

А. А. САРКИСЯН

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ КАК КРИТЕРИЙ ИСТИНЫ В МАТЕМАТИКЕ

Любая наука, в том числе и математика, отражает те или иные стороны и связи материального мира. Вскрывая естественные стороны и связи между предметами и явлениями, наука тем самым подтверждает правильность материалистического мировоззрения. Ни одна наука не может обойти вопрос об отношении сознания к бытию, так как ей не избежать постановки вопроса о природе своих абстракций и исходных принципов, вопроса об отношении содержания и формы, знания к действительности.

Специфика предмета и метода математики была с давних времен предметом рассмотрений философов и останется, несомненно, таковой и в дальнейшем. В свою же очередь, математики никогда не были нейтральны в области философии. Да и занимать нейтральную позицию невозможно, ибо математик всегда стремится осмыслить те процессы, которые происходят в ходе прогресса математики, если он задумается над методами получения максимальных результатов, над методами ее построения. Но, к сожалению, в силу влияния условий жизни окружающего общества, даже многие крупные математики не способны были занять правильные философские позиции и поэтому подвергались сильному влиянию идеализма и религии. В зависимости от понимания предмета самой математики, ученые входили в тот или иной лагерь: материалисты рассматривали понятия и законы математики как отражение определенных свойств и отношений реального мира, тем самым признавая существование объективной истины в математике, а идеалисты стояли на противоположной точке зрения, отрицая связь математики с действительностью, решительно отклоняли и существование объективной истины, отвергая практику, как критерий истины. Так, в идеалистической философии практика и познание оторваны друг от друга, в результате чего познание противопоставляется практике. Впервые в истории философской мысли диалектический материализм окончательно преодолел этот порок философии, превратив ее тем самым в орудие познания и революционного изменения мира. Одна из особенностей марксистской гносеологии — это единство теории и практики, которое проявляется не только в том, что практика — основа и критерий истины, а также в том, что без нее логические формы и законы мышления неспособны показать истинную картину объективной реальности.

В научном познании вообще, а в математическом особенно, главное значение имеет обобщающая абстракция, которая формируется в процессе отвлечения от некоторых признаков, свойств, отношений, предметов, явлений мира. Этот процесс приводит к образованию общих понятий.

Математические понятия, возникшие на разных ступенях развития человеческого общества из практических потребностей, будучи одним из основных завоеваний человеческой культуры, дают возможность применять их для изучения окружающего нас мира, будучи обусловлены тем, что сами объекты взяты из этого мира, и все свойства их являются лишь абстрактным выражением реальных отношений материального мира. По этому поводу Ф. Энгельс писал: «...совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами собственного творчества и воображения. Понятие числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира»¹. Такова суть математики с точки зрения диалектического материализма. Противоположные взгляды высказываются учеными идеалистами. По их мнению, математика — продукт свободного творчества человеческого духа, а ее основные понятия присущи нашему разуму априорно, т. е. до всякого опыта даны человеку уже при его рождении. Ошибочность подобного взгляда на математику многократно доказывается всей нашей практической деятельностью, особенно, когда применение математики дает ожидаемые результаты. Последнее возможно только потому, что математические истины являются лишь отражением объективных закономерностей природы.

А что из себя представляют математические истины? Известно, что истина — это мысль, соответствующая действительности. Это классическое определение истины относится к любым формам мышления, распространяется на положения любой науки. Следовательно, и в математике под истиной следует понимать, в конечном счете, соответствие ее теорий и положений с действительностью. Это достигается при помощи математических абстракций на практике. Как известно, процесс познания реальной действительности, неоспоримо, приходит «от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике». В истории геометрии до Лобачевского, как нельзя более наглядно, проявился этот путь развития науки. Добытые теорией истины только постольку ценны, поскольку они возвращаются в практику и воздействуют на нее. Действительно, без практики роль математических абстракций немыслима. Именно в практике доказывается истинность, т. е. действительность и мощь человеческого мышления. Чтобы раскрыть сущность критерия практики в математике, необходимо прежде всего рассмотреть особенности предмета и метода математики, так как именно эти особенности определяют, с одной стороны, специфику воздействия практики на развитие математики, а с другой — своеобразие действия критерия исти-

¹ Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1948, стр. 36.

