

ՃՇՄԱՐՏՈՒԹՅԱՆ ՉԱՓԱՆԻՇԻ ՄԱՍԻՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ

Գիտական տեսության գնահատման գործում ամենահիմնական և ամենա-
առաջնահերթ հարցը նրա ճշմարտության հարցն է, այն հարցը, թե տվյալ տե-
սությունը համապատասխանո՞ւմ է արդյոք օբյեկտիվ աշխարհին, ո՞ւնի արդյոք
առարկայական բովանդակություն, թե ոչ:

Այս հարցը առավել սուր կերպով է դրվում մաթեմատիկայի նկատմամբ.
քանի որ այն, գիտության մեզ հայտնի բնագավառների մեջ, աչքի է ընկ-
նում մի կողմից իր ուսումնասիրման առարկայի վերացական բնույթով, իսկ
մյուս կողմից՝ իր ապացուցման մեթոդի խստությամբ ու տրամաբանական կա-
տարելիությամբ: Եթե ֆիզիկան, քիմիան, կենսաբանությունը և մյուս բնական
գիտությունները հիմնականում զբաղվում են փորձնական հետազոտություն-
ներով և դրանցից ստացված արդյունքների ընդհանրացումներով, ապա մաթե-
մատիկայի համար դա վաղուց անցած էտապ է: Դեռևս հին աշխարհի խոշորա-
գույն մտածող էվկլիդեսը, ընդհանրացնելով մարմինների տարածական ձևերի ու
քանակական հարաբերությունների մասին եգիպտացիների ու բաբելոնացիների
ունեցած գիտելիքները, ստեղծել է մեկ, տրամաբանական տեսակետից կուռ
դիտական սխեմա՝ էվկլիդեսյան երկրաչափությունը: Այստեղ արդեն մաթեմա-
տիկայի դրույթները հիմնավորվել են ոչ թե փորձնական ստուգման միջոցով,
այլ նրանով, որ դրանք տրամաբանորեն բխեցվել են այլ դրույթներից՝ աքսիոմ-
ներից, որոնք համարվել են ինքնին ակնհայտ և որոնց ճշմարտությունը երբեք
կասկածի տակ չի դրվել:

Ընդ որում, ինքնին ակնհայտ և բացարձակ ճշմարիտ են համարվել ոչ մի-
այն երկրաչափության, այլև թվաբանության և մաթեմատիկայի մյուս բնա-
դավառների հիմնական ելակետային դրույթները, հետևաբար և այն բոլոր
դրույթները, որոնք տրամաբանորեն բխեցվել են դրանցից:

Այս պատճառով էլ անցյալի մաթեմատիկոսները, եթե ոչ բոլորը, ապա
գոնե նրանց ճնշող մեծամասնությունը, համոզված են եղել, որ էվկլիդեսյան երկ-
րաչափության աքսիոմները միակ ճշմարիտ և միակ հնարավոր դրույթներն են
աշխարհի մասին, որոնք անփոփոխ կերպով պետք է պահպանվեն բոլոր ժա-
մանակներում: Նրանք համոզված են եղել, որ ապացուցելով որևէ մաթեմա-
տիկական թեորեմ, դրանով իսկ հայտնագործում են բացարձակ ճշմարտությու-
նը իր վերջին աստիճանում, որն այլևս փոփոխման, լրացման ու ճշգրտման
կարիք չունի:

Իսկ ի՞նչպես և ի՞նչ միջոցներով է մարդկությունը հասել այդ բացարձակ
աշխարհային: Ի՞նչով ենք մենք համոզված, որ մեր մաթեմատիկական գի-
տելիքները ճշմարիտ են, ո՞րն է նրանց ճշմարտության չափանիշը: Այս փիլի-
սոփայական բնույթի հարցերը միշտ էլ ծառացել են ինչպես փիլիսոփաների,
այնպես էլ մաթեմատիկոսների առջև:

Պլատոնը մաթեմատիկական գիտելիքների հիմքը տեսնում էր ոչ թե մեղ շրջապատող իրական աշխարհի, այլ գերբնական իդեաների աշխարհի մեջ: Ըստ նրա, մաթեմատիկական հասկացություններն ու դրույթները վերաբերում են իդեաների աշխարհին և այդ աշխարհում նրանք գոյություն ունեն ինքնին. իրենք իրենց մեջ և իրենք իրենց համար: Հետևաբար, մաթեմատիկական ճշմարտությունների բացահայտման համար մարդը պետք է լրիվ կերպով անջատվի արտաքին աշխարհից և խորասուզվի իդեաների աշխարհի մեջ:

Այնուհետև փիլիսոփայության ողջ պատմության ընթացքում, Պլատոնից մինչև Կանտ և Հեգել, մաթեմատիկական օբյեկտների բնույթը և մաթեմատիկական ճշմարտության հարցը քննարկման առարկա է հանդիսացել, հատկապես էմպիրիզմի և ռացիոնալիզմի միջև մղվող պայքարում: Կանտը մաթեմատիկական գիտելիքները դիտում էր որպես սինթետիկ և ապրիորի բնույթի դատողություններ: Ըստ Կանտի, մարդուն ապրիորի կերպով հատուկ են տարածության, ժամանակի (ուստի և հաշվման) գաղափարները: Այս կատեգորիաների բազայի վրա մարդը սինթեզում է զգայական աշխարհից ստացած գիտելիքները և դրանով հասնում է բացարձակ մաթեմատիկական իմացության: Այսպիսով, մաթեմատիկական գիտելիքների հիմքը համարվում էր մարդու դիտակցությանը ներհատուկ, ուստի և այդ գիտելիքները համարվում էին մարդկային պրակտիկայից միանգամայն անկախ, բացարձակ ու անփոփոխ ճշմարտություններ, իսկ մաթեմատիկական համարվում էր մարդկային բանականության սլարծաճներ¹:

Ի հակադրություն այս իդեալիստական ուսմունքի, և սրան զուգահեռ, զարգացել է մաթեմատիկական գիտելիքների բնույթի մասին մատերիալիստական ուսմունքը, որս սկսվում է Դեմոկրիտից և իր զարգացման բարձրագույն աստիճանին է հասնում մարքսիստական փիլիսոփայության մեջ: Վերջինս, ինչպես հայտնի է, մաթեմատիկայի հիմնական հասկացությունները և դրույթները դիտում է որպես իրական աշխարհի արտադրանք և մարդկանց ղյխում, բրը ձևավորվել է մարդկային հազարամյա պրակտիկ դործունեության ընթացքում: Այս իսկ պատճառով էլ, ինչպես ամեն մի դիտական տեսության, այնպես էլ մաթեմատիկական տեսությունների ճշմարտության չափանիշը հանդիսանում է մարդկային հասարակության պրակտիկան: Այլ կերպ ասած, մարքսիստական փիլիսոփայության տեսակետից զգայական գիտելիքները և ռացիոնալ մտածողությունը սինթեզվում են ոչ թե ապրիորի կատեգորիաների, այլ հասարակական պրակտիկայի բուզայի վրա: Այսպիսով էլ սկզբունքորեն հնար սվոր է դառնում ստուգել ամբողջությամբ վերցրած մաթեմատիկական տեսության ճշմարտությունը, որը ճշմարիտ կարող է համարվել միայն այն դեպքում, երբ հաստատվում է պրակտիկայի կողմից, երբ իրեն արդարացնում է պրակտիկայում:

Մարքսիստական փիլիսոփայության այս հայտնի դրույթն իր ընդհանրական ձևով մնալով ճշմարիտ, այնուամենայնիվ, ժամանակակից գիտության նվաճումների տեսանկյունից հետադա քննարկման, մեկնաբանման և խորացման կարիք ունի:

Բանն այն է, որ իր ծագման սկզբնական շրջանից մինչև այսօր մաթեմատիկայի ուսումնասիրման օբյեկտները դնալով ավելի ու ավելի վերացական

¹ См. И. Кант, Критика чистого разума, Сочинения в шести томах, т. 3, М., 1964, стр. 433.

րնություն են ընդունել: Ներկայումս մաթեմատիկայի շատ բնագավառներ ձեռք են բերել այնպիսի բարձր աստիճանի հարաբերական ինքնուրույնություն, որ հիմնականում զարգանում են իրենց ներքին օրենքներով, առանց պրակտիկ խնդիրներ շոշափելու, առանց նյութական աշխարհի հետ անմիջական շփում ունենալու:

Իդրք, իր ծագման սկզբնական շրջանում մաթեմատիկան գործ է ածել մի կողմից բնական թվերի, իսկ մյուս կողմից՝ կոնկրետ երկրաչափական ձևերի՝ կետերի, գծերի, հարթությունների և այլնի հետ, որոնք դիտվել են որպես նյութական աշխարհի անմիջական արտահայտություններ: Հետագայում ընդհանրացվել է ինչպես թվի, այնպես էլ երկրաչափական ձևի գաղափարը: Անալիտիկ երկրաչափության ստեղծմամբ մարմինների տարածական ձևերն ու քանակական հարաբերությունները ձուլվել են մեկ միասնական գաղափարի՝ մեծությամբ գաղափարի մեջ: Այնուհետև, ոչ-էվկլիդեսյան երկրաչափության ստեղծումով պարզ դարձավ, որ երկրաչափության ուսումնասիրման օբյեկտներ կարող են լինել ոչ միայն կետերը, գծերը, հարթությունները իրենց անմիջական, առօրյա ըմբռնմամբ, այլև ցանկացած չափանի ամեն մի բազմաձևություն, որը մասնավոր դեպքում կարող է լինել նաև գույն, վիճակ, մաթեմատիկական ֆունկցիա և այլն:

Այնուհետև, մաթեմատիկայի օբյեկտի գաղափարի այս ընդհանրացմանը պեղատհեռ փորձեր արվեցին ընդհանրացնել նաև ուսումնասիրման մաթեմատիկական մեթոդը այնպես, որ այն կարողանա ընդգրկել ոչ միայն քանակական հարաբերություններ, այլև ամեն մի այլ հարաբերություն, որի հետ կարող է առնչվել մարդկային կենդանի մտածողությունը: Այսպիսով, մաթեմատիկական ձևական օբյեկտների հետ միասին սկսեց ուսումնասիրել նաև այդ օբյեկտների միջև սահմանվող զուտ ձևական հարաբերությունները:

Մաթեմատիկայի սուբարկայի և մեթոդի ընդհանրացման այսպիսի բարձր աստիճանը միաժամանակ ենթադրում է մաթեմատիկական օբյեկտների բազմաթիվ հնարավոր մեկնաբանություններ և հետևաբար՝ բազմաթիվ մաթեմատիկական տեսություններ: Սակայն այս բոլոր տեսություններն էլ օժտված են մեկ ընդհանուր հատկանիշով: Այդ այն է, որ նրանք բոլորն էլ կառուցվում են սուբիոմատիկ-դեդուկտիվ եղանակով²:

Ժամանակակից խիստ ձևական ըմբռնմամբ արքիոմատիկ եղանակով մաթեմատիկական տեսության (ինչպես նաև ամեն մի այլ տեսության) կառուցման պրոցեսը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

1. Առանց սահմանման մտցվում են որոշ սկզբնական հիմնական հասկացություններ (օրինակ՝ «կետ», «գիծ», «հարթություն», «տարր», «բազմություն» և այլն):

2. Այս հիմնական հասկացությունները միմյանց հետ կապվում են որոշ կապերով (օրինակ՝ «կետը պատկանում է ուղղին», երկու հատվածներ միմյանց կոնգրուենտ են» և այլն):

3. Հիմնական հասկացությունների և կապերի միջոցով կառուցված մի խումբ արտահայտություններ համարվում են ճշմարիտ և կոչվում են արքիոմատիկներ:

² См. И. Бурбаки, Архитектура математики. В книге И. Бурбаки. Очерки по истории математики, ИЛ, М., 1963.

4. Տրվում են որոշ (տրամաբանական) կանոններ, որոնց միջոցով տված աքսիոմներից բխեցվում են այլ արտահայտություններ, որոնք նույնպես համարվում են ձգմարիտ և կոչվում են թեորեմներ:

Այսպիսի խիստ ձևական ըմբռնմամբ հիմնական հասկացությունները ինքնին վերցրած ոչինչ նշանակել չեն կարող: Նրանց մասին կարելի է ասել միայն այն, ինչ տրված է աքսիոմների մեջ և ոչ ավելին: Ինչ վերաբերում է տրամաբանական կանոններին, ապա նրանք ներկայանում են որպես զուտ մեխանիկական միջոցներ և ամենևին կապված չեն մեր առօրյա ըմբռնումների ու պատկերացումների հետ: Այս պատճառով էլ, ինչպես սրամտորեն նկատում է Հիլբերտը, մաթեմատիկական տեսությունը իր կառուցվածքի տեսակետից ամենևին չի փոխվի, եթե «կետ», «գիծ», «հարթություն» հասկացությունները փոխարինենք, օրինակ, «սեղան», «աթոռ» և «գարեջրի գավաթ» հասկացություններով³:

Այսպիսով, ի տարբերություն կլասիկ մաթեմատիկայի, ժամանակակից մաթեմատիկան ուսումնասիրում է ոչ միայն կետերի, գծերի, հարթությունների ու թվերի փոխհարաբերությունները, որոնց վերագրվում է որոշակի ռեալ իմաստ, այլ կարող է ուսումնասիրել դրանց անալոգիայով կառուցված այն ամենը, ինչ որ կարող է ենթարկվել ճշգրիտ և միարժեք սահմանման:

Հարց է առաջանում՝ նշված ձևով կառուցված տեսությունների համար գոյություն ունի՞ արդյոք որևէ չափանիշ, որը հնարավորություն տա դրանք տարբերելու միմյանցից, ինչ-որ իմաստով տարբերելու «լավը» «վատից», ձգմարիտը՝ կեղծից: Զուտ մաթեմատիկական տեսակետից հայտնի է տեսության զնահատման երեք չափանիշ՝ անհակասականություն, լրիվություն և անկախություն: Ըստ առաջին պահանջի, տեսության աքսիոմները պետք է ընտրված լինեն այնպես, որ հնարավոր չլինի նրանցից բխեցնել որևէ դրույթ իր ժխտման հետ միասին: Երկրորդ պահանջը կայանում է նրանում, որ բոլոր ձգմարիտ համարվող դրույթները պետք է հնարավոր լինի բխեցնել աքսիոմներից, իսկ երրորդ պահանջի համաձայն, աքսիոմներից ոչ մեկը չպետք է բխի մյուսներից:

Այս պահանջները հիմնականում ստուգվում են նրանով, որ տեսությունը փոխհարաբերության մեջ է դրվում օբյեկտների մեկ այլ սիստեմի հետ, որը կոչվում է տվյալ տեսության մոդել և, սովորաբար, ընտրվում է ավելի ռեալ օբյեկտների բնագավառից: Այլ կերպ ասած, այդ պահանջները ստուգվում են ոչ թե՛ բուն տեսության, այլ նրա մեկնաբանության նկատմամբ: Մինչև օրս մեղ հայտնի ամենաընդհանրական բնույթի տեսությունը, որի միջոցով կարող են մեկնաբանվել բոլոր մաթեմատիկական տեսությունները, բազմությունների տեսությունն է: Այդ պատճառով բազմաթիվ փորձեր են արվել մաթեմատիկական տեսությունները հիմնավորելու համար դրանք հանգեցնել բազմությունների տեսությանը:

Սակայն մեր դարաշրջանի սկզբում պարզվեց, որ ինքը՝ բազմությունների տեսությունը ներքուստ հակասական է. նրա մեջ բացահայտվեցին մի շարք տարադրոքներ⁴: Այս պարադոքսների հաղթահարման ճանապարհին «տեղծվե-

³ См. Н. Бурбаки, Теория множеств, изд. «Мир», М., 1965, стр. 321.

⁴ Այս պարադոքսներից մի քանիսը ըստ էության հայտնի էին դեռևս հին աշխարհում, սակայն մեր դարաշրջանի սկզբում պարզվեց, որ դրանք բազմությունների տեսության պարադոքսների մասնավոր արտահայտություններն են: Այս մասին մանրամասն տես С. К. Клини, Введение в математику.

յին բազմաթիվ ուղղություններ, որոնցից յուրաքանչյուրը նպատակ ուներ ուրույն ճանապարհով մաթեմատիկան դուրս բերել այս ճգնաժամից, վերականգնել նրա նկատմամբ ունեցած անցյալի հավասար:

Այդ ուղղություններից առանձնապես ուշադրության արժանի են երեքը՝ լոգիցիզմը, ֆորմալիզմը և ինտուիցիոնիզմը, որոնք ըստ էության դուրս են գալիս բուն մաթեմատիկայի շրջանակներից և շոշափում են այնպիսի արմատական փոփոխության հարցեր, ինչպիսիք են մաթեմատիկական, արստրալ-սիստեմների բնույթը, գոյության հարցը մաթեմատիկայում, մաթեմատիկական իմացության ճշմարտության հարցը և այլն: Համառոտակի ծանոթանանք այդ ուղղությունների ելակետային դրույթներին և փորձենք բացահայտել դրանց փոփոխության էությունը:

Լոգիցիզմը, որի ներկայացուցիչներն են Բ. Ռասելը, Ա. Ուայտհեդը և Ն. Կառնապը, նպատակ ունի մաթեմատիկան հանգեցնել տրամաբանությանը, նրա բոլոր դրույթները հիմնավորել տրամաբանության օրենքների միջոցով: Ըստ Ռասելի մաթեմատիկական իդեաները կարելի է ստանալ զուտ տրամաբանական իդեաների պարզ դուրսբերումից, քանի որ նրանց մեջ ըստ էության բաժանման գիծ չի կարելի անցկացնել: «Նրանք (տրամաբանությունը և մաթեմատիկան—Ս. Ա.) սուրբերվում են միմյանցից այնպես, ինչպես երեխան տարբերվում է չափահաս մարդուց. տրամաբանությունը մաթեմատիկայի պատանեկությունն է, իսկ մաթեմատիկան՝ տրամաբանության հասունացած շրջանը»⁵:

Մաթեմատիկայի և տրամաբանության փոխհարաբերության այսպիսի ըմբռնումը նոր չէ. այն ըստ էության պատկանում է Լայբնիցին, որը նպատակ ուներ մեկ միասնական ձևակազմ հաշվի մեջ բնագրկել մարդկային մտածողության բոլոր բնագավառները: Այս իդեան հետագայում պարզացվեց Զ. Բուլի և Գ. Ֆրեյդի կողմից: Վերջինս մաթեմատիկական տրամաբանությունը շարադրեց արքիոմատիկ-դեդուկտիվ եղանակով, ցանկանալով նրա միջոցով հիմնավորել մաթեմատիկան:

Ռասելը և Ուայտհեդը ըստ էության շարունակում են Ֆրեյդի գործը, ցանկանալով մաթեմատիկան հիմնավորել բազմությունների տեսության միջոցով, դիտելով վերջինս որպես զուտ տրամաբանական տեսություն, միաժամանակ խուսափելով այդ տեսության պարագոքներից: Այս ճանապարհին էլ ստեղծվեց նրանց «Մաթեմատիկայի հիմունքները» կապիտալ աշխատությունը, որը նոր դարագրուխ բացեց ինչպես մաթեմատիկայի, այնպես էլ տրամաբանության մեջ»⁶:

Սակայն Ռասելի և Ուայտհեդի այս ծրագիրը չիրականացվեց: Նախ պարզվում է, որ այս եղանակով մաթեմատիկա կառուցելու համար անհրաժեշտ է զուտ տրամաբանական բնույթի արքիոմներին ավելացնել նաև այլ տիպի արքիոմներ, մասնավորապես հանգման և անընդհատության արքիոմները, որոնք իրենց բնույթով զուտ տրամաբանական չեն⁷: Այսինքն՝ լոգիցիզմը մաթեմա-

⁵ B. Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, London—New York, 1924, p. 194.

⁶ Տե՛ս B. Russell and B. Whitehead, Principia Mathematica, Cambridge, 1957.

⁷ А. Чёрч, Математика и логика. Сб. «Математическая логика и ее применения» изд. «Мир», М., 1965, с. 212.

