Известия НАН Армении, Физика, т.57, №4, с. 492–506 (2022)

УДК 548.732

DOI:10.54503/0002-3035-2022-57.4-492

ПОЛЯ ЗАРЯДОВ И ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

М.К. БАЛЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: mbalyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 10 мая 2022 г.)

Электрические и магнитные поля в некотором выбранном объеме представлены в векторной форме с помощью поверхностных и объемных интегралов. Поверхностные интегралы описывают дифракционные поля, обусловленные полями внешними к объему зарядов, а объемные интегралы описывают поля, создаваемые зарядами, движущимися внутри объема. В гармоническом (монохроматическом) случае для определенной частоты полученные формулы, описывающие дифракцию, совпадают с известными векторными формулами дифракции Кирхгофа. В стандартных случаях дифракции некоторые заряды помещают в полупространство перед экраном и рассматривают дифракцию полей этих зарядов во втором полупространстве за экраном. Полученные в этой работе формулы можно применять не только для таких стандартных случаев дифракции, но и тогда, когда нельзя строго разделить дифракцию и излучение. Например, когда одни заряды входят в объем, а другие выходят из выбранного объема.

1. Введение

Электромагнитное поле зарядов обычно определяют с помощью векторного и скалярного потенциалов [1–4]. С другой стороны, дифракция гармонической электромагнитной волны в свободном от зарядов пространстве обычно формулируется скалярной теорией дифракции для определенной частоты [1,3,4] и называется скалярной теорией дифракции Кирхгофа. Существует зависящая от времени скалярная теория дифракции [3,4]. Для гармонического случая была разработана векторная теория дифракции, называемая векторной теорией дифракции Кирхгофа [1,4], которая может быть применена для частного случая векторной дифракции на отверстии в экране. Обычно используются граничные условия Кирхгофа, что означает, что поле сразу за экраном равно нулю, а поле в апертуре равно падающему полю. Для таких граничных условий не выполняются условия непрерывности тангенциальной и нормальной составляющих электрического и магнитного полей. Коттлер предложил более развитую векторную теорию дифракции для случая дифракции на отверстии в экране. В этой теории, также для гармонического случая, вместо граничных условий Кирхгофа используются более корректные граничные условия, в которых введены эквивалентные поверхностные токи. Эта теория называется векторной теорией дифракции

Кирхгофа-Коттлера [1,5]. В теориях дифракции обычно излучающие заряды помещают в одно полупространство, а дифракцию рассматривают во втором полупространстве, в котором заряды отсутствуют, т.е. явления дифракции и излучения разделены.

Была предложена также векторная теория дифракции для определенной частоты, в которой используются функции, аналогичные вектору Герца [6–8]. Как обычно колеблющиеся заряды помещаются в одно пространство, а дифракция рассматривается в полупространстве, где нет зарядов. В [8] использовалась векторная функция Грина и рассматривался случай гармонического диполя. Диполь помещается в одно полупространство, а дифракция рассматривается в полупространстве, где нет зарядов.

Следует подчеркнуть, что теории дифракции и излучения тесно связаны с функциями Грина. Обычно для гармонического случая дифракции используется скалярная функция Грина [9]. Также использовалась векторная функция Грина для гармонического случая [6]. По-видимому, использование векторной функции Грина в электродинамике в гармоническом случае было начато в работе [6].

Для некоторых электромагнитных задач необходима векторная теория дифракции для негармонического случая (зависящего от времени случая), которая учитывает как поля зарядов в объеме, так и дифракцию на поверхности объема. В общем случае некоторые заряды могут пересекать поверхность объема, в котором исследуются поля. Эти заряды могут входить в объем или выходить из объема. Таким образом, заряды, находящиеся вне объема и давшие вклад в поверхностные интегралы дифракции, после попадания в объем вносят вклад в интегралы по объему и наоборот. Например, можно упоминать излучение заряда, движущегося с постоянной скоростью через отверстие в экране (дифракционное излучение, см. например [10,11]). Движущийся заряд, находясь в полупространстве перед экраном, проходит в полупространство за экраном через отверстие в экране. В этом случае явления дифракции и излучения нельзя строго разделить. В [10,11] предполагается, что скорость заряда близка к скорости света. В результате было применено приближение гармонического случая. Обзоры, касающиеся дифракционного излучения, даны, например, в работах [12,13].

Суммируя вышесказанное, мы заключаем, что целесообразно сформулировать векторную теорию дифракции и излучения. Очевидно, что необходимо ввести и использовать соответствующую векторную функцию Грина.

В этой статье мы формулируем векторную теорию дифракции и полей зарядов, когда заряды движутся по произвольному закону. Вводится и находится зависящая от времени векторная функция Грина в свободном пространстве, что позволяет сформулировать задачу и найти в выбранном объеме как дифракционные поля, так и электрические и магнитные поля заряженных частиц.

