ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 122 2022 № 4
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.4-265

Е. Г. Канецян[1,2], М. С. Мкртчян[1,2],
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян[1,2]

Об осесимметричном кручении упругого слоя посредством двух абсолютно жестких круговых цилиндрических штампов

(Представлено 6/X 2022)

Ключевые слова: *упругий слой, осесимметричное кручение, штамп, контактная задача, интегральное уравнение.*

Введение. Теория кручения упругих тел Сен-Венана вместе с осесимметричной теорией кручения является одной из обширных областей классической теории упругости. Основы этой теории, математические методы исследования задач о кручении упругих тел, различные физические модели и результаты решения таких многочисленных задач приведены в [1-4]. Среди этих задач в теоретическом и практическом аспектах значительный научный интерес представляют контактные задачи о кручении упругих тел. Они встречаются при расчетах прочностных характеристик разнообразных машиностроительных, в частности, авиационных, строительных конструкций и их деталей, в других областях прикладной механики и инженерной практики. Основные достижения теории контактных задач кручения упругих тел, полученные до 1976 г., подытожены в [5].

В [6] с использованием метода сплющенных сфероидальных координат получено решение контактной задачи об осесимметричном кручении упругого полупространства посредством сцепленного с ним кругового жесткого цилиндрического штампа. Решение этой задачи, известной как задача Рейснера-Сагоци, более эффективно построено в [7] методом дуальных интегральных уравнений. Тем же методом в [8, 9] решена контактная задача о кручении упругого слоя жестким круговым штампом, где решение в конечном итоге сведено к решению интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма второго рода, решаемого приближенно. В [9] рассмотрена еще одна задача о кручении слоя при смешанных граничных условиях. Укажем также на работы [10-12].

В настоящей статье рассмотрена осесимметричная контактная задача, когда упругий слой скручивается посредством двух абсолютно жестких круговых цилиндрических штампов разных радиусов, действующих на гранях слоя. При помощи интегрального преобразования Ханкеля решение этой задачи сведено к решению системы двух ИУ Фредгольма первого рода. Выделены главные части ядер этих уравнений. В результате они представлены суммами ядер в виде интеграла Вебера-Сонина и регулярных ядер. Далее методом коллокации в сочетании с использованием квадратурных формул типа Гаусса для вычисления интегралов исходная система ИУ сведена к конечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Контактные касательные напряжения и углы поворота штампов выражаются через решение СЛАУ.

1. Постановка задачи и выводы основных уравнений. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат *Oxyz* упругий слой $\Omega=\{-\infty<x,y<\infty;\ -H\le z\le H\}$ высоты $2H$ и модуля сдвига G осесимметрично скручивается двумя жесткими круговыми цилиндрическими штампами, подверженными воздействию крутящего момента величины M. При этом штамп радиуса a сцеплен с верхней гранью слоя Ω и в цилиндрической системе координат r,φ,z с полюсом в начале координат O со слоем контактирует по области $\Omega_+=\{0\le r\le a;\ -\pi<\varphi\le\pi;\ z=H\}$, а штамп радиуса b сцеплен с нижней гранью слоя Ω и с ним контактирует по области $\Omega_-=\{0\le r\le b;\ -\pi<\varphi\le\pi;\ z=-H\}$. Требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_\pm(r)$ в контактных областях $\Omega_\pm$, а также углы поворота $\omega_\pm$ штампов соответственно.

Приступим к выводу основных уравнений поставленной задачи. При осевой симметрии

$$u_r=u_r(r,z)=0;\ u_z=u_z(r,z)=0;\ u_\varphi=u_\varphi(r,z)\quad (r,z\in\Omega),$$

где u_r, u_z, u_φ – радиальные, вертикальные и окружные компоненты упругих перемещений точек слоя Ω. Отсюда вытекает, что ([13], с. 232-233, ф-лы (22.4), (22.7)) компоненты деформации имеют вид

$$e=e_r=e_\varphi=e_z=e_{rz}=0;\ e_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r};\ e_{z\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial z};$$

$$2\omega_r=-\frac{\partial u_\varphi}{\partial z};\ 2\omega_\varphi=0;\ 2\omega_z=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r},$$