տիկայի կառուցման համար հավասար շափով օգտագործում է ինչպես տրամաբանական, այնպես էլ մաթեմատիկական նախադրյալներ: Թեև լոգիցիստական սխտեմում ոչ-տրամաբանական դրույթները ձևակերպված են տրամաբանական դրույթների միջոցով, այնուամենայնիվ, պարզվում է, որ դրանք կարելի է խստիվ կերպով զատել միմյանցից: Ավելին, 1931 թվականին ավստրիացի մաթեմատիկոս Կ. Գյոդելը խիստ մաթեմատիկորեն ապացուցեց, որ ամեն մի բավականաչափ հարուստ ձևական սխտեմ, այդ թվում և Ռասելի սխտեմը, չի կարող լրիվ լինել: Այսինքն՝ այդ սխտեմի լեզվով կարելի է ձևակերպել այնպիսի բովանդակային իմաստով ճշմարիտ դրույթներ, որոնք հնարավոր չլինի ոչ ապացուցել, և ո՛չ էլ հերքել: Սրանով իսկ լոգիցիստական ծրագիրը վերջնականապես փակուղու առջև կանգնեց:

Ֆորմալիզմի ներկայացուցիչներն են՝ Դ. Հիլբերտը, Ա. Ակերմանը, Պ. Բերնայսը և այլոք: Ֆորմալիզմի ծագումը պայմանավորված է XX դարի մաթեմատիկայի զարգացման ներքին պահանջներով: Որքան մաթեմատիկան հետանում է զգայությունը մատչելի, ակնհայտ օբյեկտներից, այնքան անհրաժեշտ է դառնում ավելի ձևական և ավելի ճշգրիտ ձևով սահմանել ինչպես մաթեմատիկական օբյեկտները, այնպես էլ աքսիոմներից թեորեմների բխեցման տրամաբանական կանոնները: Սրանից էլնելով, ֆորմալիզմը գտնում է, որ մաթեմատիկան պետք է ֆորմալիզացնել մաքսիմում շափով, վերածելով այն ամեն մի բովանդակությունից զուրկ նշանների մեխանիկական զուգորդման: Սահմարավորություն կտա կասեցնել սուբյեկտիվորեն ակնհայտ թվացող դրույթների ներթափանցումը մաթեմատիկական տեսության մեջ և դրանով զերծ պահել մաթեմատիկան ամեն տեսակի պարադոքսներից: Հստ Հիլբերտի, այս, բովանդակությունից միանգամայն զուրկ, նշանների սխտեմի ստրուկտուրայի, նրա մեկնաբանման և անհակասականության ուսումնասիրությունը նշանակում է մարդկային մտածողության տեխնիկայի ուսումնասիրություն: Սրանով իսկ մաթեմատիկական օբյեկտի գոյությունը նույնանում է նրա անհակասականության հետ. որևէ հասկացություն համարվում է օրինական, եթե այն չի հակասում տվյալ սխտեմին: Այստեղ գոյություն ունենալ նշանակում է լինել անհակասական:

Ինտուիցիոնիզմը, որի ներկայացուցիչներն են հանդիսանում Լ. Բրաուերը, Ա. Հեյթինգը և Գ. Վայլը, ձևավորվել է որպես ռեակցիա մի կողմից ընդդեմ լոգիցիզմի, մյուս կողմից՝ ընդդեմ ֆորմալիզմի:

Ինտուիցիոնիզմը, նախ, գտնում է, որ ոչ թե մաթեմատիկան է հենվում տրամաբանության վրա, այլ ընդհակառակը՝ տրամաբանությունն է ածանցվում մաթեմատիկայից, քանի որ վերջինիս օբյեկտները ավելի պարզ են և ինտուիցիային ավելի մատչելի: Այնուհետև, մաթեմատիկական գոյություն ունի մաթեմատիկոսի գլխում, այլ ոչ թե թղթի վրա գրված նշանների զուգորդման մեջ: Ուստի և մաթեմատիկական իմացության հիմքը ինտուիցիան է, որը հանդիսանում է նրա հավաստիության միակ շափանիշը: Հետևաբար, «մաթեմատիկական կառուցումը պետք է լինի բանականության հետ այնքան անմիջականորեն

8 См. Д. А. Бочвар, К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств. Мат. сб. 15(57), 1944, стр. 369—384.

9 А. Гейтинг, Интуиционизм, М., «Мир», 1965, стр. 14.

կապված և նրա արդյունքը պետք է լինի այն աստիճանի պարզ, որ կարիք չունենա ոչ մի հիմնավորման»⁹:

Մաթեմատիկական տեսության կառուցման գործում օգտագործվող ակտուալ անվերջության աբստրակցիան, որի շնորհիվ անվերջությունը դիտվում է որպես ավարտուն, կատարյալ, իր բոլոր մասերով մեզ մատչելի, ինտուիցիայով անմիջականորեն չի ընկալվում, հետևաբար ինտուիցիոնիզմը հրաժարվում է այդ աբստրակցիայից: Նույն հիմքով ինտուիցիոնիզմը հրաժարվում է նաև մաթեմատիկայում ձևական տրամաբանության երրորդի բացառման օրենքից, ըստ որի երկու իրարամերժ դրույթներից մեկն ու մեկը ճշմարիտ է: Ըստ ինտուիցիոնիզմի, մաթեմատիկական որևէ օբյեկտի գոյության չափանիշը ինտուիտիվ կերպով ակնհայտ սկզբունքների միջոցով նրա կառուցումն է և ոչ թե նրա հակադիր օբյեկտի գոյության ժխտումը:

Իսկ ի՞նչ հասկանալ ինտուիտիվ կերպով ակնհայտ ասելով: Ի՞նչ չափանիշով մենք կարող ենք մաթեմատիկական մեկ օբյեկտի գոյությունը համարել ինտուիտիվ կերպով ակնհայտ, իսկ մյուսինը՝ ոչ: Ո՛չ Բրաուերը և ո՛չ էլ նրա հետևորդները ի վիճակի չեն որոշակի պատասխան տալու այս հարցին: Պարզ է, որ ինտուիտիվ ակնհայտության չափանիշը ինքնին վերցրած, եթե այն չի կապվում մարդկային հասարակության պրակտիկայի հետ, սուբյեկտիվ չափանիշ է: Այն, ինչ ինտուիտիվ կերպով ակնհայտ է մեկի համար, կարող է ակնհայտ չհամարվել մեկ ուրիշի կողմից: Այս պատճառով անհնարին է ինտուիցիոնիստական սկզբունքով կառուցել հետևողական ուսմունք, որը հենվի ճշմարտության որևէ օբյեկտիվ չափանիշի վրա:

Ինչպես տեսնում ենք, նշված երեք ուղղություններից ամեն մեկը բացարձականացնում է մաթեմատիկական իմացության մի կողմը և այդ կողմն էլ դիտում է որպես միակը: Լոգիցիզմը բացարձականացնում է մաթեմատիկայի տրամաբանական կողմը, ֆորմալիզմը՝ մաթեմատիկական հետևությունների խստությունն ու անաղարտությունը, իսկ ինտուիցիոնիզմը՝ մաթեմատիկական դրույթների ակնհայտությունն ու պարզությունը, ինքնին հասկանալի է, որ սրանցից յուրաքանչյուրը իրավացի է յուրովի և որոշ սահմաններում: Ինտուիցիոնիզմը իրավամբ գտնում է, որ մաթեմատիկան՝ մարդկային մտքի այդ հոլակապ կերտվածքը, չի կարելի հանգեցնել որոշ օրենքներով սահմանված ձևական նշանների խաղի, որի գոյությունը ռեալ է միայն այնքանով, որքանով այն դրվում է թղթի վրա: Ֆորմալիզմը գտնում է, որ ինտուիցիոնիզմը, հիմք ընդունելով ինտուիտիվ ակնհայտը, զրկում է մաթեմատիկան իր տրամաբանական խստությունից ու այնուհետև ավելորդ մտահնարքներով ու բծախնդրությամբ ցանկանում է խարխուլել նրա հոյակապ կառուցվածքը:

Մաթեմատիկական օբյեկտների ու աբստրակցիաների, առավել ևս մաթեմատիկական ճշմարտության բնույթի բացահայտումը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ վերացվեն այս միակողմանիությունները և ռացիոնալ ձևով սինթեզվեն միմյանց հետ նշված երեք ուղղությունները: Ի դեպ, այս հանդամանքը խոստովանում են նաև իրենք՝ այդ ուղղությունների կողմնակիցները: Իտուիցիան տրամաբանությանը, մեթոդոլոգիային ու փիլիսոփայությանը նվիրված 1960 թվականի Ստենֆորդի միջազգային կոնգրեսի արդյունքները ցույց տվեցին¹⁰, որ այս ուղղությունների սահմանադժեքը գնալով ավելի ու

¹⁰ Sб'а «Математическая логика и ее применения», изд. «Мир», М., 1965.

ավելի են աղոտանում, որ նրանք զնալով ավելի են մերձենում միմյանց: «Համեմատենք 1930 թվականի վիճակը, — գրում է ինտուիցիոնիստ Ա. Հեյթինգը, — ներկայիս հետ: Խաղաղ գոյակցություն ոգին հաղթել է անհաշտ պայքարի ոգուն: Ուղղություններից և ոչ մեկը (խոսքը նշված երեք ուղղությունների մասին է — Ս. Ա.) այժմ հավակնություն չունի ներկայացնելու միակ ճշմարիտ մաթեմատիկան: Սաթեմատիկայի հիմքերի հետազոտման փիլիսոփայական նշանակությունը, գոնե մասնակի կերպով, կայանում է նրանում, որ կլասիկ մաթեմատիկայի ստրուկտուրայի մեջ միմյանցից անջատվեն ֆորմալիստական, ինտուիցիոնիստական, լոգիցիստական և պլանտոնիստական տարրերը և ճշգրիտ կերպով սահմանվեն այդ տարրերի գործունեության բնագավառները և սահմանափակությունները»¹¹:

Ինչպես հայտնի է, նշված երեք ուղղություններից և ոչ մեկին մինչև օրս չի հաջողվել իրադրծել մաթեմատիկայի հիմնավորման իր ուրույն ծրագիրը: Այդ անհաջողության պատճառն այն չէ, որ նրանք դեռևս չեն գտել պահանջվող տեխնիկական ապարատը: Պատճառը նրանց սխալ փիլիսոփայական-մեթոդոլոգիական դիրքորոշման մեջ է, մաթեմատիկական դիտելիքի և մաթեմատիկայի առարկայի բնույթի նրանց իդեալիստական ըմբռնման մեջ: Իդեալիստները մաթեմատիկան բաժանում են երկու, միմյանց հետ ոչ մի կապ չունեցող էտապների՝ նախադիտական և հետգիտական: Առաջինը փաստական գիտելիքների հավաքման էտապն է, երկրորդը՝ գիտական տեսությունների ստեղծման էտապը: Սրանով իսկ ժամանակակից մաթեմատիկան կտրվում է մաթեմատիկայի դարդացման պատմությունից, դիտվում է որպես ավարտուն, կատարյալ էություն և խնդիր է դրվում իրեն:՝ մաթեմատիկայի միջոցով հիմնավորել մաթեմատիկան: Իրականում անհնարին է հիմնավորել որևէ գիտական սիստեմ, մնալով այդ սիստեմի ներսում, սահմանափակվելով այդ սիստեմի միջոցներով: Յուրաքանչյուր հիմնավորում անհրաժեշտորեն պետք է ենթադրի արտաքին միջոցներ, տեսության արտաքին գնահատական:

Լոգիցիզմը փորձում է մաթեմատիկայի հիմնական հասկացությունները, մասնավորապես թվի դադափարը, հիմնավորել տրամաբանական կատեգորիաների միջոցով: Սակայն տրամաբանությունը ևս լոգիցիզմի կողմից դիտվում է պատմականությունից միանգամայն վեր: Նրա համար տրամաբանության օրենքները մեկընդմիջտ, ապրիորի կերպով տրված, պատրաստի օրենքներ են, որոնք ենթակա չեն փոփոխման, դարդացման: Նրանք ամենևին կախված չեն այն բնագավառից, որտեղ նրանք կիրառվում են: Սրանով իսկ լոգիցիզմը մաթեմատիկան կտրում է մարդկային հասարակության պատմությունից, և դիտում է որպես սոսկ տավտոլոգիական բնույթ ունեցող արտահայտությունների հավաքածու, որտեղ ոչ գիտենք, թե ինչի մասին ենք խոսում, և ոչ էլ դիտենք, թե ճիշտ է այն, ինչ ասում ենք¹²: Չափազանց հատկանշական է նաև այն հանգամանքը, որ լոգիցիզմի կողմնակիցներից և ոչ մեկի կողմից որոշակի չի սահմանվում տրամաբանության առարկայական բնագավառը և լուր կերպով տրամաբանությանը վերագրվում է կիրառման անսահման ոլորտը:

¹¹ А. Гейтинг, Тридцать лет спустя. Նույն տեղում, էջ 225:

¹² См. Б. Рассел, Новые работы о началах математики. Сб. «Новые идеи в математике», Сб. № 1, СПб, 1913, стр. 84.