ны в этой науке. Математика существует не просто как наука, а как пособие для жизни, и пытается точно определить, где и как мог бы пригодиться тот или иной математический принцип. Математические дисциплины помогают установить связь между желаемыми фактами. Еще в XVIII веке русскими и французскими математиками, трактовавшими предмет своей науки с позиций естественно-научного материализма, было доказано, что математика изучает величины или качества, что ее понятия — абстракции от реальных величин и их свойств, что, благодаря объективности и точности истин математики, знание ее теорий помогает людям использовать законы природы, учили, что конечная причина всякой математической теории заключена в практике. Математики не без успеха доказывали, что идеализм тормозит развитие науки, уводит ее в мир бессодержательных абстракций и отрывает от практики. В России, в этот период, отстаивали и развивали материалистическое понимание предмета и значения математики Л. Эйлер, М. Ломоносов и др., во Франции — Даламбер, Лагранж, Лаплас и др. Идеалистическая трактовка гносеологических вопросов математики встретила поддержку у немецких ученых, сперва в связи с влиянием идей Лейбница, который рассматривал математические понятия только как продукт духа, затем Канта, который ради подтверждения своей философской системы отрицал материалистическое толкование понятия числа, утверждая, что в человеческом сознании оно существует до всякого опыта. Трактовка математики, как науки о величинах или качествах, восходит к древним грекам. При обосновании геометрии они исходили из предположения, явно неформулированного, что величина есть то, что может быть больше или меньше². Это свойство величины указывал и Аристотель³. Однако идея измерения величин самим Евклидом, и долгое время после него, не выдвигалась на первый план. В лучшем случае измеримость величин считалась одним из характерных признаков. Последний факт был отмечен Мордухай-Болтовским в работе «Генезис современного числа»⁴. Только Декарт, а вслед за ним и Лейбниц определяют уже математику как науку о мере и порядке⁵.

В процессе развития математики все более отчетливо выступает тот факт, что количественные отношения и пространственные формы реальной действительности и, отражающие их, понятия числа, величины, геометрической фигуры, функции и другие сами обладают присущими только им качественными особенностями. Это, конечно, качество не в материальном истолковании. Это качество самого количества. Так, например: числовые термины, выражающие некоторые из наиболее абстрактных понятий, какие в состоянии создать человеческий разум, появились скорее как термины качественные, чем количественные, выражая различие лишь между одним (скорее в смысле «каким-то или какой-то».

² Н. Бурбаки. Общая топология, 1959, стр. 90.

³ Аристотель. Метафизика, Физика.

⁴ Известия СКГУ, т. III (XV), Ростов н/Д, 1928.

⁵ Р. Декарт, Правила для руководства ума, 1936, стр. 64.

чем в смысле «один человек») и двумя, и многими. Качественное происхождение числовых понятий и сейчас еще выявляется в тех особых двоичных терминах, которые имеются в некоторых языках. С расширением понятия числа, при подсчете, большие числа образовывались с помощью сложения их составляющих: при произношении некоторые австралийские племена (племя реки Муррей, племя Камиларои) употребляют двоичные названия цифр. Качественное происхождение математических терминов отразилось и в символике. Ярким примером сказанного служат цифровые знаки иранского, селитского, среднеперсидского, а также пехлевийского языков⁶. «Число,— писал Энгельс,— есть чистейшее количественное определение, какое мы только знаем. Но оно полно качественных различий»⁷. Так, например, с изменением числовой величины эксцентриситета происходит качественное изменение кривой: одно и то же математическое уравнение кривой второго порядка выражает различные кривые, качественно отличающиеся одна от другой (окружность, эллипс, параболу, гиперболу или прямую линию). То или иное уравнение обычно считается решенным, когда его решение выражается конечным числом известных функций, но это возможно не всегда, следовательно мы стараемся решить задачу, так сказать качественно, т. е. стараемся узнать форму кривой, представляющей неизвестную функцию, затем только остается найти количественное решение задачи. Даже сама геометрия, с числом измерения больше трех, признается не просто аналитической геометрией, ибо она не чисто количественная, а и качественная, благодаря чему она и становится особенно интересной. Известно также существование чисто качественной геометрии, в основе которой лежит топология — наука, предметом изучения которой является изучение отношений в расположении различных элементов фигуры, отвлекаясь от их величины, от всякой количественной идеи.