2. Зависящая от времени векторная функция Грина свободного пространства

Поведение электромагнитного поля определяется уравнениями Максвелла [1, 2], к которым еще нужно добавить уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Здесь уравнения Максвелла – это первые четыре уравнения, последнее уравнение является уравнением непрерывности, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – электрическое и магнитное поля, c – скорость света, ρ – плотность заряда, $\mathbf{j}$ – плотность тока. Согласно (1) волновые уравнения имеют вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}. \tag{2}$$

Введем соответствующую векторную функцию Грина

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = \mathbf{f}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)\delta(t - t_p). \tag{3}$$

Здесь $(\mathbf{r}, t)$ – текущая координата и время, $(\mathbf{r}_p, t_p)$ – координата точки наблюдения p и время наблюдения, $\mathbf{f}$ – произвольный постоянный вектор (не зависит от $(\mathbf{r}, t)$ и $(\mathbf{r}_p, t_p)$), $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

2.1. Нахождение векторной функции Грина свободного пространства

Найдем зависящую от времени запаздывающую векторную функцию Грина свободного пространства, которая, насколько нам известно, еще не найдена. По определению запаздывающая функция Грина должна быть равна нулю при $t > t_p$. Представляя функцию Грина с помощью интеграла Фурье

$$\mathbf{G} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathbf{g}(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{kr}}d\mathbf{k} \tag{4}$$

и подставляя в (3), имеем

$$k^2\mathbf{g}(\mathbf{k}, t) - \mathbf{k}(\mathbf{kg}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{f}e^{-i\mathbf{kr}_p}\delta(t - t_p)}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{5}$$

Здесь $k = |\mathbf{k}|$. Скалярное произведение (5) с $\mathbf{k}$ приводит к

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{kg}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{kf}}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\delta(t - t_p). \tag{6}$$

Из (6)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\, \mathbf{kg}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{kf}e^{-i\mathbf{kr}_p}}{(2\pi)^{3/2}}\int_t^{+\infty}\delta(t' - t_p)dt' = -\frac{\mathbf{kf}e^{-i\mathbf{kr}_p}\theta(t_p - t)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{7}$$

и из (7)

$$\mathbf{kg} = \frac{c^2\mathbf{kf}e^{-i\mathbf{kr}_p}}{(2\pi)^{3/2}}\int_t^{+\infty}\theta(t_p - t')dt' = \frac{c^2\mathbf{kf}e^{-i\mathbf{kr}_p}(t_p - t)\theta(t_p - t)}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{8}$$

Здесь $\theta(\cdot)$ ступенчатая функция Хевисайда. В (7) и (8) интегрирование производится в пределах $(t,+\infty)$, поскольку мы пытаемся найти запаздывающую функцию Грина. Подставляя (8) в (5) получим уравнение для определения $\mathbf{g}$

$$k^2\mathbf{g}(\mathbf{k},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{g}}{\partial t^2}=\mathbf{f}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}\delta(t-t_p)+\frac{c^2\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}(t_p-t)\theta(t_p-t)\,. \tag{9}$$

Дифференциальное уравнение (9) решим методом вариации постоянных [14], согласно которому пишем однородное уравнение

$$k^2\mathbf{g}(\mathbf{k},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{g}}{\partial t^2}=0\,. \tag{10}$$

Решение (10) ищем в виде $\mathbf{g}=\mathbf{C}e^{\lambda t}$, подставляя которое в (10) находим

$$\lambda_1=ick,\quad \lambda_2=-ick. \tag{11}$$

Общее решение однородного уравнения будет

$$\mathbf{g}(\mathbf{k},t)=\mathbf{C}_1e^{\lambda_1 t}+\mathbf{C}_2e^{\lambda_2 t}\,, \tag{12}$$

где $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ – постоянные коэффициенты. Будем считать, что решение неоднородного уравнения имеет вид (12), но коэффициенты зависят от времени. Подставляя такое решение в (9) и придерживаясь определенной процедуре [14], находим уравнения для определения коэффициентов

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_1'e^{\lambda_1 t}+\mathbf{C}_2'e^{\lambda_2 t}=0,\\&\mathbf{C}_1'\lambda_1e^{\lambda_1 t}+\mathbf{C}_2'\lambda_2e^{\lambda_2 t}=\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}\delta(t-t_p)+\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}(t_p-t)\theta(t_p-t).\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь штрихи у коэффициентов означают дифференцирование по времени. Из (13) находим

$$\mathbf{C}_1'(\lambda_1-\lambda_2)=\left[\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}\delta(t-t_p)+\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}(t_p-t)\theta(t_p-t)\right]e^{-\lambda_1 t}\,. \tag{14}$$

Интегрируя (14) по времени для коэффициента $\mathbf{C}_1$ получим

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1=-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\Bigg[&\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}e^{-\lambda_1 t_p}\theta(t_p-t)\\&+\frac{1}{\lambda_1}\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}e^{-\lambda_1 t_p}\theta(t_p-t)[(t_p-t)e^{-\lambda_1(t-t_p)}+\frac{1}{\lambda_1}(1-e^{-\lambda_1(t-t_p)})]\Bigg].\end{aligned} \tag{15}$$

Заменяя $\lambda_1\Rightarrow\lambda_2$ из (15) найдем

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_2=-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)}\Bigg[&\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}e^{-\lambda_2 t_p}\theta(t_p-t)\\&+\frac{1}{\lambda_2}\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}e^{-\lambda_2 t_p}\theta(t_p-t)[(t_p-t)e^{-\lambda_2(t-t_p)}+\frac{1}{\lambda_2}(1-e^{-\lambda_2(t-t_p)})]\Bigg].\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом

$$\mathbf{g}(\mathbf{k},t)=\mathbf{C}_1e^{\lambda_1 t}+\mathbf{C}_2e^{\lambda_2 t}=\frac{\mathbf{f}c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\theta(t_p-t)\frac{\sin kc(t_p-t)}{kc}$$
$$+\frac{c^2}{k^2}\frac{\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\theta(t_p-t)(t_p-t)-\frac{c^2}{k^2}\frac{\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\frac{\sin kc(t_p-t)}{kc}\theta(t_p-t). \tag{17}$$