а закон Гука – вид

$$\tau_{r\varphi}=Ge_{r\varphi}=G\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right);\ \tau_{rz}=0;\ \tau_{z\varphi}=Ge_{z\varphi}=G\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}.\qquad(1.1)$$

где $\tau_{r\varphi}, \tau_{rz}$ и $\tau_{z\varphi}$ – компоненты касательных напряжений. В данном случае дифференциальное уравнение равновесия сводится к одному-единственному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r}\tau_{r\varphi} = 0. \tag{1.2}$$

Подставляя (1.1) в (1.2), придем к следующему дифференциальному уравнению для $u_\varphi(r,z)$:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0 \quad \left((r,\varphi,z) \in \Omega\right).$$

В дальнейшем нам понадобятся решения следующих вспомогательных граничных задач для полуслоев:

$$D_\pm = \left\{0 \le r < \infty; -\pi < \varphi \le \pi; \begin{array}{c} 0 \le z \le H \\ -H \le z \le 0 \end{array}\right\}:$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varphi^\pm}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi^\pm}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u_\varphi^\pm}{\partial z^2} - \dfrac{u_\varphi^\pm}{r^2} = 0 & \left((r,z) \in D_\pm\right) \\ \tau_{r\varphi}^\pm\Big|_{z=\pm 0} = G\dfrac{\partial u_\varphi^\pm}{\partial z}\Bigg|_{z=\pm 0} = \tau(r);\ \tau_{r\varphi}^\pm\Big|_{z=\pm H\mp 0} = G\dfrac{\partial u_\varphi^\pm}{\partial z}\Bigg|_{z=\pm H \mp 0} = T_\pm(r)\ (0 < r < \infty) \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $u_\varphi^\pm(r,z)$ – окружные упругие перемещения точек полуслоев $D_\pm$, $\tau_{r\varphi}^\pm$ – касательные напряжения в полуслоях $D_\pm$, а $\tau(r)$ и $T_\pm(r)$ – известные пока предварительно заданные функции. Решения граничных задач построим методом интегрального преобразования Ханкеля. С этой целью введем трансформанты Ханкеля:

$$\left\{\overline{u}_\varphi^\pm(\lambda,z), \overline{T}_\pm(\lambda), \overline{\tau}(\lambda)\right\} = \int_0^\infty \left\{u_\varphi^\pm(\lambda,z), T_\pm(r), \tau(r)\right\} J_1(\lambda r) r dr,$$

где $J_1(r)$ – функция Бесселя первого рода индекса 1, а λ – спектральный параметр Ханкеля.

В трансформантах Ханкеля двумерные граничные задачи (1.3) преобразуются в следующие одномерные граничные задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{u}_\varphi^\pm}{dz^2} - \lambda^2 \overline{u}_\varphi^\pm = 0 \quad \{0 < z < H; -H < z < 0\} \\ G\dfrac{d\overline{u}_\varphi^\pm}{dz}\Bigg|_{z=\pm 0} = \overline{\tau}(\lambda);\quad G\dfrac{d\overline{u}_\varphi^\pm}{dz}\Bigg|_{z=\pm H\mp 0} = \overline{T}_\pm(\lambda).\ (0 < \lambda < \infty). \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь была использована известная формула для трансформанта Ханкеля ([7], с. 79, ф-ла (2.32)).

Общие решения дифференциальных уравнений из (1.4) представляются формулами

$$\bar{u}_{\varphi}^{\pm}(\lambda,z)=A_{\pm}\operatorname{ch}(\lambda z)+B_{\pm}\operatorname{sh}(\lambda z)\quad(0\le z\le H;-H\le z\le 0),$$

где $A_{\pm}$ и $B_{\pm}$ – пока неизвестные постоянные. Эти постоянные определяются из граничных условий задачи (1.4). После простых вычислений имеем

$$\bar{u}_{\varphi}^{+}(\lambda,z)=\frac{\bar{T}_{+}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda z)-\bar{\tau}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda(z-H))}{G\lambda\operatorname{sh}(\lambda H)}\quad(0\le z\le H);\tag{1.5}$$

$$\bar{u}_{\varphi}^{-}(\lambda,z)=\frac{\bar{\tau}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda(z+H))-\bar{T}_{-}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda z)}{G\lambda\operatorname{sh}(\lambda H)}\quad(-H\le z\le 0).\tag{1.6}$$