Итак, математика интересуется не только количественными, но и качественными сторонами изучаемых объектов.

Математические теории и принципы применяются в любой области по необходимости, благодаря ее возможности оперировать абстрактными понятиями, в чем состоит могущество математики. Великий прогресс в ней был всегда связан с созданием все более общих абстракций, с выработкой новой и более рациональной символики. По этому поводу создатель абстрактной алгебры Дж. Буль в 1954 г. писал: «В природе математики не заложена необходимость заниматься идеями числа и величины», а Грассман утверждает, что «название науки о величинах не подходит для математики в целом», и строит свое исчисление в форме, из которой заранее исключены понятия числа и геометрического объекта. Что же тогда изучает математика? Буль дает следующий ответ: математика трактует «об операциях, рассматриваемых сами по себе, независимо от различных предметов, к которым они могут применяться». Современ-

⁶ Пехлевийско-персидско-армяно-русско-английский словарь, 1965, стр. 327.

⁷ Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1955, стр. 206.

ная математика лучше приспособлена для отражения, описания моделирования, при помощи своего формализованного языка многообразных явлений деятельности. Сущность математики, говорит Бурбаки, «представляется теперь как учение об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, именно тех, которые в качестве аксиом положены в основание теории»⁸.

Как известно, математика и, в частности, геометрия стала наукой лишь тогда, когда в ней начали применять логические доказательства, когда ее положения стали выводить не путем непосредственных измерений, а при помощи умозаключений, когда те или иные положения начали устанавливаться в общем виде. Особый интерес представляют именно те логические средства, имеющиеся в распоряжении, и критерии, которые определяют окончательное установление истинности. А для того, чтобы утверждать, что истинность окончательно установлена, необходимо доказать, что действительно чувственным данным, из которых исходит достоверность знания, соответствует независимая от познающего субъекта действительность. Однако ценность науки заключается не в фиксации этих данных, а в ее обобщениях, которыми она дает объяснение мира. Чтобы утверждать и быть уверенным, что найденные обобщения содержат в себе объективную истину, необходимо, в свою очередь, показать, какими путями (мыслительными операциями, логическими средствами) наука приходит к обобщенному знанию, к построению теорий, претендующих на объяснение мира. Развитие математики и возникшие в ней трудности потребовали изучения логических средств, используемых в ней, обеспечивающих ее строгость и точность. Эта задача выполняется математической логикой, благодаря которой логические связи находят свое выражение в формулах.

Рассмотрим каковы критерии и какова природа математических доказательств, позволяющие отличать истинные доказательства от ложных? Это вопросы философского характера и нельзя их разрешать в пределах чистой математики, т. е. при употреблении одних только математических методов.

В математическом познании имеет большое значение строгость доказательства. Справедливы по этому поводу мысли Анри Пуанкаре: «Доказательство, которое не является строгим, — ничто. Думаю, что никто не станет оспаривать этой истины»⁹. Существуют два рода, два совершенно различных направления в методе доказательства. Сторонники первого пытаются придти к истине путем логических рассуждений, ничего не вверяя случаю, а сторонники второго вверяют себя интуиции и сразу делают быстрые завоевания, хотя и иногда не совсем надежные. Ярким примером интуиционизма в математике является вся геометрия Эвклида, каждая часть которой была обусловлена интуицией. Однако

⁸ Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, 1963 г.