Из (17) следует $\mathbf{kg}(\mathbf{k},t)=\frac{c^2\mathbf{kf}}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\theta(t_p-t)(t_p-t)$. Как и следует ожидать, это выражение совпадает с выражением $\mathbf{kg}(\mathbf{k},t)$ из (8), с чего начали. Преобразование Фурье первого члена в (17) известен [15]. Преобразование Фурье двух последних членов можно привести к известному выражению для первого члена, если две последние члены в (17) представить в другом виде. С этой целью возвратимся к вычислению коэффициентов $\mathbf{C}_{1,2}$ (см. 14):

$$\mathbf{C}_1=-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}[\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\int_t^\infty\delta(t'-t_p)e^{-\lambda_1 t'}dt'$$
$$+\int_t^\infty\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}e^{-\lambda_1 t'}(t_p-t')\theta(t_p-t')dt'] \tag{18}$$
$$=-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}e^{-\lambda_1 t_p}\theta(t_p-t)+\int_t^\infty\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}e^{-\lambda_1 t'}(t_p-t')\theta(t_p-t')dt']\right]$$

и

$$\mathbf{C}_2=-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\int_t^\infty\delta(t'-t_p)e^{-\lambda_2 t'}dt'\right.$$
$$\left.+\int_t^\infty\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}e^{-\lambda_2 t'}(t_p-t')\theta(t_p-t')dt'\right] \tag{19}$$
$$=-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\mathbf{f}\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}e^{-\lambda_2 t_p}\theta(t_p-t)+\int_t^\infty\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}e^{-\lambda_2 t'}(t_p-t')\theta(t_p-t')dt'\right].$$

В выражениях (18) и (19) для коэффициентов мы выполнили интегрирование по времени только в первом члене. При таком представлении, в выражении $\mathbf{C}_1e^{\lambda_1 t}+\mathbf{C}_2e^{\lambda_2 t}$ имеем от первых членов

$$\mathbf{g}_1=\frac{\mathbf{f}c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\frac{\sin kc(t_p-t)}{kc}\theta(t_p-t), \tag{20}$$

что совпадает с первым членом в правой части (17). Теперь если вычислить члены, получаемые в $\mathbf{C}_1e^{\lambda_1 t}+\mathbf{C}_2e^{\lambda_2 t}$ от вторых членов в выражении $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$, получим

$$\mathbf{g}_2=\int_t^\infty\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{kf})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{kr}_p}\frac{\sin kc(t'-t)}{kc}(t_p-t')\theta(t_p-t')dt', \tag{21}$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2=\frac{\mathbf{f}c^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}\,\frac{\sin kc(t_p-t)}{kc}\theta(t_p-t)$$
$$+\int_t^{\infty}\frac{c^4\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_p}\,\frac{\sin kc(t'-t)}{kc}(t_p-t')\theta(t_p-t')dt'. \tag{22}$$

Согласно определению (4), соответственно имеем

$$\mathbf{G}=\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2\,, \tag{23}$$

где

$$\mathbf{G}_1=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\,\mathbf{g}_1(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}d\mathbf{k} \tag{24}$$

и

$$\mathbf{G}_2=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\,\mathbf{g}_2(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}d\mathbf{k}\,. \tag{25}$$

Теперь заметим, что в выражении $\mathbf{G}_2$ можно написать

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{f})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}=-\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{f}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}})\,, \tag{26}$$

и, следовательно, Фурье интеграл в выражении $\mathbf{G}_2$ приводится к виду

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\frac{c^4\mathbf{f}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)}\,\frac{\sin kc(t'-t)}{kc}d\mathbf{k}\,. \tag{27}$$

Таким образом, используя известный Фурье интеграл из [15], находим

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{f}}{4\pi R}\delta(t_p-t-R/c),\ \ \mathbf{G}_2=-\frac{c^2}{4\pi}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right), \tag{28}$$

где $R=\left|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}\right|$. Используя (28), окончательно получаем

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},t_p-t)=\mathbf{G}_1(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},t_p-t)+\mathbf{G}_2(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},t_p-t)=\frac{\mathbf{f}}{4\pi R}\delta(t_p-t-R/c)$$
$$-\frac{c^2}{4\pi}graddiv\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right). \tag{29}$$

Отсюда можно найти другое представление функции Грина. Подставляя (29) в (3), находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\mathbf{f}\,\frac{\delta(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t)}{4\pi R}\right)+\frac{\partial^2\mathbf{G}}{c^2\partial t^2}=\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\delta(t-t_p)\,. \tag{30}$$

Интегрируя (30) по времени, имеем

$$\frac{\partial\mathbf{G}}{c^2\partial t}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{f}}{4\pi R}\int_t^{+\infty}\delta(t_p-t'-R/c)dt'\right)-\mathbf{f}\int_t^{+\infty}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\delta(t'-t_p)dt'$$
$$=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{f}}{4\pi R}\theta(t_p-t-R/c)\right)-\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\theta(t_p-t), \tag{31}$$

$$\mathbf{G}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{c^2\mathbf{f}}{4\pi R}\int_t^{+\infty}\theta(t_p-t'-R/c)dt'\right)+c^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\int_t^{+\infty}\theta(t_p-t')dt'$$
$$=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{c^2\mathbf{f}}{4\pi R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right)+c^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)(t_p-t)\theta(t_p-t). \tag{32}$$