Далее исходя из (1.5) и (1.6) удовлетворим условию непрерывности упругих перемещений в плоскости $z=0:\bar{u}_{\varphi}^{+}(\lambda,+0)=\bar{u}_{\varphi}^{-}(\lambda,-0)$ $(0<\lambda<\infty)$. В результате получим

$$\bar{\tau}(\lambda)=\frac{\bar{T}_{+}(\lambda)+\bar{T}_{-}(\lambda)}{2\operatorname{ch}(\lambda H)}.\tag{1.7}$$

Выражение $\tau(\lambda)$ из (1.7) подставим в (1.5) и (1.6). После простых преобразований имеем

$$\bar{u}_{\varphi}^{+}(\lambda,z)=\frac{1}{G\lambda\operatorname{sh}(2\lambda H)}\left\{\left[2\operatorname{ch}(\lambda z)\operatorname{ch}(\lambda H)-1\right]\bar{T}_{+}(\lambda)-\bar{T}_{-}(\lambda)\right\}\quad(0\le z\le H),$$

$$\bar{u}_{\varphi}^{-}(\lambda,z)=\frac{1}{G\lambda\operatorname{sh}(2\lambda H)}\left\{\bar{T}_{+}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda(z+H))+\bar{T}_{-}(\lambda)\left[\operatorname{ch}(\lambda(z+H))-2\operatorname{ch}(\lambda z)\operatorname{ch}(\lambda H)\right]\right\}$$
$$(-H\le z\le 0).$$

Из этих формул легко находим

$$\bar{u}_{\varphi}^{+}(\lambda,H)=\frac{1}{\lambda G}\left[\operatorname{cth}(2\lambda H)\bar{T}_{+}(\lambda)-\frac{\bar{T}_{-}(\lambda)}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}\right];\tag{1.8}$$

$$\bar{u}_{\varphi}^{-}(\lambda,-H)=\frac{1}{\lambda G}\left[\frac{\bar{T}_{+}(\lambda)}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}-\operatorname{cth}(2\lambda H)\bar{T}_{-}(\lambda)\right].\tag{1.9}$$

Далее, полагая

$$T_{+}(r)=\begin{cases}\tau_{+}(r) & (0<r<a);\\ 0 & (r>a);\end{cases}\qquad T_{-}(r)=\begin{cases}\tau_{-}(r) & (0<r<b);\\ 0 & (r>b),\end{cases}$$

где $\tau_{\pm}(r)$ – искомые касательные контактные напряжения, к (1.8) и (1.9) применим формулу обратного преобразования Ханкеля. Тогда из (1.8)

$$u_\varphi^+(r,H)=\frac{1}{G}\int_0^\infty\left[\operatorname{ch}(2\lambda H)\overline{T}_+(\lambda)-\frac{\overline{T}_+(\lambda)}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}\right]J_1(\lambda r)\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{G}\int_0^a\tau_+(\rho)\rho d\rho\int_0^\infty\operatorname{cth}(2\lambda H)J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda-$$
$$-\frac{1}{G}\int_0^a\tau_-(\rho)\rho d\rho\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\frac{d\lambda}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}.$$

В первом слагаемом этой суммы выделим главную часть ядра:

$$K_1(r,\rho)=\int_0^\infty\operatorname{cth}(2\lambda H)J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda=\int_0^\infty\left[\operatorname{cth}(2\lambda H)-1\right]J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda+$$
$$+\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda+\int_0^\infty\frac{e^{-2\lambda H}}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda.$$

Приняв последнее во внимание, можно записать

$$u_\varphi^+(r,H)=\frac{1}{G}\left[\int_0^a\left[K(r,\rho)+K_+(r,\rho)\right]\tau_+(\rho)\rho d\rho-\int_0^b L(r,\rho)\tau_-(\rho)\rho d\rho\right]\ (0\le r<\infty).\qquad(1.10)$$

