

А.Г. ДАРБИНЯН

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ С ОБОБЩЕННОЙ
КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМОЙ УСТАНОВКИ ПРОПЕЛЛЕРОВ

Рассмотрена обобщенная кинематическая схема установки пропеллеров на квадрокоптере, которая охватывает как частные случаи большинство известных схем. Получены аналитические выражения для матрицы взаимных связей системы управления. Показано, что введение развязывающего регулятора компенсирует взаимные связи между отдельными каналами, что позволяет свести проектирование системы управления квадрокоптером к проектированию независимых каналов на основе классической теории регулирования.

Ключевые слова: квадрокоптер, кинематическая схема установки пропеллеров, жесткие взаимные связи, развязывающий регулятор.

Введение. Вопросам разработки математических моделей и систем управления квадрокоптерами, т.е. беспилотными летательными аппаратами с четырьмя винтами, посвящены многочисленные научно-технические публикации [1-4].

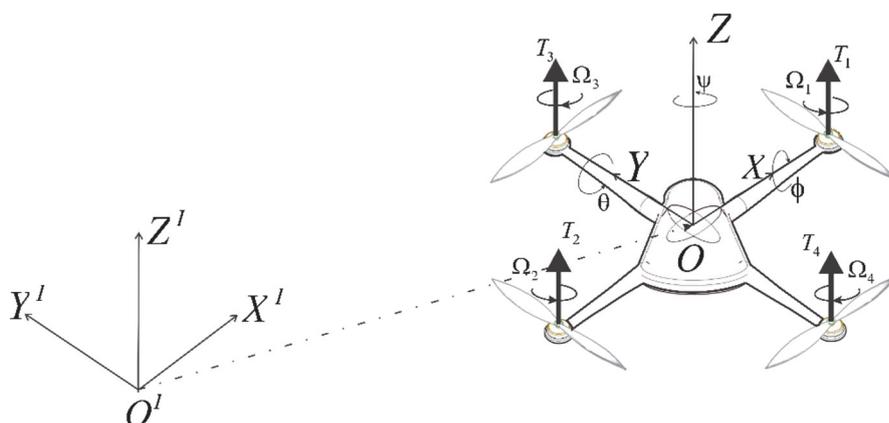


Рис. 1. Схематическое изображение квадрокоптера

Схематическое изображение квадрокоптера показано на рис. 1, где через $O^I X^I Y^I Z^I$ обозначена инерциальная система координат (СК), относительно которой описывается движение центра масс (ЦМ) квадрокоптера, а через

$OXYZ$ - жестко связанная с квадрокоптером СК с началом в ЦМ и осями, направленными вдоль главных моментов инерции. Переход от инерциальной СК $O^i X^i Y^i Z^i$ к связанной $OXYZ$ осуществляется тремя последовательными поворотами на углы рыскания ψ , крена ϕ и тангажа θ (в указанной последовательности) и описывается следующей матрицей:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta - \sin\phi \sin\psi \sin\theta & -\cos\phi \sin\psi & \cos\psi \sin\theta + \cos\theta \sin\phi \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi + \cos\psi \sin\phi \sin\theta & \cos\phi \cos\psi & \sin\psi \sin\theta - \cos\psi \cos\theta \sin\phi \\ -\cos\phi \sin\theta & \sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Общим для всех типов квадрокоптеров является то, что роторы всех моторов с пропеллерами установлены параллельно вертикальной оси OZ , причем каждый последующий мотор вращается в направлении, обратном направлению вращения предыдущего мотора (рис. 1б).

Вместе с тем на практике существуют различные кинематические схемы установки моторов на корпусе квадрокоптера, основные из которых показаны на рис. 2 [1-3]. В литературе эти схемы часто называются, исходя из их вида, схемами типа X4, I4 (или +4) и H4.