Приравнивая (29) и (32) получаем две полезные формулы и из них еще и третью (формула (34))

$$\frac{c^2}{4\pi}\Delta\left(\frac{(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{R}\right)+c^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)(t_p-t)\theta(t_p-t)$$
$$=\frac{1}{4\pi R}\delta(t_p-t-R/c)=\frac{1}{4\pi R}\frac{\partial^2(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{\partial t^2}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{R}\right)-\frac{1}{4\pi c^2 R}\frac{\partial^2(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{\partial t^2} \tag{34}$$
$$=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)(t_p-t)\theta(t_p-t).$$

Здесь Δ есть Лапласиан. Последнее равенство в (33) проверяется прямым дифференцированием по времени функции $(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)$.

2.2. Векторная функция Грина в гармоническом случае

Представим векторную функцию Грина в виде интеграла Фурье по частотам

$$\mathbf{G}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{u}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{35}$$

$$\mathbf{u}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}e^{-i\omega t}d\omega. \tag{36}$$

Подставляя (32) в (36) и производя интегрирование, находим

$$\mathbf{u}_1(\omega)=\frac{c^2}{4\pi\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{R} \tag{37}$$

и

$$\mathbf{u}_2(\omega)=-\frac{c^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)e^{-i\omega t_p}}{\omega^2}. \tag{38}$$

Для получения (37) и (38) использовался интеграл $\int_0^{+\infty} e^{i\omega t_1}dt_1$, который берется в смысле $\int_0^{+\infty} e^{i\omega t_1}dt_1=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t_1}e^{-\alpha t_1}dt_1=i/\omega$ [15]. (37) и (38) приводят к

$$\mathbf{u}(\omega)=\mathbf{u}_1(\omega)+\mathbf{u}_2(\omega)=\frac{c^2}{4\pi\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{R}\right)-\frac{c^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)e^{-i\omega t_p}}{\omega^2}. \tag{39}$$

Используя $\operatorname{rot}\operatorname{rot}=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\Delta$, из (39) можно найти другое представление

$$\mathbf{u}(\omega)=\frac{c^2}{4\pi\omega^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{R}\right)$$
$$-\frac{c^2}{4\pi\omega^2}\Delta\left(\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{R}\right)-\frac{c^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)e^{-i\omega t_p}}{\omega^2}. \tag{40}$$

Принимая во внимание, что [9]

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{4\pi R}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{4\pi R}=-\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)e^{-i\omega t_p}, \tag{41}$$

из (40) находим

$$\mathbf{u}(\omega)=\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{4\pi R}\right)+\frac{\mathbf{f}e^{-i\omega(t_p-R/c)}}{4\pi R}. \tag{42}$$

Подставляя (35) в (3) и обозначая $\mathbf{u}e^{i\omega t_p}=\mathbf{G}_\omega$, находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}_\omega-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{G}_\omega=\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p). \tag{43}$$

В то же время производя преобразования Фурье уравнений (2), имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_\omega-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_\omega=-\frac{4\pi i\omega\mathbf{j}_\omega}{c^2},\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}_\omega-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{B}_\omega=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\omega, \tag{44}$$

для которых $\mathbf{G}_\omega$ является векторной функцией Грина. Беря rot от обеих частей (43), имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}_{m\omega}-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{G}_{m\omega}=\operatorname{rot}(\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)), \tag{45}$$

где $\mathbf{G}_{m\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{G}_\omega$. Из этого определения и представления (42) находим

$$\mathbf{G}_{m\omega}=\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{f}e^{i\omega R/c}}{4\pi R}\right). \tag{46}$$

Функция (46) впервые использована в [6] для получения векторных формул дифракции в гармоническом случае. В настоящей работе получены две другие формы (39) и (42). (39) получена впервые, а форма (42) известна [16].

3. Электрическое и магнитное поля

3.1. Нахождение полей

Умножим (3) на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и вычтем первое и второе уравнения (2), умноженные на $\mathbf{G}$

$$\mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}-\mathbf{G}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{\partial}{c^2\partial t}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t}-\mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=\mathbf{f}\mathbf{E}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\delta(t-t_p)+\frac{4\pi\mathbf{G}}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t},$$
$$\mathbf{B}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}-\mathbf{G}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}+\frac{\partial}{c^2\partial t}\left(\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t}-\mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=\mathbf{f}\mathbf{B}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\delta(t-t_p)-\frac{4\pi\mathbf{G}\,rot\,\mathbf{j}}{c}. \tag{47}$$

Здесь использовано равенство $c^{-2}\partial(f\partial g/\partial t - g\partial f/\partial t)/\partial t = = c^{-2}(f\partial^2 g/\partial t^2 - g\partial^2 f/\partial t^2)$. Возьмем объем V с поверхностью S содержащий точку наблюдения p и интегрируем (47) по $dVdt$. В результате получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{fE}(\mathbf{r}_p,t_p) &= \int_V \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t} - \mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=-\infty}^{t=+\infty} dV + \int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{G}\times\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{G})d\mathbf{S}dt \\
&- \frac{4\pi}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}dVdt, \\
\mathbf{fB}(\mathbf{r}_p,t_p) &= \int_V \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t} - \mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=-\infty}^{t=+\infty} dV + \int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{G}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{G})d\mathbf{S}dt \\
&+ \frac{4\pi}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}\operatorname{rot}\mathbf{j}dVdt.
\end{aligned} \tag{48}$$