⁹ А. Пуанкаре, Наука и метод, 1910, стр. 22.

со временем произошла эволюция в самой геометрии: интуиционистские начала ее встали на логические основы (особенно благодаря работам Гильберта). В чем же причина подобной эволюции? Почему читатели потребовали логичности? Именно потому, что интуиция одна не может дать необходимой строгости, ни даже достоверности — что особенно заметнее. Как же тогда мыслить: чистая логика в рассуждениях приводит к тавтологии, она же сама по себе не может дать начало никакой науке. Следовательно, для создания той или иной науки необходимо нечто другое, чем чистая логика. Именно для обозначения этого другого введено понятие интуиции. Благодаря интуиции можно видеть цель издали, что крайне необходимо для исследователя в выборе пути. Философские взгляды интуиционистской школы не были научными и широкого признания не получили, но принципиальная критика понятий доказательства и определения сыграла важную роль в создании конструктивной логики.

Для постижения истины можно, конечно, пользоваться также ощущениями, однако, без применения к ним анализа разума нельзя быть уверенным в том, что ощущения не обманывают нас, ибо все, что дается ощущениями, правильно, поэтому возникает необходимость проверить материал ощущения, а это можно сделать при помощи разума, согласно законам логического мышления. Чувство не обманывает нас, если для сравнения и систематизации его материала есть соответствующий метод. Для научного познания необходим научный метод. В качестве такого метода в математике служит аксиоматический метод построения теории, основная черта которого состоит в том, что каждое утверждение — теорема доказывается чисто умозрительным путем, а именно путем логического вывода этой теоремы из раннедоказанных теорем. Но так как этот процесс должен с чего-то начинаться, то некоторые утверждения, именуемые аксиомами, принимаются без доказательств, а уже остальные теоремы доказываются логическим путем. Аксиомы при этом обычно обосновываются ссылкой на очевидность, они получаются из практики. «Все понятия, например геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения, а потому пространство, само собой, отдельно для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей, особой геометрией»¹⁰. В этих словах Лобачевского целая философская программа. Впервые было высказано убеждение, что аксиомы геометрии, в противоположность тому, что об этом говорил столь влиявший в то время на умы ученых немецкий философ Кант, не суть наши «врожденные идеи», а получаются из практики и являются лишь описаниями свойств окружающего нас реального мира. Об этом Энгельс говорил: «Если наши предпосылки верны, и если мы правильно применяем к ним законы мышления, то результат должен соответствовать действительности». Так, например, если в основании ка-

¹⁰ Н. И. Лобачевский, Новые начала геометрии. Вступление.