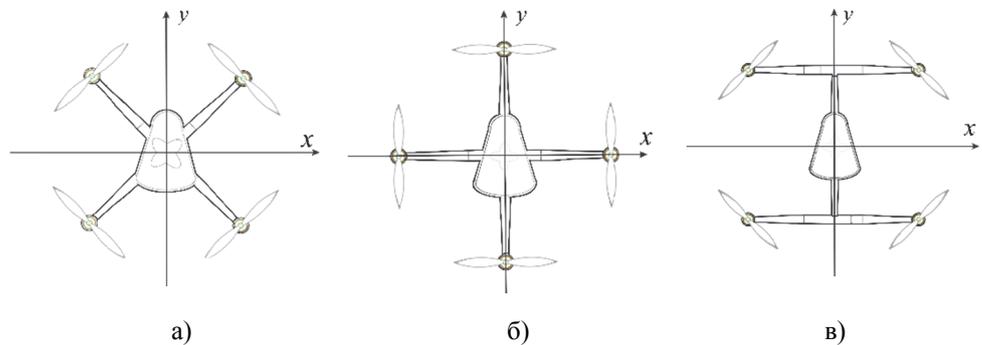


Рис. 2. Основные кинематические схемы установки моторов:
а- тип X4, б- тип I4, в- тип H4

Каждая из показанных на рис. 2 схем приводит к определенным структурным особенностям системы управления квадрокоптером, что необходимо учитывать при выборе параметров регуляторов по всем каналам.

В настоящей статье рассмотрены вопросы разработки математической модели системы управления квадрокоптером с обобщенной кинематической схемой установки роторов, которая охватывает все частные случаи, показанные на рис. 2, и позволяет получить соответствующие выражения для общей матрицы компенсирующих взаимных связей регуляторов.

1. Динамика квадрокоптера. Для анализа динамики введем следующие обозначения: m - масса квадрокоптера; x, y, z - его координаты относительно инерциальной СК $O^l X^l Y^l Z^l$; I_x, I_y, I_z - главные моменты инерции относительно осей OX, OY и OZ [1-4]. Далее обозначим через J_T одинаковые моменты инерции роторов каждого мотора, а через Ω - суммарную скорость вращения пропеллеров:

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4, \quad (2)$$

где Ω_i - скорость i -го ($i=1,2,3,4$) пропеллера. Тогда при отсутствии внешних воздействий нелинейные динамические уравнения поступательного движения ЦМ в инерциальной СК и углового движения квадрокоптера относительно ЦМ в связанной СК имеют следующий вид [1-3]:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= (\cos \psi \sin \theta + \cos \theta \sin \phi \sin \psi) u_z, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= (\sin \psi \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \sin \phi) u_z, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= (\cos \phi \cos \theta) u_z - mg, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_x \frac{d^2 \phi}{dt^2} &= u_\phi + (I_y - I_z) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} - J_T \frac{d\theta}{dt} \Omega, \\ I_y \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= u_\theta + (I_z - I_x) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\psi}{dt} - J_T \frac{d\phi}{dt} \Omega, \\ I_z \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= u_\psi + (I_y - I_x) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

где u_z - подъемная сила вдоль вертикальной оси $O^l Z^l$; g - гравитационная постоянная; u_ϕ, u_θ, u_ψ - управляющие моменты вокруг главных осей инерции квадрокоптера.

При малых угловых скоростях квадрокоптера можно в (4) пренебречь нелинейными членами, содержащими произведения угловых скоростей. Кроме того, можно считать углы тангажа θ и крена ϕ малыми, а также принять, что в условиях парения квадрокоптера угол рыскания равен нулю ($\psi=0$). Это приводит к следующим упрощенным линейным уравнениям движения [2-4]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \theta u_z, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\phi u_z, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = u_z - mg, \quad (5)$$

$$I_x \frac{d^2 \phi}{dt^2} = u_\phi, \quad I_y \frac{d^2 \theta}{dt^2} = u_\theta, \quad I_z \frac{d^2 \psi}{dt^2} = u_\psi. \quad (6)$$

2. Кинематика квадрокоптера. На рис. 3 показана обобщенная кинематическая схема установки моторов, где нумерация последних производится против часовой стрелки. Для определенности будем считать, что направление движения квадрокоптера задается осью OX связанной СК $OXYZ$. Каждая пара моторов, имеющих одинаковое направление вращения (1,3 и 2,4), расположена на равных расстояниях L_1 и L_2 от начала координат O вдоль осей OL_1 и OL_2 , составляющих с положительным направлением оси OX углы α_1 и α_2 , где примем $\alpha_2 > \alpha_1$. Обозначив единичные векторы осей OL_1 и OL_2 через \bar{l}_1 и \bar{l}_2 , где

$$\bar{l}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{bmatrix}, \quad \bar{l}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

