотрен именно случай $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{k}_s$.

Неодинаковость модулей $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ может иметь место в естественно гиротропных средах в присутствии магнитного поля (приводящего к возникновению необратимости волн); при этом, конечно, имеется в виду присутствие также периодической неоднородности.

В отличие от таких сред, в холестерических жидких кристаллах (ХЖК) периодическая неоднородность, благодаря своему геликоидальному характеру, одновременно является необходимым фактором необратимости волн в присутствии магнитного поля, направленного вдоль оси среды.

Дисперсионное уравнение при распространении волн вдоль оси ХЖК имет вид ($K = 2\pi/\lambda', \lambda'$ – длина волны в локальной системе)

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - K^2 - a^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - K^2 - a^2\right) - \left(2aK + \frac{\omega^2}{c^2}g\right)^2 = 0, \qquad (6)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости (в локальной системе координат) в направлениях, перпендикулярных к оси среды, g – недиагональная компонента, ответственная за магнитооптическую активность, $a = 2\pi / \sigma$, σ – шаг спирали. Длины волн в лабораторной системе определяются соотношениями $\lambda = 2\pi(K \pm a)^{-1}$.

Так как при замене $K \to -K$ уравнение (6) меняется, то в общем случае не имеет места совпадение длин прямой и обратной волн (ни в локальной системе, ни в лабораторной).

В [7] проведено вычисление λ_i и λ_s на граничных частотах области дифракционного отражения для волны с дифрагирующей поляризацией, подтверждаюшее неодинаковость длин прямой и обратной волн.

На границах ω_1, ω_2 области дифракционного отражения длины прямой и обратной волн равны

$$\lambda_{i,s} = \sigma\left(1 \mp \frac{2g}{3\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) \qquad (7)$$

на границе $\omega_1 = \dfrac{ac}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ и

$$\lambda_{i,s} = \sigma\left(1 \mp \frac{2g}{3\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right) \qquad (8)$$

на границе $\omega_2 = \dfrac{ac}{\sqrt{\varepsilon_2}}$.

Таким образом, мы имеем дело с ситуацией, когда вместо обычного условия Брэгга (4) следует пользоваться его обобщенной формой (3) (в рассмотренном примере ХЖК $\sin\varphi_i = \sin\varphi_s = 1$). Разумеется, возможность замены (с помощью (7), (8)) $2\pi/\lambda_i + 2\pi/\lambda_s$ на $4\pi/\sigma$ (с точностью до членов первого порядка по малым отношениям $g/(3\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,1})$) не имеет никакого отношения к принципиальной стороне вопроса.

Следует отметить, что к (3) должно быть присоединено соотношение (2) и, конечно, дисперсионное уравнение, с помощью которого можно определить зависимость длины волны от направления распространения. Тогда при заданном дисперсионном уравнении вместо одного уравнения (4), содержащего одно значение φ (одинаковое для прямой и обратной волн) и одно значение λ (также одинаковое для прямой и обратной волн), будем иметь два уравнения: (2) и (3).

4. Заключение

Выше мы рассмотрели ситуацию, когда длины прямой и обратной волн неодинаковы, что привело к необходимости обобщить формулу Брэгга. В качестве конкретного примера среды, в которой $\lambda_i \neq \lambda_s$, мы рассмотрели ХЖК в магнитном поле, приводящем к необратимости волн. Однако необратимость волн – жесткое требование для неодинаковости λ_i и λ_s. Несовпадение длин прямой и обратной волн может иметь место также, например, в естественно гиротропной среде с периодической модуляцией диэлектрической проницаемости. Выполнение неравенства $\lambda_i \neq \lambda_s$ в такой среде обеспечивается тем, что волна с фиксированным направлением обхода конца вектора напряженности электрического поля относительно фиксированных осей является правополяризованной (левополяризованной) в случае данного (прямого) направления распространения и левополяризованной (правополяризованной) в случае обратного направления распространения. С этим связано изменение фазовой скорости и, следовательно, длины волны. Неодинаковость длин прямой и обратной волн будет иметь место также в анизотропной негиротропной среде, если слои не перпендикулярны ни одному из главных направлений тензора диэлектрической проницаемости. Таким образом, ситуации $\lambda_i \neq \lambda_s$ могут быть разнообразные, и во всех случаях следует пользоваться уравнениями (2), (3); к ним должно быть присоединено, конечно, дисперсионное уравнение, как сказано выше.

Автор благодарен акад. НАН РА Д.М.Седракяну за обсуждение результатов.

Работа выполнена в рамках темы, финансируемой из централизованных источников РА .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л.Д.Ландау**, **Е.М.Лифшиц**. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
2. **Р.Джеймс**. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. М., ИЛ, 1950.
3. **В.А.Беляков**, **А.С.Сонин**. Оптика холестерических жидких кристаллов. М., Наука, 1982.
4. **О.С.Ерицян**. Изв АН Арм. ССР, Физика, **3**, 217 (1968).
5. **О.С.Ерицян**. УФН, **138**, 645 (1982).
6. **О.С.Ерицян**. Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван, Айастан, 1988.
7. **О.С.Ерицян**. Изв НАН Армении, Физика, **29**, 152 (1994).

ԲՐԵԳԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ ԱՆՇՐՋԵԼԻՈՒԹՅԱՄԲ ՕԺՏՎԱԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Հ. Ս. ԵՐԻՑՅԱՆ

Քննարկված է էլեկտրամագնիսական ալիքի դիֆրակցիան անշրջելիությամբ օժտված գիրոտրոպ պարբերական անհամասեռ միջավայրում: Ցույց է տրված, որ Բրեգի բանաձևը պետք է պարունակի երկու ալիքի երկարություն:

GENERALIZATION OF THE BRAGG FORMULA FOR MEDIA POSSESSING WAVE IRREVERSIBILITY

H. S. ERITSYAN

The Bragg formula is generalized for media possessing wave irreversibility and for other media in which the wavelengths of forward and backward waves are not equal.