Ֆորմալիզմը, մաթեմատիկան դիտելով որպես բովանդակությունից զուրկ նշանների ամբողջություն, մաթեմատիկական ճշմարտության ապացուցումը հանդեցնում է նշանների որոշ հաջորդականության կառուցման, իսկ մաթեմատիկական ճշմարտության խնդիրը՝ այդ նշանների անհակասականությանը: Այսպիսով, ճշմարտության հարցը փաստորեն չի դրվում մաթեմատիկայում, այն պարզապես շրջանցվում է: Ֆորմալիզմը ի վիճակի չէ մաթեմատիկական օբյեկտների մասին տալ որևէ դրական բնութագրում և դրանով հիմնավորել նրանց գոյությունը: Նա պարզապես ընդունում է, որ մաթեմատիկայի մեջ ռեալ է այն բոլորը, գոյություն ունի այն բոլորը, ինչը որ անհնարին չէ¹³:

Ֆորմալիզմը, կտրելով մաթեմատիկան նրա զարգացման պատմությունից՝ դրանով իսկ մաթեմատիկայի փիլիսոփայական խնդիրները կտրում է մաթեմատիկայի հայտնադործման տրամաբանությունից: Մաթեմատիկայից միանդամայն արտաքսվում է մաթեմատիկայի հայտնադործման տրամաբանությունը և փիլիսոփայական-իմացաբանական պրոբլեմատիկան ընդհանրապես: Միակ բանը, որ կարող է հայտնադործություն համարվել ֆորմալիստական մաթեմատիկայում, այն է, թե տվյալ բանաձևը մեխանիկական գործողությունների միջոցով կարո՞ղ է բխեցվել աքսիոմներից, թե՞ ոչ, մի բան, որը բոլորովին պիտանի չէ կենդանի մաթեմատիկական մտածողության համար¹⁴:

Անհակասականությունը, որը հանդիսանում է ֆորմալիզմի հիմնական սյունը, անշուշտ, վերցված է տրադիցիոն տրամաբանությունից: Սակայն տրադիցիոն տրամաբանության մեջ անհակասականությունը հասկացության գոյության համար անհրաժեշտ պայման է, բայց ոչ բավարար, այսինքն, անհակասականությունը հասկացությունը դարձնում է հնարավոր: Այնինչ ֆորմալիզմի համար անհակասականությունը նշանակում է գոյություն, ուստի և բացարձակ անհակասականության ապացուցման ֆորմալիստական ծրագիրը դառնում է բավական դավիշտական պահանջ՝ ապրիորի կերպով ապացուցել տեսության գոյությունը, առանց այն ունենալու:

Տեսության անհակասականությունը, անշուշտ, կարևոր պահանջ է: Այն հնարավոր է դարձնում տեսության մեկնաբանությունը և ցույց է տալիս, որ կա օբյեկտների այնպիսի բնագավառ, որտեղ տեսությունը կարող է իրականանալ: Սակայն սա դեռ քիչ է տեսության ճշմարտության համար: Անհրաժեշտ է նաև, որ այդ օբյեկտները ունենան ռեալ բովանդակություն այն իմաստով, որ հանդիսանան իրական աշխարհի օբյեկտների արտացոլում, ունենան իրենց նախատիպերը իրականության մեջ: Այս պատճառով էլ տեսության ոչ այնքան բացարձակ, որքան հարաբերական անհակասականության ապացուցումն է (ներառյալ մեկնաբանումը մոդելների միջոցով), որ օժտված է ճանաչողական մեծ արժեքով: Այն հնարավորություն է տալիս վերացական տեսությունները հանգեցնել ավելի պակաս վերացական տեսության, որի շնորհիվ էլ հենց տեսությունը կողմնորոշվում է դեպի պրակտիկան, հնարավորություն է ստանում հավելու պրակտիկայի հետ:

Ինտուիցիոնիզմը գտնում է, որ մաթեմատիկական ճշմարտության հիմքը մաթեմատիկոսի ներքին համոզվածությունն է, և միայն այդ

¹³ Տե՛ս В а н Х а о, Процесс и существование в математике. «Математическая логика и ее применения», стр. 334.

¹⁴ Տե՛ս И. Л о к а т о с, Доказательства и опровержения, изд. «Наука», М., 1967, стр.

համոզվածությունն է, որ կարող է մաթեմատիկական օբյեկտների գոյության սպառնալից ծագել: Մաթեմատիկական ապացուցումը ճշմարիտ է ոչ թե այն պատճառով, որ այն ստացվում է խստիվ կերպով, մեկընդմիջտ սահմանված կանոնների միջոցով, այլ այն պատճառով, որ ապացուցման յուրաքանչյուր օղակ անմիջականորեն ակնհայտ է մեզ և մատչելի: Այսպիսով, ինտուիցիոնիզմը գտնում է, որ նախօրոք, ապացուցման պրոցեսից դուրս գոյություն ունի մաթեմատիկական ճշմարտություն, համոզվածություն, որը սակայն պարզաբանման, քննարկման ենթակա չէ. այն ոչ թե փորձնական, այլ հոգեբանական բնույթի է: Այն հանգամանքը, որ անալիտիկ երկրաչափության ստեղծումով հնարավոր եղավ հրաժարվել տարածական ինտուիցիայից և այն հանգեցնել թվաբանական ինտուիցիայի, ինտուիցիոնիստ Ա. Պուանկարեի համար ամենևին սարսափելի չէ: Սակայն թվի գաղափարը նա դիտում է որպես միանգամայն ակնհայտ և ինքնին հասկանալի, ուստի և անիմաստ է համարում թվաբանությունը տրամաբանության, կամ ինչ-որ մեկ այլ բանի միջոցով հիմնավորելու բոլոր փորձերը: Մասնավորապես, Պուանկարեի կարծիքով, մաթեմատիկական ինդուկցիայի աքսիոմը պետք է հենվի հավատի վրա և այն չի կարելի բխեցնել աքսիոմների ոչ մի սխեմայից¹⁵:

Ինտուիցիոնիզմի փիլիսոփայական ակունքները բավական մոտ են կանտյան սպրիորիզմին: Ինչ խոսք, որ մաթեմատիկական ճշմարտությունը պետք է լինի ակնհայտ և մտածողությանը մատչելի: Բայց չէ՞ որ ակնհայտությունն ու մատչելիությունը ևս պատմական երևույթ է: Մարդու հասարակական պրակտիկայի զարգացման հետ մեկտեղ փոփոխվում է նաև ակնհայտության չափանիշը, ոչ ակնհայտը դառնում է ավելի ակնհայտ: Հետևաբար և ինտուիցիայի մեջ տրված մարդկային պրակտիկայի զարգացման արդյունք է, պրակտիկ գործունեության արդյունք: Ուստի և ինտուիտիվ կերպով ակնհայտի և ոչ ակնհայտի միջև չկա բացարձակ անանցանելի սահման: Պակաս ակնհայտը հիմնավորվում է ավելի ակնհայտով և դրանով իսկ ինքն էլ օժտվում է ակնհայտությամբ: Այնինչ ինտուիցիոնիզմը ինտուիտիվ ակնհայտը կտրում է պրակտիկալի: Նա ինտուիցիան դիտում է որպես ապրիորի ձևով մարդու մտածողությանը հատուկ ունակություն, որպես բնության պարզև, որը չի կարելի բացատրել, չի կարելի ներկայացնել ոչ մի ռացիոնալ եղանակով:

Նշված երեք ուղղություններն էլ, կառուցված լինելով սխալ մեթոդոլոգիական հիմքերի վրա, կտրելով մաթեմատիկայի ներքին տրամաբանությունը նրա պատմությունից, ի վիճակի չեն բացատրելու ոչ մաթեմատիկայի զարգացման փաստը, և ո՛չ էլ այդ զարգացման ազդակները: Ինչպես գիտության ամեն մի բնագավառում, մաթեմատիկայում ևս ճշմարտության հայտնագործումը և նրա տրամաբանական հիմնավորումն ու ապացուցումը, անշուշտ, իմացության տարբեր աստիճաններ են: Այս հանգամանքը որոշակի ձևով դրսևորվել է դեռևս հին հունական մաթեմատիկայում, որտեղ Դեմոկրիտի ատոմիստական մաթեմատիկան դիտվել է որպես հայտնագործման մեթոդ, իսկ էվդոքսի, այսպես կոչված, «սպառման մեթոդը»՝ որպես ապացուցման մեթոդ¹⁶: Վերջինս չէր կարելի կիրառել, եթե նախօրոք հայտնի չէր, թե ինչ է պահանջվում ապացուցել: Այս երկու կողմերը պարզորոշ կերպով պետք է զանազանվեն և անհրաժեշտա-

¹⁵ А. Пуанкаре, Ценность науки, М., 1906, стр. 17.