получим для матрицы R_{BL} перехода от СК OXY , связанной с поперечными осями квадрокоптера, к СК OL_1L_2 , связанной с осями установки пропеллеров, следующее выражение:

$$R_{BL} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & \bar{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \quad \text{где } \det(R_{BL}) = \sin(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (8)$$

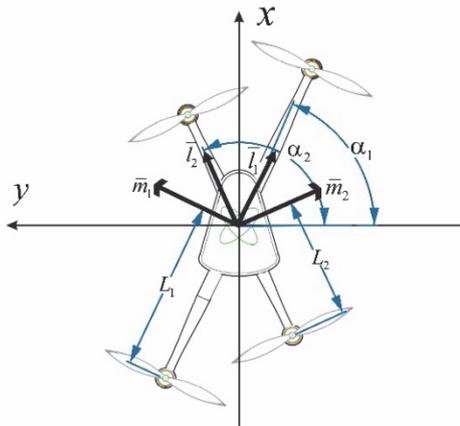


Рис. 3. Обобщенная кинематическая схема установки моторов (пропеллеров)

Отметим, что при $L_1 = L_2 = L$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$ кинематическая схема на рис. 3 переходит в стандартную схему типа X4 на рис. 2а, а при $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$ - в схему I4 на рис. 2б. В обоих случаях детерминант матрицы R_{BL} (8) равен единице, так как оси OL_1 и OL_2 при этом взаимно ортогональны.

Что касается схемы типа H4 на рис. 2в, то она эквивалентна обобщенной кинематической схеме на рис. 3 при выполнении следующих равенств:

$$L_1 = L_2 = \sqrt{L_X^2 + L_Y^2}, \quad \alpha_1 = \tan^{-1}(L_X / L_Y), \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1. \quad (9)$$

3. Управляющие силы и моменты. Каждый i -й мотор квадрокоптера производит крутящий момент τ_i в направлении вращения i -го пропеллера (рис. 1). Создаваемая i -ым пропеллером тяга T_i всегда направлена вдоль оси OZ , причем в установившемся режиме парения момент τ_i i -го мотора связан с тягой T_i соотношением

$$\tau_i = k_\psi T_i \quad (i=1,2,3,4), \quad (10)$$

где $k_\psi = const$ - постоянный коэффициент (конструктивный параметр) [1-4].

В свою очередь, тяги T_i связаны с угловыми скоростями вращения пропеллеров Ω_i квадратичной зависимостью

$$T_i = c_M \Omega_i^2, \quad (11)$$

где $c_M = const$ также является конструктивным параметром, зависящим от ряда факторов [1,2]. Однако следует учесть, что номинальная скорость вращения моторов обычно достаточно велика. Поэтому в окрестности рабочей точки зависимость между T_i и Ω_i (11) может быть заменена относительно приращений ΔT_i и $\Delta \Omega_i$ приближенной линейной зависимостью $\Delta T_i = d_M \Delta \Omega_i$, где d_M есть угловой коэффициент касательной к квадратичной зависимости в рабочей точке. В дальнейшем вместо (11) будем использовать линейную зависимость $\Delta T_i = d_M \Delta \Omega_i$ и для краткости вместо ΔT_i и $\Delta \Omega_i$ писать T_i и Ω_i .

Управляющая (подъемная) сила u_z вдоль оси OZ квадрокоптера определяется суммарной тягой всех пропеллеров и не зависит от расстояний L_1 , L_2 и углов α_1 , α_2 :

$$u_z = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (12)$$

Аналогично, управляющий момент u_ψ относительно оси рыскания OZ определяется с учетом (10) следующим выражением:

$$u_\psi = -(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4) = -k_\psi(T_1 - T_2 + T_3 - T_4), \quad (13)$$

где общий знак "минус" отражает тот факт, что крутящий момент τ_i , вращающий i -й пропеллер, действует на корпус квадрокоптера в обратном направлении.

Таким образом, подъемная сила u_z и вращающий момент u_ψ вокруг оси рыскания OZ не зависят, в силу конструктивных особенностей квадрокоптеров, от выбора кинематической схемы установки моторов.