Вполне аналогичным образом

$$u_\varphi^-(r,-H)=\frac{1}{G}\left[\int_0^a L(r,\rho)\tau_+(\rho)\rho d\rho-\int_0^b\left[K(r,\rho)+K_+(r,\rho)\right]\tau_-(\rho)\rho d\rho\right]\ (0\le r<\infty).\qquad(1.11)$$

В (1.10) и (1.11) приняты обозначения:

$$K(r,\rho)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda;\ K_+(r,\rho)=\int_0^\infty\frac{e^{-2\lambda H}}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda;$$

$$L(r,\rho)==\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\frac{d\lambda}{\operatorname{sh}(2\lambda H)}\quad(0\le r,\rho<\infty);$$
$$K_1(r,\rho)=\int_0^\infty\operatorname{cth}(2\lambda H)J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda=K(r,\rho)+K_+(r,\rho),\qquad(1.12)$$

т.е. исходное ядро $K_1(r,\rho)$ представлено суммой своей главной части $K(r,\rho)$ – интеграла Вебера – Сонина и регулярной части $K_+(r,\rho)$.

Описанная выше контактная задача об осесимметричном кручении упругого слоя посредством двух цилиндрических штампов математически формулируется граничными условиями

$$u_\varphi^+(r,H)=\omega_+r\quad(0\le r<a);\quad u_\varphi^-(r,-H)=\omega_-r\quad(0\le r<b).$$

Реализуя эти условия при помощи (1.10) - (1.12), для определения неизвестных функций $\tau_\pm(r)$ придем к следующей определяющей системе интегральных уравнений (ОСИУ) Фредгольма первого рода:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{G}\left\{\int\limits_0^a \left[K(r,\rho)+K_+(r,\rho)\right]\tau_+(\rho)\rho d\rho - \int\limits_0^b L(r,\rho)\tau_-(\rho)\rho d\rho\right\} = \omega_+ r \quad (0 \le r < a); \\ \dfrac{1}{G}\left\{\int\limits_0^a L(r,\rho)\tau_+(\rho)\rho d\rho - \int\limits_0^b \left[K(r,\rho)+K_+(r,\rho)\right]\tau_-(\rho)\rho d\rho\right\} = \omega_- r \quad (0 \le r < b). \end{cases} \tag{1.13}$$

Запишем также условия равновесия штампов:

$$2\pi\int\limits_0^a \tau_+(\rho)\rho^2 d\rho = M; \quad 2\pi\int\limits_0^a \tau_-(\rho)\rho^2 d\rho = M. \tag{1.14}$$

Решение ОСИУ (1.13) должно удовлетворять условиям (1.14).

Отметим, что после решения ОСИУ (1.13)-(1.14), касательные напряжения $\tau(r)$ в плоскости $z=0$ упругого слоя Ω можно определить обращением формулы (1.7). Таким путем находим

$$\begin{gathered} \tau(r) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a M(r,\rho)\tau_+(\rho)\rho d\rho + \frac{1}{2}\int\limits_0^b M(r,\rho)\tau_-(\rho)\rho d\rho \quad (0 \le \rho < \infty) \\ M(r,\rho) = \int\limits_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda\rho)\frac{\lambda d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda H)}. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Отметим еще, что при $a=b$

$$\tau_+(r) = \tau(r) = -\tau_-(r); \quad \omega_+ = \omega_- = \omega \quad (0 \le r \le a)$$

и ОСИУ (1.13) вырождается в следующее одно ИУ:

$$\frac{1}{G}\int\limits_0^a \left[K(r,\rho)+K_+(r,\rho)+L(r,\rho)\right]\tau(\rho)\rho d\rho = \omega r \quad (0 \le r \le a),$$

а условия (1.14) – в следующее одно условие:

$$2\pi\int\limits_0^a \tau(\rho)\rho d\rho = M.$$

При этом (1.15) даст $\tau(r) \equiv 0 \quad (0 \le r < \infty)$.