Здесь была использована векторная формула Грина [5]

$$\int_V (\mathbf{A}_1\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}_1)dV = \oint_S (\mathbf{A}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{A}_2)d\mathbf{S}\,, \tag{49}$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ элемент поверхности S с внешней нормалью $\mathbf{n}$ к объему V. Интегрирование по t производится в пределах $(-\infty,+\infty)$. Одной из трудностей являются первые слагаемые в правых частях (48). Нам нужно оценить $\partial\mathbf{G}/\partial t$ и $\mathbf{G}$ для $t=\pm\infty$. Согласно (29) $\partial\mathbf{G}/\partial t = -\partial\mathbf{G}/\partial t_p$, откуда вытекает, что достаточно оценить только $\mathbf{G}(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},\pm\infty)$. Так как $\delta(\pm\infty)=0$, из (29) $\mathbf{G}_1(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},\pm\infty)=0$. Согласно (22) и (25)

$$\mathbf{G}_2 = -c^2\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{f}\int_t^{+\infty}(t_p-t')\theta(t_p-t')\delta(t'-t-R/c)dt'/(4\pi R))\,,$$

$$\mathbf{G}_2(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},\pm\infty) = -c^2 graddiv(\mathbf{f}\int_{\pm\infty}^{+\infty}(t_p-t')\theta(t_p-t')\delta(\mp\infty)dt'/(4\pi R)) = 0\,,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_p-\mathbf{r},\pm\infty)=0$$

и значения подынтегральных выражений в первых членах правых частей (48) равны нулю. Из (48)

$$\begin{aligned}
\mathbf{fE}(\mathbf{r}_p,t_p) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{G}\times\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{G})d\mathbf{S}dt - \frac{4\pi}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}dVdt, \\
\mathbf{fB}(\mathbf{r}_p,t_p) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{G}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{G})d\mathbf{S}dt + \frac{4\pi}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}\operatorname{rot}\mathbf{j}dVdt.
\end{aligned} \tag{50}$$

Обратимся к электрическому полю. Второй член первого уравнения в правой части (50) после интегрирования по частям по времени приводит к $4\pi c^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{j}\partial\mathbf{G}/\partial t dVdt$. Используя (28), а также $\partial\mathbf{G}_1/\partial t = -\partial\mathbf{G}_1/\partial t_p$

$$4\pi c^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial t}dVdt = -c^{-2}\mathbf{f}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R}dV. \tag{51}$$

Здесь $[\mathbf{j}] \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}, t_p - R/c)$, т.е. функция берется в момент времени $t_p - R/c$.

Так как $(t_p - t - R/c)\delta(t_p - t - R/c) = 0$, то

$$\partial \mathbf{G}_2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}, t_p - t)/\partial t = c^2(4\pi)^{-1}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}(\mathbf{f}R^{-1}\theta(t_p - t - R/c)).$$

Используя $\mathrm{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\mathrm{grad}\,\varphi$ [14], учитывая последнее уравнение (1) и

$$\rho\,\mathrm{div}(\mathbf{f}R^{-1}\delta(t_p - t - R/c)) = -\rho\,\mathrm{div}_p(\mathbf{f}R^{-1}\delta(t_p - t - R/c)) = -\mathbf{f}\,\mathrm{grad}_p(\rho R^{-1}\delta(t_p - t - R/c)),$$

найдем

$$\frac{4\pi}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial t}dtdV = \int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{j}\,div\left(\frac{\mathbf{f}\theta(t_p - t - R/c)}{R}\right)dtd\mathbf{S} - \mathbf{f}grad_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\rho]}{R}dV. \tag{52}$$

Здесь индекс p означает дифференцирование по координатам точки наблюдения. Мы учли, что для функции от R имеет место $\partial/\partial x_i = -\partial/\partial x_{pi}$ $(i = 1,2,3)$, где $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ и $x_{p1} = x_p, x_{p2} = y_p, x_{p3} = z_p$.

Рассмотрим для электрического поля первый член в правой части (50). Имеем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_S (\mathbf{E}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{G})d\mathbf{S}dt &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\,\mathrm{rot}_p\,\mathbf{G}_1 dSdt \\ &= \frac{\mathbf{f}}{4\pi}\mathrm{rot}_p\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\frac{\delta(t_p - t - R/c)}{R}dSdt = \frac{\mathbf{f}}{4\pi}\mathrm{rot}_p\oint_S \frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{E})]}{R}dS,\end{aligned} \tag{53}$$

где $[(\mathbf{n}\times\mathbf{E})] \equiv \mathbf{n}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_p - R/c)$. Мы имеем также

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{G}_1\times\mathrm{rot}\,\mathbf{E})d\mathbf{S}dt &= \frac{\mathbf{f}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\times\mathbf{n})\frac{\delta(t_p - t - R/c)}{R}dSdt = \\ &= \frac{\mathbf{f}}{4\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \left(\mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\frac{\delta(t_p - t - R/c)}{R}dSdt = \frac{\mathbf{f}}{4\pi c}\oint_S \left[(\mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})\right]\frac{1}{R}dS.\end{aligned} \tag{54}$$

Здесь было использовано первое уравнение (1). Этот результат также можно написать в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{f}}{4\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \left(\mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\frac{\delta(t_p - t - R/c)}{R}dSdt - \frac{\mathbf{f}}{4\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{B})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta(t_p - t - R/c)}{R}d\mathrm{S}dt \\ &= \frac{\mathbf{f}}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S \frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}d\mathrm{S}.\end{aligned} \tag{55}$$

Используя $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi$ оставшийся член для электрического поля в (50)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S (\mathbf{G}_2\times\mathrm{rot}\,\mathbf{E})d\mathbf{S}dt &= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p - t - R/c)\theta(t_p - t - R/c)\right)\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}d\mathbf{S}dt \\ &-\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p - t - R/c)\theta(t_p - t - R/c)\right)\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}d\mathbf{S}dt.\end{aligned} \tag{56}$$

Здесь мы использовали первое уравнение (2) и

$$\oint_S \mathrm{rot}\left(\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right)\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)d\mathbf{S}=0 .$$

Интегрирование по частям по времени первого слагаемого в (56) приводит к выражению

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}d\mathbf{S}dt\\&=\frac{\mathbf{f}}{4\pi}\mathrm{grad}_p\int\frac{\delta(t_p-t-R/c))}{R}\mathbf{En}d\mathrm{S}dt=\frac{\mathbf{f}}{4\pi}\mathrm{grad}_p\int\frac{[\mathbf{En}]}{R}d\mathrm{S},\end{aligned}\qquad(57)$$

где $[\mathbf{En}]$ есть скалярное произведение $\mathbf{En}$ в момент времени t_p-R/c. Интегрируя по времени t по частям во втором члене (56), находим

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S div\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right)\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}d\mathbf{S}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{j}\,div\left(\frac{\mathbf{f}}{R}\theta(t_p-t-R/c)\right)d\mathbf{S}dt.\qquad(58)$$

При интегрировании по частям как в первом, так и во втором члене, мы полагаем равным нулю полученные члены на бесконечностях, так как они имеют аналогичную структуру, как и члены, получаемые при интегрировании по частям с функцией Грина (см. текст между формулами (49) и (50)). Комбинируя вместе формулы (51)–(54) и (57), (58), для электрического поля находим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_p,t_p)=&\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]\frac{1}{R}d\mathrm{S}+\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_p\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS+\frac{1}{4\pi}\nabla_p\oint_S\frac{[\mathbf{En}]}{R}d\mathrm{S}\\&-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\frac{[\mathbf{j}]}{R}dV-\mathrm{grad}_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\rho]}{R}dV.\end{aligned}\qquad(59)$$

Первые три члена в (59) описывают дифракцию на поверхности S негармонического во времени поля в векторной форме (это поле возникает за счет поля зарядов, находящихся за пределами рассматриваемого объема); последние два члена описывают поле зарядов, движущихся внутри объема V. Это следует из того, что последние два члена исчезают при отсутствии зарядов и токов и, следовательно, представляют решения неоднородных уравнений (2), между тем первые три члена не зависят от токов и зарядов и поэтому представляют решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (2). Поле зарядов, движущихся в объеме, хорошо известно в электродинамике [1, 2], и полученные формулы поля зарядов совпадают с известными формулами. Но дифракционные члены в векторной форме и для негармонического во времени случае получены впервые. Таким образом, формула (59) описывает как дифракцию, так и поле зарядов. Если объем V – это весь объем с зарядами, то дифракционные члены равны нулю и остаются только объемные интегралы. Нетрудно видеть в объемных интегралах хорошо известные вектор $\mathbf{A}=(1/c)\int[\mathbf{j}]/RdV$ и скалярный потенциалы $\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}[\rho]/RdV$ [1, 2]. По формуле (59) последние два члена определяют поле зарядов, находящихся внутри объема и эта часть поля определяется по хорошо известной формуле через векторный и скалярный потенциал как

$-(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t_p - \mathrm{grad}_p\,\varphi$ [1,2].

Обратимся к нахождению магнитного поля по второй формуле (50). Используя $\mathrm{div}(\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2)=\mathbf{A}_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_1\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_2$, получим

$$\frac{4\pi}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}_1 rot\mathbf{j}dVdt=\frac{4\pi}{c}\left(\oint_S\frac{[(\mathbf{j}\times\mathbf{f})]}{4\pi R}d\mathbf{S}-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{j}rot_p\left(\mathbf{f}\frac{\delta(t_p-t-R/c)}{4\pi R}\right)dVdt\right). \quad (60)$$

В первом интеграле мы воспользовались теоремой Гаусса [14]. Нетрудно показать, что

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{j}\,\mathrm{rot}_p(\mathbf{f}\delta(t_p-t-R/c)/(4\pi R))dVdt=\mathbf{f}\,\mathrm{rot}_p\int_V[\mathbf{j}]/(4\pi R)dV$$

и из (60) имеем

$$\frac{4\pi}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}_1\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}dVdt=\frac{\mathbf{f}}{c}\left(\oint\frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{j})]}{R}dS+\mathrm{rot}_p\int_V\frac{[\mathbf{j}]}{R}dV\right). \quad (61)$$

Снова используя формулу для $\mathrm{div}(\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2)$, находим

$$\frac{4\pi}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \mathbf{G}_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}dVdt=-4\pi c\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\mathbf{f}\frac{(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{4\pi R}\right)\mathrm{rot}\,\mathbf{j}d\mathbf{S}dt\,. \quad (62)$$