Перейдем теперь к управляющим (угловым) моментам u_ϕ и u_θ в (4), (6) относительно поперечных осей OX и OY (рис. 1). Эти моменты создаются за счет разности тяг противоположно расположенных пропеллеров, причем моменты \bar{M}_1 и \bar{M}_2 каждой пары пропеллеров лежат в плоскости OXY и определяются следующими выражениями:

$$\bar{M}_1 = M_1 \bar{m}_1, \quad M_1 = -(T_1 - T_3)L_1, \quad (14)$$

$$\bar{M}_2 = M_2 \bar{m}_2, \quad M_2 = (T_2 - T_4)L_2, \quad (15)$$

где единичные векторы \bar{m}_1 и \bar{m}_2 проходят через начало координат и направлены перпендикулярно соответствующим осям установки моторов (на рис. 3 эти векторы показаны утолщенными стрелками). Нетрудно показать, что векторы \bar{m}_1 и \bar{m}_2 имеют вид

$$\bar{m}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}, \quad \bar{m}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_2) \\ -\cos(\alpha_2) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Что касается управляющих моментов u_ϕ и u_θ в (6), то они являются координатами суммарного вектора

$$\bar{M}_{XY} = \begin{bmatrix} u_\phi \\ u_\theta \end{bmatrix} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 = -(T_1 - T_3)L_1\bar{m}_1 + (T_2 - T_4)L_2\bar{m}_2 \quad (17)$$

в СК OXY (рис. 3).

Подставив (16) в (17), для управляющих моментов u_ϕ и u_θ , т.е. для компонент вектора \bar{M}_{XY} , получим следующие выражения:

$$u_\phi = (T_1 - T_3)L_1 \sin(\alpha_1) + (T_2 - T_4)L_2 \sin(\alpha_2), \quad (18)$$

$$u_\theta = -(T_1 - T_3)L_1 \cos(\alpha_1) - (T_2 - T_4)L_2 \cos(\alpha_2). \quad (19)$$

Таким образом, получены аналитические выражения для подъемной силы u_z (12) и управляющих моментов u_ψ (13), u_ϕ (18), u_θ (19) по осям рыскания, крена и тангажа (рис. 1), выраженные через тяги T_1, T_2, T_3, T_4 и кинематические характеристики $(\alpha_1, \alpha_2, L_1, L_2)$ квадрокоптера с обобщенной кинематической схемой установки моторов на рис. 3. Если ввести в рассмотрение векторы управляющих воздействий $\bar{U} = [u_z, u_\phi, u_\theta, u_\psi]^T$ и тяг $\bar{T} = [T_1, T_2, T_3, T_4]^T$, то эти выражения позволяют связать векторы \bar{U} и \bar{T} в следующей форме:

$$\bar{U} = R\bar{T}, \quad (20)$$

где матрица R имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ L_1 \sin(\alpha_1) & L_2 \sin(\alpha_2) & -L_1 \sin(\alpha_1) & -L_2 \sin(\alpha_2) \\ -L_1 \cos(\alpha_1) & -L_2 \cos(\alpha_2) & L_1 \cos(\alpha_1) & L_2 \cos(\alpha_2) \\ -k_\psi & k_\psi & -k_\psi & k_\psi \end{bmatrix}, \quad (21)$$

а её детерминант равен

$$\det(R) = -8L_1L_2k_\psi \sin(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (22)$$

Из (20) непосредственно получаем в матричной форме связь между тягами T_1, T_2, T_3, T_4 и требуемыми управляющими моментами $u_\theta, u_\phi, u_\psi, u_z$:

$$K = R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\cos(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{\sin(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\cos(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{\sin(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\cos(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{\sin(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & \frac{\cos(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{\sin(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{1}{4k_\psi} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

При $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$ и $L_1 = L_2 = L$ матрицы R (21) и K (23) (схема 14 на рис. 2б) принимают вид

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & L & 0 & -L \\ -L & 0 & L & 0 \\ -k_\psi & k_\psi & -k_\psi & k_\psi \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{4k_\psi} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