кой-либо математической теории лежат аксиомы А, В (заведомо истинные положения) и если из этих аксиом при помощи достаточно надежных правил логики выведена теорема С, то мы можем с уверенностью утверждать, что она истина. Такой способ построения теории сообщает каждому ее результату ту же степень очевидности, которая присуща аксиомам, и, по мере развития математики, на протяжении последних столетий он распространялся с геометрии и на остальные ее разделы. Однако до конца прошлого столетия аксиоматический метод существовал скорее в теории, чем на практике. Аксиомы формулировались далеко не полностью, и в доказательства, наряду с ними, вторглись недоказанные предложения, считавшиеся очевидными. Так продолжалось до последних десятилетий прошлого столетия, когда, наконец, в концепции аксиоматического метода наступил переломный момент. Это было в большей мере связано с появлением неэвклидовой геометрии Лобачевского—Бойаи и, возникшей, в связи с этим, задачей обоснования этой геометрии; нужно было доказать, что эвклидова аксиома о параллелях не вытекает из остальных аксиом. Для этого, конечно, потребовалось установить точный перечень аксиом геометрии (такой перечень был предложен Гильбертом¹¹). Наступила новая эпоха в понимании аксиоматического метода, характеризующаяся более высоким уровнем строгости. Не только теоремы должны выводиться друг из друга и, в конечном счете, из аксиом, но и все понятия теории должны выводиться не иначе, как посредством определений, выражающих их, через ранее введенные понятия. Но так как этот процесс должен иметь начало, то какие-то понятия, именуемые первоначальными, должны считаться с самого начала известными, скажем, из интуиции. В известной степени это, конечно, осознавалось и раньше и, тем не менее, до конца прошлого столетия перечень первоначальных понятий математических теорий не уточнялся, а в основаниях математики царила путаница. Всякое предложение (т. е. аксиома или теорема) перейдет в равнозначное ему по смыслу, если мы выразим посредством определений все входящие в него понятия через ранее введенные понятия и, в конечном счете, через первоначальные. Аксиомы приобретут при этом такую формулировку, в которую входят только первоначальные понятия, соединяющие их логико-грамматические связи (такие как «если», «на», «каждый» и т. д.: эти связки употребляются в рассуждениях в соответствии с правилами, устанавливаемыми в математической логике). И так как кроме аксиом мы не можем, при доказательствах, пользоваться никакими предположениями, то аксиомы содержат в себе все сведения о первоначальных понятиях, которые нам даны для построения аксиоматической теории. В этом смысле на аксиомы следует смотреть как на определения первоначальных понятий. Всякая аксиоматическая теория, по определению, занимается выводом следствий из определенных аксиом. Изменение этих аксиом есть вместе с тем изме-

¹¹ См. статью П. К. Рашевского, Геометрия и ее аксиоматика, Мат. просвещение, вып. 5, 73—98, 1960.

нение аксиоматической теории. При исследовании любой системы аксиом возникает проблема непротиворечивости.

Логический критерий непротиворечивости — одно из основных требований, предъявляемых к знанию и состоящее в том, что в рамках каждой категории не могут быть одновременно выводимы предложение P и его отрицание $\bar{P}$. Нарушение этого требования приводит к разрушению теории, так как в ней оказывается возможным любое предложение. Положение о логической непротиворечивости касается способа представления знания и означает, что наши мысли и рассуждения должны быть последовательными и лишенными противоречий. Истинность системы аксиом тесно связана с ее непротиворечивостью: нельзя считать истинной ту систему аксиом, которая приводит к противоречиям. Если же система аксиом приводит к подобным выводам, то это означает, что не существует совокупности объектов, ее удовлетворяющих. Но, если данной совокупности суждений (системе аксиом) не соответствуют никакие объекты, то она не является истинной. «Требуя «непротиворечивости» какой-нибудь системы аксиом,— пишет С. А. Яновская,— математик фактически требует существования хотя бы одной области объектов, для которой его формулы имели хотя бы конкретный, содержательный смысл, к которой они были бы приложимы, отражением которой служили бы»¹². Итак, требование непротиворечивости в математике в определенном смысле равносильно требованию истинности ее теорий. Оказывается, не все понятия и предложения могут пользоваться правом на существование в математике, а только те из них, которые не ведут к противоречию. Таким образом выяснено, что непротиворечивость системы аксиом является важным условием истинности математической теории. А если мы не знаем, противоречива или непротиворечива система аксиом? Будет ли она в этом случае надежным основанием для аксиоматического построения теории? Очевидно нет. Именно поэтому математики уделяют особое внимание исследованию оснований математики, т. е. тех систем аксиом, которые кладутся в основу математических теорий. В частности, огромное значение придается доказательству непротиворечивости системы аксиом. Однако некоторые математики и философы-идеалисты подменяют понятие истинности теории понятием ее непротиворечивости. «Математика,— пишет Пуанкаре,— не зависит от существования материальных вещей, а в математике слово «существовать» может иметь только один смысл,— оно означает устранение от противоречия»¹³. «Понятие логической противоречивости,— утверждает позитивист Нейрат,— должно раз и навсегда заменить отношение высказывания к чему-то данному»¹⁴. Такая подмена непротиворечивости полностью расходится с фактами науки. Ведь если посылки будут ложными, то согласно логическому закону и вывод может оказаться лож-

¹² С. А. Яновская, Идеализм и математика, стр. 64.