Здесь мы использовали формулы $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{A})=\varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla\varphi$ и $\oint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{Q}\cdot d\mathbf{S}=0$. Мы также имеем

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{G}d\mathbf{S}dt=-\frac{\mathbf{f}}{4\pi}\mathrm{rot}_p\oint_S\frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}dS\,. \quad (63)$$

Следующий член в выражении магнитного поля можно написать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{G}_1\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}d\mathbf{S}dt=\frac{\mathbf{f}}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S\frac{1}{R}\big[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})\big]dS+\frac{\mathbf{f}}{c}\oint_S\frac{[(\mathbf{j}\times\mathbf{n})]}{R}dS\,. \quad (64)$$

Используя $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{A})=\varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi$ для оставшегося члена получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{G}_2\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}d\mathbf{S}dt=\frac{c^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\mathbf{f}\frac{(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{R}\right)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}d\mathbf{S}dt. \quad (65)$$

Из второго уравнения (2) подставляя $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ в (65), имеем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{G}_2\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}d\mathbf{S}dt&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\mathbf{f}\frac{(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{R}\right)\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}d\mathbf{S}dt\\&+c\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\mathbf{f}\frac{(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)}{R}\right)\mathrm{rot}\,\mathbf{j}\,d\mathbf{S}dt.\end{aligned} \quad (66)$$

В первом слагаемом в правой части (66) интегрирование по времени можно проводить по частям

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{div}\left(\mathbf{f}\frac{1}{R}(t_p-t-R/c)\theta(t_p-t-R/c)\right)\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}d\mathbf{S}dt=\frac{\mathbf{f}}{4\pi}\nabla_p\oint_S\frac{[\mathbf{Bn}]}{R}dS\,. \quad (67)$$

Здесь $[\mathbf{Bn}]$ есть скалярное произведение $\mathbf{Bn}$ в момент времени $t_p - R/c$. При интегрировании по частям в временных бесконечностях, как и при интегрировании по частям с функцией Грина (см. текст между формулами (49) и (50)), мы подставили соответствующие члены равным нулю (так как мы имеем совпадающие по форме члены и здесь, и там). Наконец, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathbf{G}_2 \times \operatorname{rot}\mathbf{B}d\mathbf{S}dt = \frac{\mathbf{f}}{4\pi}\nabla_p \oint_S \frac{[\mathbf{Bn}]}{R}dS$$
$$+c\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \operatorname{div}\left(\mathbf{f}\frac{(t_p - t - R/c)\theta(t_p - t - R/c)}{R}\right)\operatorname{rot}\mathbf{j}d\mathbf{S}dt. \tag{68}$$

Теперь, объединяя (61)–(64) и (68), для магнитного поля находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_p \int_S \frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}dS + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_S \frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS$$
$$+\frac{1}{4\pi}\nabla_p \int_S \frac{[\mathbf{Bn}]}{R}dS + \frac{1}{c}\operatorname{rot}_p \int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R}dV. \tag{69}$$

Первые три слагаемых в правой части (69) описывают дифракцию немонохроматического поля на поверхности S. Последний член описывает магнитное поле зарядов внутри выбранного объема и его также можно написать как $\operatorname{rot}_p \mathbf{A}$, которое хорошо известно в электродинамике [1,2], но дифракционные члены в векторной форме и для негармонического случая получены впервые. Если объем V – это весь объем с зарядами, то дифракционные члены равны нулю и остается только объемный интеграл. Таким образом, формулы (59) и (69) позволяют найти электромагнитное поле внутри выбранного объема V

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S \frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}d\mathrm{S} + \frac{1}{4\pi}rot_p\oint_S \frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS + \frac{1}{4\pi}\nabla_p \oint_S \frac{[\mathbf{En}]}{R}d\mathrm{S}$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_p}\int \frac{[\mathbf{j}]}{R}dV - grad_p \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\rho]}{R}dV,$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) = -\frac{1}{4\pi}rot_p \int_S \frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}dS + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_S \frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS + \frac{1}{4\pi}\nabla_p \int_S \frac{[\mathbf{Bn}]}{R}dS$$
$$+\frac{1}{c}rot_p \int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R}dV. \tag{70}$$

3.2. Случай гармонически изменяющихся во времени полей

Рассмотрим гармонический случай $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ и так далее. Введем волновое число $K = \omega/c$ и скалярную функцию Грина [9]

$$G_s = \frac{e^{iKR}}{4\pi R}, \tag{71}$$

$$\Delta G_s + K^2 G_s = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p). \tag{72}$$

Подставляя осциллирующие функции в (70), находим

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_p) = -iK\int_S G_s \mathbf{n}\times\mathbf{B}_0 dS - \mathrm{rot}_p \int_S G_s \mathbf{n}\times\mathbf{E}_0 dS + \nabla_p \int_S G_s \mathbf{n}\mathbf{E}_0 d\mathrm{S} + \frac{4\pi i K}{c}\int G_s \mathbf{j}_0 dV$$

$$-4\pi g\,\mathrm{rad}_p \int_{-\infty}^{+\infty} G_s \rho_0 dV, \tag{73}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}_p) = iK\int_S G_s \mathbf{n}\times\mathbf{E}_0 dS - \mathrm{rot}_p \int_S G_s \mathbf{n}\times\mathbf{B}_0 dS + \nabla_p \int_S G_s \mathbf{B}_0 \mathbf{n} dS + \frac{1}{c}\mathrm{rot}_p \int_V G_s \mathbf{j}_0 dV.$$

Поверхностные интегралы совпадают с векторными формулами дифракции Кирхгофа для гармонически зависящих от времени полей [4].