а при $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$ (схема X4 на рис. 2а):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}L}{2} & \frac{\sqrt{2}L}{2} & -\frac{\sqrt{2}L}{2} & -\frac{\sqrt{2}L}{2} \\ \frac{\sqrt{2}L}{2} & \frac{\sqrt{2}L}{2} & \frac{\sqrt{2}L}{2} & -\frac{\sqrt{2}L}{2} \\ -k_\psi & k_\psi & -k_\psi & k_\psi \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{1}{4k_\psi} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

4. Система управления квадрокоптером. Основной особенностью систем управления квадрокоптерами является то, что имеется только четыре управляющих сигнала, а именно: напряжения u_1 , u_2 , u_3 и u_4 на входах моторов,

причем тяги T_i всех четырех моторов направлены параллельно оси OZ . Подобная конфигурация не дает возможности управлять непосредственно всеми шестью степенями свободы квадрокоптера: тремя линейными перемещениями x, y, z в инерциальной СК и тремя углами - крена ϕ , тангажа θ и рыскания ψ вокруг осей связанной СК. Поэтому в качестве четырех управляемых параметров движения квадрокоптера обычно выбираются углы ϕ, θ, ψ и высота z [1]. В соответствии с первыми двумя уравнениями в системе уравнений (5) управление перемещениями x и y в инерциальной СК, т.е. перемещениями в горизонтальной плоскости $O^i X^i Y^i$, при этом осуществляется косвенно, за счет изменения углов крена ϕ и тангажа θ , а управление вертикальными перемещениями z вдоль оси $O^i Z^i$ происходит за счет изменения суммарной тяги пропеллеров u_z (12).

Переходя при нулевых начальных условиях в линеаризованных уравнениях (5), (6) к операторной форме записи, для управляемых переменных получим

$$z = \frac{1}{ms^2}(u_z - mg), \quad \phi = \frac{1}{I_x s^2} u_\phi, \quad \theta = \frac{1}{I_y s^2} u_\theta, \quad \psi = \frac{1}{I_z s^2} u_\psi. \quad (26)$$

Отметим, что все переменные в (26) зависят от оператора Лапласа s , что не указывается в явном виде для краткости записи.

Если ввести в рассмотрение векторы управляемых переменных $\bar{\eta} = [z, \phi, \theta, \psi]^T$, напряжений u_1, u_2, u_3, u_4 на входах моторов $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$, а также постоянный вектор $F = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, то уравнения (20), (26) можно записать в следующей векторной форме:

$$\bar{\eta} = W_U(s) R \bar{u} - \frac{1}{s^2} F g. \quad (27)$$

Диагональная матрица $W_U(s)$ в (27) имеет вид

$$W_U(s) = \frac{1}{s^2} w_M(s) \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где через $w_M(s)$ обозначена передаточная функция моторов, связывающая угловые скорости пропеллеров $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ с входными напряжениями u_1, u_2, u_3, u_4 [4]. Отметим, что числовая матрица R в (27) определяется кинематической схемой установки моторов и для разных схем на рис. 2 и 3 описывается матрицами (21), (24), (25), т.е. не является диагональной. Недиагональные элементы матрицы R при этом определяют так называемые жесткие (кинематические) взаимные связи между каналами системы управления по переменным z, ϕ, θ и ψ .

Таким образом, рассматриваемая система управления квадрокоптером относится к многомерным (много связным) системам управления, где взаимные связи между отдельными каналами характеризуются матрицей жестких взаимных связей R (21). Сказанное позволяет подойти к проектированию системы управления квадрокоптером с позиций общей теории многосвязного регулирования [5,6]. Допустим, ставится задача выбора такого матричного регулятора $W_{\text{Reg}}(s)$, который обеспечивает независимость всех четырех каналов взаимосвязанной системы управления, описываемой выражением (27). Если обозначить через $\bar{\eta}_r = [z_r, \phi_r, \theta_r, \psi_r]^T$ вектор задающих (входных) сигналов системы, то матричное уравнение разомкнутой системы управления квадрокоптером с регулятором $W_{\text{Reg}}(s)$ примет вид

$$\bar{\eta} = W_O(s)\bar{\varepsilon} - \frac{1}{s^2} Fg, \quad (29)$$

где $\bar{\varepsilon} = \bar{\eta}_r - \bar{\eta}$ есть вектор ошибки замкнутой системы, а

$$W_O(s) = W_U(s)RW_{\text{Reg}}(s) \quad (30)$$

- передаточная матрица разомкнутой системы.

Из (30) очевидно, что если выбрать $W_{\text{Reg}}(s)$ из условия

$$W_{\text{reg}}(s) = R^{-1} \text{diag} \{W_{R_i}(s)\}, \quad (31)$$

где матрица R^{-1} имеет вид (23), а $\text{diag} \{W_{R_i}(s)\}$ есть диагональная матрица регуляторов $w_{Rz}(s)$, $w_{R\phi}(s)$, $w_{R\theta}(s)$, $w_{R\psi}(s)$ в отдельных каналах, то передаточная матрица $W_O(s)$ (30) в развернутом виде примет вид

$$W_O(s) = \frac{1}{s^2} w_M(s) \begin{bmatrix} w_{Rz}(s)/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{R\phi}(s)/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{R\theta}(s)/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{R\psi}(s)/I_z \end{bmatrix}, \quad (32)$$

т.е. станет диагональной. Физически это означает, что отдельные каналы системы оказываются независимыми. В теории многосвязного регулирования регуляторы типа (31) называются развязывающими [5,6].

Выходной сигнал замкнутой системы $\bar{\eta}$ при этом примет вид

$$\bar{\eta} = \Phi(s)\bar{\eta}_r - \Phi_\varepsilon(s) \frac{1}{s^2} Fg, \quad (33)$$

где

$$\Phi(s) = [I + W_O(s)]^{-1} W_O(s), \quad \Phi_\varepsilon(s) = [I + W_O(s)]^{-1} \quad (34)$$

есть диагональные передаточные матрицы замкнутой системы по выходу и ошибке, а I - единичная матрица размера 4×4 .

Подставив выражения для $W_O(s)$ (32) в (30), получим систему следующих четырех независимых уравнений:

$$z = \frac{1}{ms^2 + w_{Rz}(s)w_M(s)} \{w_{Rz}(s)w_M(s)z_r - mg\}, \quad \phi = \frac{w_M(s)w_{R\phi}(s)}{I_y s^2 + w_M(s)w_{R\phi}(s)} \phi_r, \quad (35)$$

$$\theta = \frac{w_M(s)w_{R\theta}(s)}{I_x s^2 + w_M(s)w_{R\theta}(s)} \theta_r, \quad \psi = \frac{w_M(s)w_{R\psi}(s)}{I_z s^2 + w_M(s)w_{R\psi}(s)} \psi_r, \quad (36)$$

первое из которых характеризует линейное движение квадрокоптера вдоль вертикальной оси $O^I Z^I$, а остальные три описывают динамику системы управления по углам крена, тангажа и рыскания. Устойчивость замкнутой системы управления при этом определяется распределением корней следующих четырех независимых уравнений:

$$\begin{aligned}
 ms^2 + w_M(s)w_{Rz}(s) &= 0, & I_x s^2 + w_M(s)w_{R\phi}(s) &= 0, \\
 I_y s^2 + w_M(s)w_{R\theta}(s) &= 0, & I_z s^2 + w_M(s)w_{R\psi}(s) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Матричная структурная схема замкнутой системы управления квадрокоптером показана на рис. 4, а на рис. 5 дана структура системы управления по каналу тангажа (структуры систем управления по остальным каналам полностью аналогичны последней).

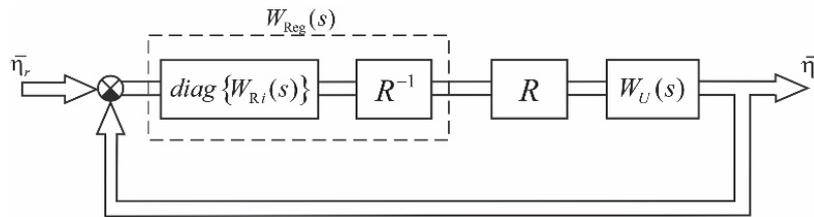


Рис. 4. Матричная структурная схема системы управления квадрокоптером

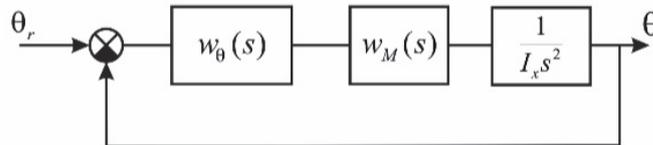


Рис. 5. Структурные схемы систем управления по каналу тангажа

Таким образом, проектирование системы управления квадрокоптером с развязывающим регулятором $W_{Reg}(s)$ (31) сводится к проектированию четырех независимых отдельных каналов, которое может быть осуществлено стандартными методами классической теории регулирования [7].

Заключение. Рассмотрена обобщенная кинематическая схема установки пропеллеров (моторов) квадрокоптера, которая охватывает как частные случаи все известные на практике схемы установки, и получены аналитические выражения для соответствующих матриц жестких взаимных связей и развязывающих регуляторов. Показано, что при вводе в систему управления квадрокоптером развязывающего матричного регулятора $W_{Reg}(s)$ (31) проектирование системы сводится к независимому выбору регуляторов $w_{Rz}(s)$, $w_{R\phi}(s)$, $w_{R\theta}(s)$, $w_{R\psi}(s)$ в отдельных каналах на основе обычных методов классической теории регулирования [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lozano R., Castillo P., and Dzul A.** Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors // IEEE Control Systems Magazine.- 2005.- P. 45-55.
2. **Bouabdallah S.** Design and control of quadrotors with application to autonomous flying: PhD thesis. -EPFL, 2007. -129 p.
3. **Claudia M.** Modelling and control of autonomous quad-rotor.-Faculty of Engineering, Science and Medicine, University of Aalborg, Denmark, 2010.-149 p.
4. **Гаспарян О.Н., Егиазарян Г.Г., Дарбинян А.Г., Егиазарян Д.У.** Разработка системы управления квадрокоптером с развязывающим регулятором с учетом динамики электродвигателей // Вестник РАУ. -Ереван, 2017.- N 2.- С. 59-80.
5. **Skogestad S., Postlethwaite I.** Multivariable Feedback Control. Analysis and Design.- John Wiley and Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2005.- 596 p.
6. **Gasparyan O.N.** Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach.- John Wiley & Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2008.- 357 p.
7. **Dorf R.C., Bishop R.** Modern Control Systems.- Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 2007.-1046 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 31.05.2019.

Հ.Գ. ԴԱՐՔԻՆՅԱՆ

ԹԵՎԱՊՏՈՒՏԱԿՆԵՐԻ ՏԵՂԱԿԱՑՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄԽԵՄԱՅՈՎ ՔԱՌԱՊՏՈՒՏԱԿԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳ

Դիտարկվել է քառապտուտակի իրանի վրա շարժիչների տեղակայման կինեմատիկական սխեման՝ ընդհանրացված տարբերակով: Ստացվել են քառապտուտակի կառավարման համակարգի կոշտ փոխադարձ կապերի մատրիցի անալիտիկ արտահայտությունները՝ ընդհանուր տեսքով: Ցույց է տրվել, որ մատրիցային կապազերծող կարգավորիչի ներմուծումը կոմպենսացնում է առանձին կապուղիների միջև եղած կոշտ փոխադարձ կապերը, և քառապտուտակի կառավարման համակարգի նախագծումը հանգում է անկախ կանալների նախագծմանը՝ հիմնվելով կառավարման համակարգերի դասական տեսության վրա:

Առանցքային բառեր. քառապտուտակ, թևապտուտակների տեղադրման կինեմատիկական սխեմա, կոշտ փոխադարձ կապեր, կապազերծող կարգավորիչ:

H.G. DARBINYAN

**THE CONTROL SYSTEM OF A QUADROPTER WITH
GENERALIZED KINEMATIC SCHEME OF THE PROPELLER
ARRANGEMENT**

A generalized kinematic scheme of the propeller arrangement on the quadrocopter is considered, which embraces, as special cases, most of the known schemes. Analytical expressions for the matrices of cross-connections of the control system are derived. It is shown, that the introduction of a decoupling regulator compensates the cross-connections between separate channels. This allows to reduce the development of the quadrocopter's control system to the development of its independent channels on the basis of the classical control theory.

Keywords: quadrocopter, kinematic scheme of the propeller arrangement, rigid cross-connections, decoupling regulator.