В ОСИУ (1.13) и в условиях (1.14) перейдем на интервал $(0,1)$, в соответствующих интегралах полагая

$r = ax, \ \rho = as$ или $r = ax, \ \rho = bs$; или же $r = bx, \ \rho = bs$

и введя безразмерные величины

$$\chi_\pm(x) = \tau_\pm(ax)/G, \quad H_0 = H/a; \quad k = b/a.$$

В результате ОСИУ (1.13) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 K_0(x,s)\chi_+(s)sds + \int\limits_0^1 K_1^{(0)}(x,s)\chi_+(s)sds - k^2\int\limits_0^1 L_0(x,s)\chi_-(s)sds = \omega_+ x; \\ \int\limits_0^1 L_0(s,x)\chi_+(s)sds - k\int\limits_0^1 K_0(x,s)\chi_-(s)sds - k\int\limits_0^1 K_+^*(x,s)\chi_-(s)sds = \omega_- kx; \end{cases} \quad (0 < x < 1) \tag{1.16}$$

$$K_0(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(\alpha s)d\alpha;\ K_+^{(0)}(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(\alpha s)\frac{e^{-2\alpha H_0}d\alpha}{\operatorname{sh}(2\alpha H_0)};$$
$$L_0(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(k\alpha s)\frac{d\alpha}{\operatorname{sh}(2\alpha H_0)};\ K_+^*(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(\alpha s)\frac{e^{-2\alpha H_0/k}d\alpha}{\operatorname{sh}(2\alpha H_0/k)},$$

а условия (1.14) примут вид

$$\int_0^1\chi_+(s)s^2ds=M_+;\quad \int_0^1\chi_-(s)s^2ds=M_-;\quad M_+=M/2\pi a^3G;\qquad M_-=M/2\pi b^3G. \tag{1.17}$$

Далее интегралы в представлениях ядер $K_+^0(x,s),\ L_0(x,s)$ и $K_+^*(x,s)$ из (1.16) также преобразуем на интервал (0,1). В случае ядра $K_+^0(x,s)$ положим

$$u=e^{-2\alpha H_0}\Rightarrow\alpha=-\frac{\ln u}{2H}\quad(0<u<1).$$

В результате имеем

$$K_+^{(0)}(x,s)=\frac{1}{H_0}\int_0^1 J_1\left(-\frac{x\ln u}{2H_0}\right)J_1\left(-\frac{s\ln u}{2H_0}\right)\frac{udu}{1-u^2}. \tag{1.18}$$

Вполне аналогичным образом

$$L_0(x,s)=\frac{1}{H_0}\int_0^1 J_1\left(-\frac{x\ln u}{2H_0}\right)J_1\left(-\frac{ks\ln u}{2H_0}\right)\frac{du}{1-u^2};\ K_+^*(x,s)=\frac{k}{H_0}\int_0^1 J_1\left(-\frac{kx\ln u}{2H_0}\right)J_1\left(-\frac{ks\ln u}{2H_0}\right)\frac{udu}{1-u^2}. \tag{1.19}$$

Четным продолжением функций на интервал $(-1,0)$ в ОСИУ (1.16) и в условиях (1.17) перейдем на стандартный интервал $(-1,1)$. Тогда ОСИУ (1.16) примет вид

$$\begin{cases}\int_{-1}^1 K_0(|x|,|s|)\chi_+(|s|)|s|ds+\int_{-1}^1 K_+^{(0)}(|x|,|s|)\chi_+(|s|)|s|ds-k^2\int_{-1}^1 L_0(|x|,|s|)\chi_-(|s|)|s|ds=2\omega_+x;\\ \int_{-1}^1 L_0(|s|,|x|)\chi_+(|s|)|s|ds-k\int_{-1}^1 K_0(|x|,|s|)\chi_-(|s|)|s|ds-k\int_{-1}^1 K_+^*(|x|,|s|)\chi_-(|s|)|s|ds=2\omega_-k|x|;\end{cases} \tag{1.20}$$
$$(-1<x<1),$$

а условия (1.17) – вид

$$\int_{-1}^1\chi_+(|s|)s^2ds=2M_+;\quad \int_{-1}^1\chi_-(|s|)s^2ds=2M_-. \tag{1.21}$$