¹³ А. Пуанкаре, Наука и методы, Одесса, 1910, стр. 124.

¹⁴ Г. Клаус, Введение в формальную логику, 1960, стр. 385.

ным, хотя он и не противоречит первоначальным посылкам. А для науки и практики не безразлично обладание истинными знаниями, верно отражающими действительность, или ложными знаниями.

Противоречие возводится ныне самым ходом развития науки в орудие познания мира, в руководящий принцип исследования. В каждом новом шаге науки, который бы однозначно следовал из предыдущего, отыскиваются противоречия, которые становятся импульсом, толкающим науку вперед.

Всякая система объектов, удовлетворяющая аксиомам какой-либо аксиоматической теории (в том смысле, что из аксиом должны получиться истинные предложения, если вместо первоначальных понятий подставить названия этих объектов, родов, отношений и операций), называется интерпретацией или моделью этой аксиоматической теории. Если аксиомы могут каким-либо способом быть реализованы на модели, то из них нельзя правильными рассуждениями вывести два следствия, логически исключающих друг друга, скажем, утверждение или отрицание одного и того же факта. Поэтому, чтобы доказать непротиворечивость данной системы аксиом, достаточно найти одну из возможных ее реализаций. (Если же система противоречива, то это обычно обнаруживается соответствующими рассуждениями, приводящими к противоречию).

Доказательство непротиворечивости данной системы аксиом может быть условным. Например, непротиворечивость планиметрии Лобачевского была доказана построением модели Пуанкаре, предметы которой избирались в евклидовой плоскости. Соответственно этому, полученный результат был сформулирован условно: планиметрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива планиметрия Эвклида.

Изучением моделей аксиоматической теории занимается теория моделей. Предметом изучения аксиоматической теории может служить любая ее модель. Благодаря этому применимость аксиоматической теории шире, чем применимость соответствующей не строго аксиоматизированной теории. Теоретически приходится рассматривать и такие системы аксиом, для которых вовсе не существует интерпретации. Имея дело с конкретной аксиоматической теорией, мы заранее не можем знать, допускает ли она интерпретацию. Противоречивая теория, конечно не может иметь модели, в то время как существует классическая теорема о том, что всякая непротиворечивая аксиоматическая теория имеет модель. Это—знаменитая теорема Геделя о полноте классического исчисления предикатов, доказанная им в 1930 году. Заметим, что самое простое и наиболее совершенное, в логическом отношении, доказательство этой теоремы было дано Л. Генкиным в 1949 г.¹⁵

Построив «модель» плоскости Лобачевского, мы убеждаемся, что из аксиом Лобачевского никак нельзя вывести противоречащие друг другу следствия. Если бы 20 аксиом вели к противоречию, то можно было

¹⁵ L. Henkin, The completeness of the firstorder functional calculus, The Journal of symbolic, 14, 1949, стр. 159—166.

бы об этих эвклидовых объектах, пользуясь в действительности имеющимися эвклидовыми соотношениями между ними, вывести противоречащие друг другу факты. Но это значило бы, что, рассуждая логически правильно, в самой эвклидовой геометрии можно было бы прийти к противоречию. Вот то соображение¹⁶, которое не приходило в голову ни Лобачевскому, ни Бойяи, ни Гауссу, ни Риману. Если бы оно пришло им в голову, то они, а не Бельтрами и Клейн, доказали бы это. Непротиворечивость геометрии Эвклида в свою очередь может быть доказана, если предполагать непротиворечивость обычной арифметики. Это делается при помощи метода аналитической геометрии.

Известно, что в действительности суждение не потому истинно, что его можно вывести логически, а потому, что оно верно отражает действительность. Возникает очень важный гносеологический вопрос: всегда ли найдутся в материальной действительности объекты, соответствующие «существующим» в данной аксиоматической теории абстрактным объектам, т. е. обязательно ли наша аксиоматическая теория будет отражать реальность. Решить этот вопрос можно только при помощи критерия практики. Однако не исключается возможность построения и такой теории, когда в материальной действительности не находятся материальные объекты, которые могли бы быть описаны с ее помощью. Тогда эта теория на время окажется мертворожденной. Конечно, спешить отбрасывать ту или иную математическую теорию только потому, что пока для нее не находится объектов, которые могли бы быть описаны с ее помощью, не следует. Дальнейшее развитие техники, естествознания и самой математики может предоставить такие объекты. Яркими примерами подобных теорий могут служить неэвклидовы геометрии, казавшиеся сначала чистой игрой ума и нашедшие затем применение в современной физике: абстрактная теория Буля, нашедшая применение в теории релейно-контактных схем; теория групп — в кристаллографии и т. д. Стало обычным, что математика зачастую опережает технику и естествознание. Отталкиваясь от практики и поднимаясь на самые вершины абстракции, она строит модели для возможных объектов действительности. И эти объекты в ходе дальнейшего развития науки и техники, как правило, находятся. Примером такой гипотетико-дедуктивной системы может служить геометрия Лобачевского, которая ничего не утверждает об истинности своих аксиом. Все предложения этой геометрии носят следующий характер: если истинны какие-то аксиомы, то истинны такие-то теоремы (так как они выведены при помощи надежных логических средств их аксиом). Аксиоматически построенная формальная теория перестает быть гипотетической только тогда, когда для нее находятся содержательные интерпретации, либо в виде объектов, либо в виде теории, уже нашедшей применение в практике.

¹⁶ Соображение это состоит в том, что можно реализовать, «моделировать» рассматриваемую аксиоматику в математической системе, которую считаем непротиворечивой.

Интерпретация или моделирование одной теории при помощи другой достигается путем установления изоморфизма между этими теориями, т. е. при помощи установления взаимно-однозначного соответствия между основными понятиями и аксиомами этих теорий.

Самым мощным источником интерпретаций для всевозможных систем аксиом была и остается теория множеств, исходными объектами которой являются натуральные числа. Эта теория, построенная Георгом Кантором, оказала огромное влияние на развитие математики и сыграла особо важную роль в ее обосновании. Н. Н. Лузин, работая над проективными множествами, утверждал, что для проективных множеств невозможно ни доказать, ни опровергнуть (исходя из принципов теории множеств) утверждения, что они все измеримы, обладают свойством Бэра и имеют мощность континуума. Его утверждение о неразрешимости в теории множеств указанных проблем полностью не доказано до настоящего времени. В 1950 г. П. С. Новиков построил проективное множество, относительно которого непротиворечиво предположение, что оно неизмеримо, и CA -множество¹⁷, относительно которого непротиворечиво предположение, не содержит совершенного подмножества. Отсюда следует, что невозможно доказать измеримость всех проективных множеств и существование у них совершенного подмножества. Однако еще не опровергнута возможность доказать теоретико-множественными средствами существование неизмеримого проективного множества и множества, не содержащего совершенного подмножества.

Итак, при помощи теоретико-множественных принципов можно построить все известные математические понятия и дать интерпретацию любым системам аксиом. В связи с этим у Гильберта и его учеников возникла идея о создании новой науки мета-математики (или теории доказательства), которая позволила бы анализировать аксиоматические системы и, в частности, разрешать вопросы непротиворечивости, независимости, разрешимости и т. д. При этом, Гильберт определил кучу понятий и методов, которые не содержат сомнительных сторон теоретико-множественного мышления. Гильберт считал, что обоснования какой-либо математической теории можно достичь в том случае, если (используя методы математической логики) из некоторой системы аксиом вывести все возможные следствия и относительно каждого из них установить, что оно не противоречит другим.