4. Заключение

Впервые представлена зависящая от времени векторная теория дифракции и полей заряженных частиц в электродинамике. Выражения для электрического и магнитного полей получены используя зависящую от времени запаздывающую векторную функцию Грина, которая впервые получена в данной работе. Электрическое и магнитное поля в некотором объеме, содержащей заряды, представляются с помощью объемных и поверхностных интегралов в векторной форме. Поверхностные интегралы представляют собой дифракцию на поверхности выбранного объема, обусловленная полями зарядов, движущихся вне объема. Объемные интегралы представляют собой поля зарядов, движущихся внутри выбранного объема. Таким образом в векторной форме получены выражения, объединяющие дифракционные поля и поля зарядов в зависящем от времени случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. **J.D. Jackson.** Classical Electrodynamics, 3rd ed., New York: Wiley, 1998.
2. **L.D. Landau, E.M. Lifshits**. Course of theoretical physics, v. 2. The classical theory of fields, 4th ed., London: Athenaum Press LTD, 1996.
3. **M. Born, E. Wolf.** Principles of optics, Oxford: Pergamon Press LTD, 1980.
4. **Uj.A. Stratton.** Electromagnetic theory, New York: McGraw-Hill book company Inc., 1941.
5. **F. Kottler.** Ann. Phys. (Leipzig), **71**, 457 (1923).
6. **W. Franz.** Z. Naturforschg, **3a**, 500 (1948).
7. **A. Sommerfeld.** Optics, New York: Academic Press, 1954.
8. **A.V. Nesterov, V.G. Niziev.** Phys. Rev. E, **71**, 046608 (2005).
9. **S. Solimeno, B. Crosignani, P. DiPorto.** Guiding, Diffraction and Confinement of Optical Radiation, New York: Academic Press, 1986.
10. **M.L. Ter Mikaelyan, B.V. Khachatryan.** Rep. Natl. Acad. Sci. Armen. Phys., **XL**, 13 (1965). [in Russian].
11. **B.V. Khachatryan.** Proc. Natl. Acad. Sci. Armen. Phys., **XL**, 133 (1965). [in Russian].
12. **B.M. Bolotovskii, G.V. Voskresenskii.** Sov. Phys. Usp., **9,** 73 (1966).

13. **B.M. Bolotovskii, E.A. Galst'yan.** Phys. Usp., **43**, 755 (2000).
14. **G.A. Korn, T.M. Korn.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, New York: McGraw Hill, 1968.
15. **A.A. Sokolov, I.M. Ternov.** Radiation from relativistic electrons, New York: American Institute of Physics, 1986.
16. **H. Levin, J. Schwinger.** Commun. Pure Appl. Math., **3**, 355 (1950).

ԼԻՑՔՆԵՐԻ ԴԱՇՏԵՐԸ ԵՎ ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ

Մ.Կ. ԲԱԼՅԱՆ

Էլեկտրական և մագնիսական դաշտերը ծավալում ներկայացված են վեկտորական տեսքով՝ օգտագործելով մակերևույթային և ծավալային ինտեգրալներ: Մակերևույթային ինտեգրալները նկարագրում են դաշտի դիֆրակցիան, որը ստեղծվել է ծավալից դուրս գտնվող լիցքերով, իսկ ծավալային ինտեգրալները նկարագրում են ծավալի ներսում շարժվող լիցքերի կողմից ստեղծված դաշտերը: Հարմոնիկ (մոնոքրոմատիկ) դեպքում, որոշակի հաճախականության համար, դիֆրակցիան նկարագրող ստացված բանաձևերը համընկնում են դիֆրակցիայի հայտնի Կիրխհոֆի վեկտորական բանաձևերի հետ: Դիֆրակցիայի ստանդարտ դեպքերում որոշ լիցքեր տեղադրվում են էկրանի դիմացի կիսատարածության մեջ և դիտարկվում է այդ լիցքերի դաշտերի դիֆրակցիան էկրանի ետևում գտնվող երկրորդ կիսատարածությունում: Այս աշխատանքում ստացված բանաձևերը կարող են օգտագործվել ոչ միայն դիֆրակցիայի ստանդարտ դեպքերի համար, այլև այն դեպքում, երբ անհնար է խստորեն առանձնացնել դիֆրակցիան և ճառագայթումը: Օրինակ, երբ որոշ լիցքեր մտնում են ծավալը, իսկ մյուսները թողնում են ընտրված ծավալը:

FIELDS OF CHARGES AND DIFFRACTION FIELDS IN ELECTRODYNAMICS

M.K. BALYAN

Electric and magnetic fields in a volume are presented in vector form using surface and volume integrals. Surface integrals describe the diffraction of the field created by charges external to the volume, and volume integrals describe the fields created by charges moving inside the volume. In the harmonic (monochromatic) case, for a certain frequency, the obtained formulas, describing the diffraction, coincide with the well-known Kirchhoff vector formulas for diffraction. In standard cases of diffraction some charges are placed in the half-space in front of a screen and the diffraction of the fields of these charges in the second half-space behind the screen is considered. The obtained in this work formulas can be used not only for standard cases of diffraction, but also when it is impossible to strictly separate diffraction and radiation. For example, when some charges enter the volume, while others leave the selected volume.