Далее обратимся к формуле (1.15) для касательных напряжений в плоскости $z=0$ упругого слоя Ω и применим к ней указанные выше преобразования. Имеем

$$\chi_0(x)=\tau_+(ax)/G=-\frac{1}{2H_0^2}\int_{-1}^1 M_+(|x|,|s|)\chi_+(|s|)|s|ds-$$
$$-\frac{k^2}{2H_0^2}\int_{-1}^1 M_-(|x|,|s|)\chi_-(|s|)|s|ds\ (-\infty<x<\infty);$$

$$M_+(x,s)=\int_0^1 J_1\left(-\frac{x\ln u}{H_0}\right)J_1\left(-\frac{s\ln u}{H_0}\right)\frac{\ln u du}{1+u^2};\quad M_-(x,s)=\int_0^1 J_1\left(-\frac{x\ln u}{H_0}\right)J_1\left(-\frac{ks\ln u}{H_0}\right)\frac{\ln u du}{1+u^2}.$$

Отметим, что при вычислениях удобнее воспользоваться приведенными выше представлениями ядер ОСИУ поставленной задачи интегралами на конечном интервале. С этой целью запишем также билинейное разложение ядра $K_0(x,s)$. Приняв во внимание спектральные соотношения [14, 15]

$$\int_0^1 K_0(x,s)\frac{s^2C_{2n}^{3/2}\left(\sqrt{1-s^2}\right)ds}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(n+1/2)}{2(n!)(n+1)!}xC_{2n}^{3/2}\sqrt{1-x^2};\ (0<x<1; n=0,1,2,...),$$

где $C_{2n}^{3/2}(t)$ – многочлены Гегенбауэра, из условий их ортогональности находим

$$K_0(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(\alpha s)d\alpha=$$

$$=\frac{xs}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)}{n!(n+1)!}C_{2n}^{3/2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)C_{2n}^{3/2}\left(\sqrt{1-s^2}\right)\ (0<x,s<1).$$

2. Сведение ОСИУ (1.20)-(1.21) к конечной СЛАУ. Методом коллокации в сочетании с использованием квадратурных формул типа Гаусса по чебышевским узлам для вычисления интегралов ОСИУ (1.20)-(1.21) сведем к конечной СЛАУ. Так как главная часть ядра ОСИУ $K_0(x,s)$ при $x=s$ имеет логарифмическую особенность, то, выбирая на этом пути произвольное натуральное число N, в качестве внутренних узлов возьмем точки $s_n=\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2N}\right)$ $\left(n=\overline{1,N}\right)$ – корни многочленов Чебышева первого рода $T_N(s)$, а в качестве внешних узлов – точки $x_m=\cos\left(\frac{\pi m}{N+1}\right)$ $\left(m=\overline{1,N}\right)$ – корни многочленов Чебышева второго рода $U_N(x)$. Далее, полагая

$$\mathrm{X}_\pm(|s|)=\frac{\Phi_\pm|s|}{\sqrt{1-s^2}}\quad(-1<s<1), \tag{2.1}$$

где $\Phi_\pm(s)$ – гельдеровские функции на отрезке [-1,1], придем к следующей конечной СЛАУ:

$$\sum_{n=1}^{2N+2}R_{mn}\mathrm{X}_n=a_m\qquad\left(m=\overline{1,2N+2}\right) \tag{2.2}$$

$$
R_{mn}=\begin{cases}
\frac{\pi}{N}\left[K_0\left(|x_m|,|s_n|\right)+K_+^{(0)}\left(|x_m|,|s_n|\right)\right]|s_n| & \left(m,n=\overline{1,N}\right);\\
-\frac{\pi k^2}{N}L_0\left(|x_m|,|s_{n-N}|\right)|s_{n-N}| & \left(m=\overline{1,N};n=\overline{N+1,2N}\right);\\
-2|x_m| & \left(m=\overline{1,N};n=2N+1\right);\\
0 & \left(m=\overline{1,N};n=2N+2\right);\\
\frac{\pi}{N}L_0\left(|s_n|,|x_{m-N}|\right)|s_n| & \left(m=\overline{N+1,2N};\ n=\overline{1,N}\right);\\
-\frac{\pi k}{N}\left[K_0\left(|x_{m-N}|,|s_{n-N}|\right)+K_+^{*}\left(|x_{m-N}|,|s_{n-N}|\right)\right]|s_{n-N}| & \left(m=\overline{N+1,2N};\ n=\overline{N+1,2N}\right);\\
0 & \left(m=\overline{N+1,2N};n=2N+1\right);
\end{cases}\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow\begin{cases}
-2k|x_{m-N}| & \left(m=\overline{N+1,2N},n=2N+2\right);\\
\frac{\pi}{N}|s_n| & \left(m=2N+1,n=\overline{1,N}\right);\\
\frac{\pi}{N}|s_{n-N}| & \left(m=2N+2,n=\overline{N+1,2N}\right);\\
0 & \left(m=2N+2,n=2N+1\right);\\
0 & \left(m=2N+2,n=2N+2\right);
\end{cases}
$$

$$
a_m=\begin{cases}
0 & \left(m=\overline{1,2N}\right);\\
2M_+ & \left(m=2N+1\right);\\
2M_- & \left(m=2N+2\right);
\end{cases}\quad
\mathrm{X}_n=\begin{cases}
\Phi_+\left(|s_n|\right) & \left(n=\overline{1,N}\right);\\
\Phi_-\left(|s_{n-N}|\right) & \left(n=\overline{N+1,2N}\right);\\
\omega_+ & \left(n=2N+1\right);\\
\omega_- & \left(n=2N+2\right).
\end{cases}
$$

Из СЛАУ (2.2) определяются неизвестные X_n, в том числе углы поворота штампов $\omega_\pm$. А безразмерные касательные контактные напряжения согласно (2.1) в узловых точках вычисляются по формулам

$$
\mathrm{X}_\pm\left(|s_n|\right)=\frac{\Phi_\pm|s_n|}{\sqrt{1-s_n^2}}=\frac{\mathrm{X}_n}{\sqrt{1-s_n^2}}\qquad\left(n=\overline{1,2N}\right).
$$

Заключение. Рассмотренную здесь контактную задачу можно обобщить на случай, когда кусочно-однородный упругий слой, состоящий из двух разнородных слоев различных высот, скручивается двумя круговыми цилиндрическими штампами разных радиусов, сцепленными с верхней и нижней гранями составного слоя. В исследовании этой задачи могут быть использованы изложенные в настояшей статье результаты.

[1] Институт механики НАН РА

[2] Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Е. Г. Канецян, М. С. Мкртчян,
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

Об осесимметричном кручении упругого слоя посредством двух абсолютно жестких круговых цилиндрических штампов

Рассматривается осесимметричная контактная задача о кручении упругого слоя посредством двух абсолютно жестких круговых цилиндрических штампов разных радиусов. Предполагается, что штампы сцеплены с упругим слоем на его верхней и нижней гранях и подвержены крутящим моментам. При помощи интегрального преобразования Ханкеля решение задачи сведено к решению системы двух интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма первого рода. Все ядра этой системы ИУ выражаются интегралами от произведения бесселевых функций первого рода индекса 1, подынтегральные функции которых, кроме одного интеграла, на бесконечности экспоненциально убывают. А в случае этого одного ядра-интеграла выделены его главная часть в виде интеграла Вебера-Сонина и регулярная часть. Регулярная часть – ядро опять представляется интегралом от экспоненциально убывающей на бесконечности функции. Методом коллокации в сочетании с использованием квадратурных формул типа Гаусса исходная ОСИУ сведена к конечной СЛАУ. Контактные касательные напряжения и углы поворотов штампа выражаются через решение этой СЛАУ.

Հ.Գ. Կանեցյան, Մ.Ս. Մկրտչյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Բացարձակ կոշտ շրջանային գլանաձև դրոշմների միջոցով առաձգական շերտի առանցքահամաչափ ոլորման մասին

Դիտարկվում է տարբեր շառավիղներով բացարձակ կոշտ շրջանային գլանաձև դրոշմների միջոցով առաձգական շերտի առանցքահամաչափ ոլորման մասին կոնտակտային խնդիրը: Ենթադրվում է, որ դրոշմները հարակցված են առաձգական շերտի վերին և ստորին նիստերին և ենթարկված են պտտող մոմենտների ազդեցությանը: Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը բերված է երկու հավասարումներից բաղկացած Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի (ԻՀՀ) լուծման: Այդ համակարգի բոլոր կորիզներն արտահայտվում են 1 ինդեքսով Բեսելի ֆունկցիաների արտադրյալներից ինտեգրալներով: Դրանց բոլորի, բացի մեկից, ենթաինտեգրալ ֆունկցիաներն անվերջությունում էքսպոնենցիալ արագությամբ նվազող ֆունկցիաներ են: Իսկ այդ մեկ կորիզ-ինտեգրալի դեպքում առանձնացված են իր գլխավոր մասը՝ Վեբեր-Սոնինի ինտեգրալի

տեսքով, և ռեգուլյար մասը: Ռեգուլյար մաս-կորիզը կրկին ներկայացված է անվեր-ջությունում էքսպոնենցիալ նվազող ֆունկցիայի ինտեգրալով: Կոլոկացիայի մեթոդով՝ զուգակցված Գաուսի քառակուսացման բանաձևերի հետ, որոշիչ ինտեգրալ հավասա-րումների համակարգը հանգեցվել է գծային հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր համակարգի: Շոշափող կոնտակտային լարումները և դրոշմների պտտման անկյուններն արտահայտված են վերջավոր համակարգի լուծումներով:

E. G. Kanetsyan, M. S. Mkrtchyan,
corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On Axisymmetric Torsion of an Elastic Layer by Means of Two Absolutely Rigid Circular Cylindrical Punches

An axisymmetric contact problem on the torsion of an elastic layer by means of two absolutely rigid circular cylindrical punches of different radii is considered. It is assumed that the punches are adhered to the elastic layer on its upper and lower faces and are subject to torques. Using the Hankel integral transform, solving the problem is reduced to solving a system of two Fredholm integral equations (IEs) of the first kind. All kernels of this IE system are expressed as integrals of the product of Bessel functions of the first kind of index 1, whose integrands, except for one integral, decrease exponentially at infinity. In the case of one kernel-integral, its main part in the form of the Weber-Sonin integral and the regular part are distinguished. The regular part-kernel is again represented by the integral of a function exponentially decreasing at infinity. Using the collocation method in combination with the Gauss-type quadrature formulas, the initial governing system of integral equations is reduced to the finite SLAE. The contact shear stresses and punch rotation angles are expressed in terms of the SLAE solution.

Литература

1. *Ляв А. Е.* Математическая теория упругости. М. ОНТИ. 1935. 674 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М. Физматгиз. 1963. 688 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука, 1966. 708 с.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М. Наука, 1970. 940 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л. А. Галина. М. Наука. 1976. 493 с.
6. *Reissner E., Sagoci H.* – J. Appl. Phys. 1944. V. 15. Iss. 9. P. 652-654.
7. *Снеддон М.* Преобразование Фурье. М. ИЛ. 1955. 668 с.
8. *Florens A. L. Quart. J.* – Mech. And Appl. Math. 1961, V. 14. Iss. 4. P. 453-459.
9. *Кир Л. М.* В кн.: Прикладная механика. Тр. амер. о-ва инж.-мех., серия Е. 1964. № 3.
10. *Rahman M.* – Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. № 8. P. 1119-1132. doi: 10.1016/s0020-7683(98)00277-7.
11. *Liu,* Tie-Jun Mechanics Research Communications. 2009. V. 36. № 3. P. 322-329.

12. *Su J., Ke L. L.,Wang Y. S.* – Int. J. Solids Struct. 2016. V. 90. P. 45–59. doi:10.1016/j.ijsolstr. 2016.04.011
13. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л. Судпромгиз. 1958. 372 с.
14. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев – Одесса. Вища школа. 1982. 168 с.
15. *Мхитарян С. М.* – ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 105-113.