В течение 1920—1930 годов, доказав непротиворечивость частных систем, охватывающих часть арифметики, Гильберт и его последователи (Аккерман и др.) полагали, что они уже достигли цели и доказали не только непротиворечивость арифметики, но также непротиворечивость теории множеств.

Однако результаты, полученные Гёделем в 1931 году, указали на принципиальные трудности на этом пути и, следовательно, на новые границы применимости аксиоматического метода. Гёдель доказал теорему

¹⁷ CA -множества — дополнения к A -множествам, измеримым B_0 , изучение которых сыграло большую роль в развитии дескриптивной теории множеств.

о неполноте достаточно развитых формальных систем: в каждой такой системе можно сформулировать предложение, которое недоказуемо в ней, как недоказуемо в ней и отрицание.

Так, например, если мы имеем систему аксиом $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, то в терминах этой системы аксиом можно сформулировать предложение B_0 , которое нельзя доказать при помощи данной системы аксиом. Но, может быть, к имеющейся системе аксиом можно добавить еще одну, например, A_{n+1} , которая позволит нам вывести B_0 . Да, это возможно. Но тогда обязательно найдется еще хотя бы одно предложение B_0 , которое невозможно доказать при помощи теперь уже расширенной системы аксиом. Результаты, полученные Гёделем, доказали невозможность построения «всеобщей аксиоматической системы» не только для всей математики, но даже для ее разделов, например арифметики. Конечно, теорема Гёделя вовсе не говорит о крахе аксиоматического метода. Потерпели крушение лишь надежды сформулировать такую систему аксиом, из которой можно было бы вывести все истинные предложения математики и логики.

Аксиоматический метод, поднявший научную мысль на более высокую ступень абстракции, позволил в свою очередь добиться большой экономии во времени и средствах научного исследования путем выявления инвариантных структур в семантически различных системах объектов.

Как и другие науки, математика не является замкнутой системой, а представляет собой исторический процесс. И развитие математики, как всякое развитие, протекает в противоречиях, в борьбе противоположностей. Таким образом, вопреки широко распространенному мнению, математика в целом не является непротиворечивой и абсолютно достоверной. В результате большой связи между абстрактной теорией и практикой, в основаниях математики доводится до крайних пределов логический анализ методов математических доказательств и вычислений, и только после этого анализа становится возможной автоматизация этих методов, что лежит в основе многообещающей науки — кибернетики. Таким образом, логический критерий непротиворечивости является необходимым для выявления существования математических объектов, но, в то же время, он недостаточен. Эта недостаточность дополняется практикой, потому что критерием непротиворечивости является практика. Как видим, экспериментальная действительность укладывается в «абстрактные формы — математические структуры». Положения математики прекрасно согласуются с действительностью, успешно применяются к ней именно потому, что, в конечном счете, пути их познания отвлечены от этой действительности. При этом практика людей и, в первую очередь, их производственная деятельность является критерием пригодности математических теорий для описания определенных отношений материальной действительности.

Прогресс в развитии человеческого общества привел к колоссальным успехам науки. Человечество овладело тайной атома, проникло в

космос, научилось строить «думающие» машины. И во всех этих великих открытиях огромную роль сыграла математика. Трудно указать такую отрасль науки, которая так или иначе не была бы связана с математикой. Всеуничтожающее оружие, с помощью которого современное человечество разрушает собственную культуру, тоже является одним из продуктов, который неизбежно является плодом развития математики. Появление универсальных вычислительных машин привело к «математизации» целого ряда дисциплин когда-то далеких от какого-либо влияния математических методов — экономики и медицины, педагогики и психологии, лингвистики и теории искусства. Именно поэтому, в Программе КПСС подчеркивается выдающаяся роль математики в создании материально-технической базы коммунизма, в развитии советской науки и техники.

Вот почему, математика пробуждает сильнейший интерес к двум могущественным факторам человеческого мышления — к самому процессу мышления и к достижению его, превращая математику в наиболее привлекательную для умов игру и давая полный простор и огромный толчок для развития как достигаемого результата, так и искусства достижения его.