¹⁶ См. С. Я. Лурье, Очерки по истории античной науки, изд. АН СССР, М.—Л., 1947.

բար պետք է հաշվի առնվեն նաև ժամանակակից մաթեմատիկայի հիմնավորման գործում:

Թեև չի կարելի բացարձակ սահմանագիծ անցկացնել ինդուկտիվ և դեդուկտիվ մեթոդների միջև, բայց և այնպես կարելի է որոշակի կերպով պնդել, որ պիտական հայտնագործման խնդրում չափազանց մեծ դեր են խաղում ինդուկցիան և անալոգիան, իսկ տեսական հիմնավորման գործում՝ դեդուկցիան: Մարդկային հասարակությունը իր պրակտիկ գործունեության ընթացքում ավելի կամ փոքր ճշգրիտ, ավելի կամ պակաս որոշակիությամբ կռահում է մաթեմատիկական թեորեմների բովանդակությունը և դրանից հետո միայն ձեռնամուխ է լինում նրանց ապացուցմանը: Այլ կերպ ասած, մաթեմատիկական իմացության մեջ առավել մեծ ճանաչողական արժեք ունի ճշմարիտ դրույթների կռահումը, քան նրանց ձևական ապացուցումները:

Մաթեմատիկայի պատմությունը լիքն է բաղմամբիվ ասույթներով այն մասին, որ մաթեմատիկական հայտնագործման մեջ կարևորը ճշմարտության կռահումն է: Դեռևս Դիոգենեսից հայտնի է հետևյալ ասույթը. «Միայն ինձ ուղարկիր թեորեմներ, այդ դեպքում ես անպայման կգտնեմ ապացուցումը», և էյլերը գտնում էր, որ «թվաբանական թեորեմները հայտնագործվել են շատ ավելի վաղ, քան նրանց ճշմարտությունը կհաստատվեր խստիվ ապացուցումներով»: Հայտնի է Ռիմանի հետևյալ արտահայտությունը. «0», եթե ես ունենայի թեորեմներ, ապա ես կկարողանայի բավականին հեշտությամբ գտնել նրանց ապացուցումները»¹⁷: Այս միտքը ավելի հետևողականորեն անց է կացված Դ. Պոյայի մոտ, որը հանգամանորեն քննարկելով ինդուկտիվ մտահանդման դերը մաթեմատիկական իմացության գործում, հանգում է այն եզրակացության, որ մաթեմատիկոսը նախքան մաթեմատիկական թեորեմների ապացուցումը, պետք է կռահի նրանց ճշմարտությունը¹⁸:

Անշուշտ, մաթեմատիկայում ավելի, քան որևէ այլ բնագավառում, մեծ դեր է խաղում մարդկային մտածողության ակտիվությունը, մարդկային մտքի նպատակասլացությունը: Սակայն մարքսիստական փիլիսոփայության այն հայտնի դրույթը, որ նպատակները միշտ էլ իրենց հիմքում ունեն նյութական գործոններ, որ մարդիկ իրենց առջև դնում են միայն այնպիսի նպատակներ, որոնց իրականացման համար արդեն կան անհրաժեշտ նյութական պայմաններ, բացարձակապես ճշմարիտ է նաև մաթեմատիկայի համար: Այլապես, եթե մաթեմատիկան դիտենք որպես մարդկային մտքի աղատ ստեղծագործություն, ապա անհասկանալի կդառնա մաթեմատիկական հայտնագործման օրինաչափությունը: Անհասկանալի կմնա այն, թե ինչպես են տվյալ ժամանակաշրջանում ծնվում միմյանց հետ ընդհանրություններ ունեցող տեսություններ և այն, թե միևնույն ժամանակի մաթեմատիկոսները ինչպես են կարողանում հասկանալ միմյանց: Սակայն ինչպես հասարակական գիտակցության մյուս ձևերը, այնպես էլ մաթեմատիկան, կապված է հասարակական պրակտիկայի հետ ոչ թե անմիջական, այլ միջնորդված ձևով: Մարդկային պրակտիկ գործունեությունից մինչև ժամանակակից աբստրակտ մաթեմատիկան ընկած է միջնորդավորող գիտությունների մի ձգված շղթա, սկսած մեխանիկայից, ֆիզիկայից, էրկ-

¹⁷ Մեջբերումները կատարված են Ի. Լոկատոսի գրքից՝ *Տե՛ս* И. Локатос, Доказательства и опровержения, стр. 17.

¹⁸ *Տե՛ս* Д. По́йа, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, М., 1957. Предисловие.

րաչափական կառուցումներից մինչև թվերի տեսություն: Այս շղթայի վրայով էլ մաթեմատիկական իմացությունը ավելի կոնկրետ օբյեկտներից ու հարաբերություններից անցնում է ավելի աբստրակտին:

Պրակտիկան ոչ միայն մաթեմատիկական իմացության հիմքն է, այլև մաթեմատիկական տեսության ճշմարտության չափանիշը: Դիալեկտիկական մատերիալիզմը մաթեմատիկայի հասկացություններն ու դրույթները դիտելով որպես վերջին հաշվով օբյեկտիվ աշխարհի արտացոլման արդյունք, դրանով իսկ ընդունում է մաթեմատիկական ճշմարտության օբյեկտիվ բնույթը, որն անկախ է մաթեմատիկոսների կամքից: Մաթեմատիկական իմացության, ինչպես նաև ամեն մի իմացության ճշմարտության չափանիշը պրակտիկան է: Սա նշանակում է, որ այն հարցը, թե ճշմարիտ է արդյոք տվյալ մաթեմատիկական տեսությունը, թե ո՛չ, վերջին հաշվով որոշվում է պրակտիկայում նրա ունեցած կիրառումով: Բայց նկատենք, որ այստեղ խոսքը վերաբերում է ոչ թե մաթեմատիկայի առանձին դրույթների, այլ ամբողջությամբ վերցրած մաթեմատիկայի ու պրակտիկայի համապատասխանությանը: Այնինչ լոգիցիզմի, ինտուիցիոնիզմի և ֆորմալիզմի կողմից առաջ քաշված չափանիշները վերաբերում են ոչ թե մաթեմատիկական իմացությանը ընդհանրապես, այլ նրա առանձին կողմերին ու առանձին դրույթներին: Մաթեմատիկական դրույթների տրամաբանական խստությունը կամ նրանց ինտուիտիվ ակնհայտությունը տեսության ներքին պահանջ է, ուստի և չի կարող ամբողջությամբ վերցրած տեսության ճշմարտության չափանիշ ծառայել: Մասնավորապես չի կարելի մաթեմատիկական տեսության ճշմարտության չափանիշը որոնել նրա ապացուցման խստության մեջ: Ավելի շուտ պետք է պնդել հակառակը, ինքը՝ մաթեմատիկական տեսության խստությունը պայմանավորված է մաթեմատիկական օբյեկտների վերացականությամբ, նրանց իդեալական բնույթով մի կողմից, և նրա դրույթների ճշմարտությամբ, մյուս կողմից: Այլապես, եթե ճշմարտության չափանիշ համարվի տեսության շարադրանքի տրամաբանական խստությունը, ապա դակահանգեցնի այն սխալ եզրակացության, որ մի շարք գիտություններում, որոնք ուժոված չեն ապացուցման խիստ տրամաբանական մեթոդներով, ընդհանրապես չկան ճշմարիտ դրույթներ:

Սակայն այն, որ պրակտիկան է մաթեմատիկայի ճշմարտության չափանիշը, ամենևին չի նշանակում, որ յուրաքանչյուր տեսություն իր բոլոր մանրամասնություններով պետք է հաստատվի պրակտիկայում, այլապես այն կդադարի ճշմարիտ լինելուց: Օբյեկտիվ աշխարհը շատ ավելի բազմազան ու հարուստ է, քան որևէ գիտական տեսություն, որը հանդիսանում է աշխարհի որևէ հատույթը, որևէ պրոյեկցիան: Սրա հետ մեկտեղ յուրաքանչյուր գիտական տեսություն իր աբստրակտ բնույթի շնորհիվ ներկայացնում է ընդհանրականը, էականը, այնիստ պրակտիկան միշտ կոնկրետ է, որոշակի: Այս պատճառով էլ պրակտիկան չի կարող ամբողջությամբ վերցրած ապացուցել տեսության բացարձակ ճշմարտությունը: Այն միայն կարող է ցույց տալ, որ մարդկային գիտելիքներն ընդհանուր առմամբ ունեն օբյեկտիվ բովանդակություն և այդքանով միայն հիմնավորել տեսության ճշմարիտ լինելը: «Իհարկե, չպետք է մոռանալ, — գրում է Լենինը, — որ պրակտիկայի կրիտերիան բնավ չի կարող ըստ էության լիակատար կերպով հաստատել կամ հերքել որևիցե մարդկային մտապատկեր: Այդ կրիտերիան ևս այնքան «անորոշ» է, որ թույլ չի տալիս մարդկային գիտելիքներին դառնալ «բացարձակ» և միևնույն ժամանակ այնքան

որոշ է, որ անխնա պայքար է մղում իդեալիզմի և ագնոստիցիզմի բոլոր տարատեսակութիւնների դեմ»¹⁹,

Սյուս կողմից, պրակտիկան հանդիսանալով ընդհանուր առմամբ վերացրած տեսութեան ճշմարտութեան շահախիշ, այնուամենայնիւ, այն երբեք չի կարող խիստ որոշակի կերպով հիմնավորել տեսութեան որեւէ առանձին դրույթի ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը: Այդ պատճառով էլ միանգամայն սխալ է կարծել, որ որեւէ մաթեմատիկական թեորեմ չի կարող ճշմարիտ համարուել, քանի որ այն չի հաստատուել պրակտիկայում:

Վերջինքն թեկուզ ամենապարզ օրինակը՝ բացասական և կեղծ թվերի թվարանութիւնը: Պրակտիկայի միջոցով երբեք հնարաւոր չէ ցույց տալ, որ երկու բացասական թվերի արտադրյալը պետք է լինի դրական, կամ որ համալուծ կոմպլեքս թվերի արտադրյալը իրական թիւ է: Այս երկու դրույթներն էլ բնական թվերի գաղափարի տրամաբանական ընդհանրացման արդունք են: Առաջինը հիմնուում է այն պահանջի վրա, որ դիստրիբուտիվութեան օրենքը պետք է կիրառվի ոչ միայն դրական, այլև բացասական թվերի վրա: Նրկորդը հետևում է կեղծ թվի գաղափարի սահմանումից: Այս պատճառով էլ կեղծ և բացասական թվերի գաղափարները, ինչպես նաև նրանց միջև կատարվող գործողութիւնները, անմիջական պրակտիկ ստուգման ենթարկվել չեն կարող: Այդ թվերը ռեալ են ոչ թե ինքնին, այլ բնական թվերի հետ ունեցած իրենց հարաբերութիւնների մեջ միայն: Որքանով պրակտիկան ցույց է տալիս, որ թվաբանութիւնը ընդհանուր առմամբ ունի առարկայական բովանդակութիւն, այնքանով էլ հիմնավորվում են բացասական և կեղծ թվերի միջև կատարվող գործողութիւնները:

Այսպիսով, պրակտիկայի հետ հպվում, նրա վրա հենվում է մաթեմատիկական տեսութիւնը ամբողջութեամբ վերացրած, և ոչ թե նրա առանձին դրույթները: Յուրաքանչյուր կոնկրետ դրույթ պրակտիկայի հետ կապվում է ոչ թե ուղիղ ձևով, այլ բազմաթիւ միջնորդավորումներով, ոչ թե ինքնին, այլ ամբողջ տեսութեան միջոցով: Պրակտիկայում կարող է միայն հաստատուել, որ ամբողջ տեսութիւնն ունի առարկայական բովանդակութիւն, իսկ յուրաքանչյուր կոնկրետ դրույթի ճշմարտութիւնը դառնում է արդեն ներքին հարց: Դրույթը հիմնավորվում է նրանով, որ մտնում է այդ ընդհանուր տեսութեան մեջ: Այս իմաստով էլ ապացուցման տրամաբանական խստութիւնը, ակնհայտութիւնը և անհակասականութիւնը, որոնք որպես մաթեմատիկական իմացութեան ճշմարտութեան շահախիշ ընդունվում են լոգիցիզմի, ինտուիցիոնիզմի և ֆորմալիզմի կողմից, ինքնին վերցրած դեռևս ճշմարտութեան շահախիշ չեն: Դրանք այն գծերն են, որով կոնկրետ դրույթները կապվում են ընդհանուր տեսութեան հետ, և վերջինիս միջոցով միայն հնարավորութիւն են ստանում հպվել պրակտիկայի՝ որպես ճշմարտութեան միակ շահախիշի հետ:

19 Վ. Ի. Լենին, Երկեր, հատ. 14, էջ 179—180: